Hoja de Ejercicios 4 - Función real de una variable real

Conjuntos de definición (dominios)

Ejercicio 1. *Hallar los conjuntos de definición de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-3x-4}}$

b) $g(x) = \log\left(\frac{x-1}{x^2-3x-4}\right)$

c) $h(x) = \sqrt{1-3x} + \operatorname{arc\,sen} \frac{2x-1}{5}$

d) $j(x) = \frac{\log(x+3)}{\sqrt[4]{x^2-1}}$

Ejercicio 2. *Hallar el dominio de la función $g \circ h \circ f$, dadas:*

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-4} \qquad g(x) = \log x \qquad h(x) = \sqrt{x}$$

Ejercicio 3. *Hallar el conjunto de definición de la función $f \circ g$ siendo:*

$$f(x) = \log(x) \quad y \quad g(x) = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$$

Indicar razonadamente si se trata de un conjunto acotado, identificando sus extremos, máximos y mínimos.

Límites, continuidad y derivabilidad

Ejercicio 4. *Calcular los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right]$

Ejercicio 5. *Hallar, aplicando la regla de L'Hôpital:*

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan e^x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Ejercicio 6.

a) *Enuncia el Teorema del Valor Medio (o de Lagrange)*

b) *Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que se cumplan las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, siendo:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x}{1-x} & si \quad x < 0 \\ \frac{2x}{1+ax} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x^2 + ax) & si \quad x \leq 0 \\ \frac{bx^2+c}{x+1} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

a) *Calcular las constantes a, b y c, sabiendo que f es derivable, y que $f'(1) = 3$.*

b) *Enunciar el Teorema del valor medio de Lagrange*

c) *Razonar justificadamente si se cumplen las condiciones para la aplicación de dicho teorema en el intervalo $[0, 1]$, e indicar en qué punto se verifica el teorema.*

Ejercicio 8. *Estudiar la la derivabilidad considerando los posibles valores de a, dada la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} & si \ \ 0 < x < 1 \\ \log\left(\operatorname{sen}^2(x+a) + 1\right) & si \ \ x \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 9. *Determinar los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua, y estudiar su derivabilidad, empleando para ello la definición de derivada a través del cociente diferencial.*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 \ \ si \ \ x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} \ \ si \ \ 0 < x \leq 2 \\ \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} \ \ si \ \ x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 10. *Dada la función $f(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$, se pide:*

a) *La función derivada, calculando su expresión en la forma más simplificada posible*

b) *La derivada en $x_0 = \frac{\pi}{2}$*

c) *La diferencial en $x_0 = \frac{-3\pi}{2}$*

d) *La ecuación de la recta tangente y de la recta normal a $f(x)$ en $x_0 = 0$*

Ejercicio 11. *Dada la función* $f(x) = \dfrac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x}$

a.) *Indicar su dominio.*

b.) *Estudiar su continuidad en todo $\mathbb{R}$, clasificando las discontinuidades si las hubiere.*

c.) *Enunciar el Teorema de Bolzano y discutir su aplicación en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$*

Ejercicio 12. *Calcular los puntos de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al punto $(3, 0)$ sea mínima. Utilizar el criterio de la segunda derivada para verificar el resultado.*

Ejercicio 13. *Calcular el valor máximo y mínimo de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.*

Derivación implícita

Ejercicio 14. *Considerando que y es función de x en un cierto entorno, calcula la derivada y' a partir de las ecuaciones:*

a) $Ln(y) + 4y^2 + 2x^2 = 1$

b) $cos\ x + sen\ 2y = 0$

c) $5x^3 + 2y^5 = Ln(xy)$

d) $\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 y = 0$

e) $x^2 \operatorname{sen}(x+y) - 5ye^x = 3$

Derivadas sucesivas. Polinomio de Taylor

Ejercicio 15. *Desarrollar la fórmula de Leibniz en el caso $n = 4$.*

Ejercicio 16. *Siendo $f(x) = \sqrt{x}\log(x+1)$ calcular $f^{(4}(1)$ usando la fórmula de Leibniz.*

Ejercicio 17. *Usando la fórmula de Leibniz, hallar la derivada enésima de la función $f(x) = e^{\alpha x}x^2$.*

Ejercicio 18. *Siendo $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ calcular $f^{(4}(\pi/2)$.*

Ejercicio 19. *Usando la fórmula de Leibniz, calcular $y^{(n)}$ para $y = xe^x$.*

Ejercicio 20. *Dada la función $f(x) = \log(1+x)$, se pide:*

a) *Hallar el polinomio de MacLaurin de grado 5, dando además la expresión general de $f^{(n}$ y del polinomio para el término enésimo.*

b) *Aproximar mediante el polinomio anterior el valor de f en el punto $x = 0.4$ hasta orden 4, indicando el error de la estimación mediante el resto de Lagrange.*

Ejercicio 21. *Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, hallar:*

a) *Sus asíntotas*

b) *El polinomio de Taylor de grado 3 que aproxima la función en cada uno de sus extremos relativos*

c) *Estimación del error cometido en la aproximación de $f(0.25)$ por el polinomio de McLaurin considerando la forma del resto de Lagrange.*

Ejercicio 22. *Dada la función $f(x) = x - e^{2x}$, se pide:*

a) *Obtener el Polinomio de MacLaurin de grado 4*

b) *Acotar el error cometido en la estimación de $f(0.2)$ empleando el Resto de Lagrange.*

Sol. Ej. 1.

Debe tenerse presente que las raíces de índice par únicamente están definidas cuando el radicando toma valores ≥ 0. Por otra parte, el radicando es una función racional, que no está definida cuando se anula el denominador.

a) Teniendo en cuentas ambas consideraciones:

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad \text{y} \quad x_2 = 4$$

, siendo x_1 y x_2 las raíces que anulan el denominador, y que por lo tanto quedan excluídas del dominio Df.

Por lo tanto:

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-4)} \geq 0$$

, debiéndose analizar los intervalos sobre la recta real definidos por los puntos críticos identificados:

- Si $x < -1$ el radicando es negativo, y por lo tanto queda fuera del dominio.
- Si $-1 < x \leq 1$ la expresión es ≥ 0, y por lo tanto $(-1, 1] \in Df$.
- Si $1 < x < 4$, el radicando es negativo.
- Si $x > 4$, el radicando es positivo, por lo que $(4, \infty) \in Df$

Si $x = 1$ el radicando se anula, y por lo tanto $1 \in Df$

Reuniendo las soluciones parciales, se tiene que:

$$Df = (-1, 1] \cup (4, \infty)$$

Nótese que la función log no está definida para ningún valor de $x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0$.

b) La expresión dentro del logaritmo es la misma función racional analizada en el apartado anterior. Por lo tanto, siguiendo los pasos del ejercicio anterior, se puede concluir que:

$$Dg = Df - \{1\} = (-1, 1) \cup (4, \infty)$$

---

c) Se analizará el dominio de la función dada teniendo en cuenta la suma de funciones.

Recuérdese que si $h(x) = f(x) + g(x)$, entonces $Dh = Df \cap Dg$

Considerando $h(x) = f(x) + g(x)$, se analizan separadamente los dominios de cada sumando:

- $f(x) = \sqrt{1-3x}$. El dominio es el conjunto:

$$1 - 3x \geq 0 \to 1 \geq 3x \to \frac{1}{3}x \to Df = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$$

- $g(x) = \operatorname{arc\,sen} \frac{2x-1}{5}$.

Nótese que $\operatorname{sen} x$ es una función acotada entre -1 (mínimo) y 1 (máximo), y por lo tanto $-1 \leq \frac{2x-1}{5} \leq 1$

$$-1 \leq \frac{2x-1}{5} \leq 1 \to -5 \leq 2x - 1 \leq 5 \to -2 \leq x \leq 3 \to Dg = [-2, 3]$$

Intersectando ambos subconjuntos, se obtiene la solución:

$$Dh = Df \cap Dg = \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cap [-2, 3] = \left[-2, \frac{1}{3}\right]$$

---

d) El dominio de la función será igual a la intersección de los dominios de la función del numerador y del denominador, excluyendo además los valores de x que anulan el denominador.

$$j(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow Df = Dg \cap Dh - \{\text{ceros de } h(x)\}$$

Analizamos el numerador:

$$g(x) = \log(x+3) \Rightarrow x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \Rightarrow Dg = (-3, +\infty)$$

La expresión bajo la raíz de índice par no puede ser negativa:

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq -1 \Rightarrow Dh = (-\infty, -1] \cap [1, +\infty)$$

Además, la expresión del denominador no puede ser cero, y por lo tanto:

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \infty) - \{-1, 1\}$$

Finalmente, reuniendo soluciones parciales se obtiene el dominio de la función, representada en la figura 1:

$$\begin{aligned} Dj = {} & Dg \cap Dh - \{\text{ceros de } h(x)\} = \\ & = (-3, +\infty) \cap (-\infty, -1] \cap [1, +\infty) \cap (-\infty, \infty) - \{-1, 1\} = \\ & \qquad = (-3, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

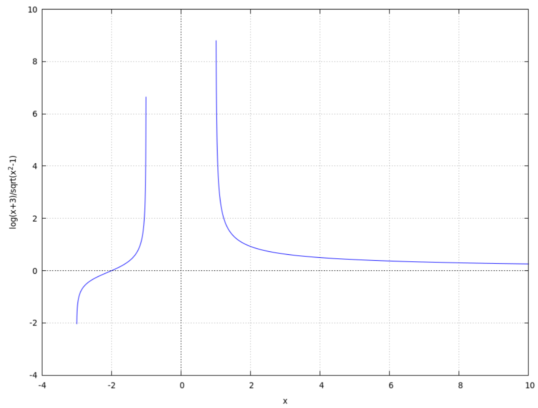

Figura 1: Gráfica de la función $j(x)$.

Sol. Ej. 2. Se escribe la función $g \circ h \circ f$ como

$$k(x) = g \circ f \circ h = \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x-4}}\right)$$

Para el cálculo de Dk, se considera que $D_{log(x)} = (0, +\infty)$, y que $D_{\sqrt{x}} \geq 0$ (al ser raíz par). Por lo tanto:

$$\frac{x+1}{x^2-3x-4} > 0$$

Existen dos puntos de no definición de la función donde se anula el denominador:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad x = 4$$

Estudiando los intervalos definidos por ambos puntos críticos, se tiene que:

- Si $x < -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-3x-4} < 0$
- Si $-1 < x < 4 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-3x-4} < 0$
- Si $x > 4 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-3x-4} > 0$

Por lo tanto, se concluye que $Dk = (4, +\infty)$. Se representa gráficamente la solución en la Figura 2.

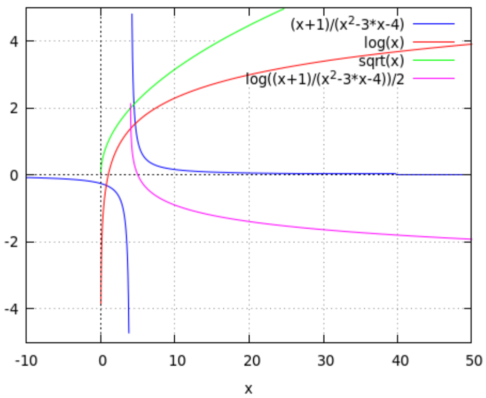

Figura 2: Gráficas de las funciones $g(x) = \log x$ (rojo), $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-4}$ (azul), $h(x) = \sqrt{x}$ (verde) y $g \circ f \circ h = \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x-4}}\right)$ (rosa).

Sol. Ej. 3. La función $f \circ g = \log\left(\frac{x-1}{x^2-3x-4}\right)$. Dado que la función logaritmo no está definida en 0 ni para valores negativos en $\mathbb{R}$, se plantea la siguiente inecuación:

$$\frac{x-1}{x^2-3x-4} > 0 \Rightarrow \text{[Factorizando el denominador]} \Rightarrow \frac{x-1}{(x-4)(x+1)} > 0$$

, que permite identificar los puntos críticos a analizar en $x = -1$, $x = 1$ y $x = 4$. Los puntos $x = -1$ y $x = 4$ pueden excluirse automáticamemte del conjunto solución por anular el denominador. Además, en $x = 1$ la expresión se hace 0, por lo que este valor también se descarta de antemano. Se analizan a continuación los signos en cada uno de los intervalos identificados:

- Si $x < -1$, se tiene una expresión del tipo

  $$\frac{(-)}{(-)\cdot(-)} = \frac{(-)}{(+)} < 0$$

  por lo tanto el subconjunto $(-\infty, -1)$ no pertenece al dominio de $f \circ g$.

- Si $-1 < x < 1$, se tiene

  $$\frac{(-)}{(-)\cdot(+)} < 0 = \frac{(-)}{(-)} > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

- Si $1 < x < 4$, se tiene

  $$\frac{(+)}{(-)\cdot(+)} = \frac{(+)}{(-)} < 0 \Rightarrow x \notin (1, 4)$$

- Si $x > 4$, se tiene

  $$\frac{(+)}{(+)\cdot(+)} = \frac{(+)}{(+)} > 0 \Rightarrow x \in (4, \infty)$$

Reuniendo soluciones parciales, se obtiene la solución:

$$Df \circ g = (-1, 1) \cup (4, +\infty)$$

El conjunto dominio Df no está acotado, ya que no se encuentra acotado superiormente. Está acotado inferiormente, siendo cotas inferiores $\forall x \in \mathbb{R} \leq -1$, siendo $InfDf = -1$. No tiene mínimo, ya que el ínfimo no pertenece al dominio. Al no estar acotada superiormente, no tiene supremo ni máximo. Se representa la gráfica de $f \circ g$ en la Figura 3.

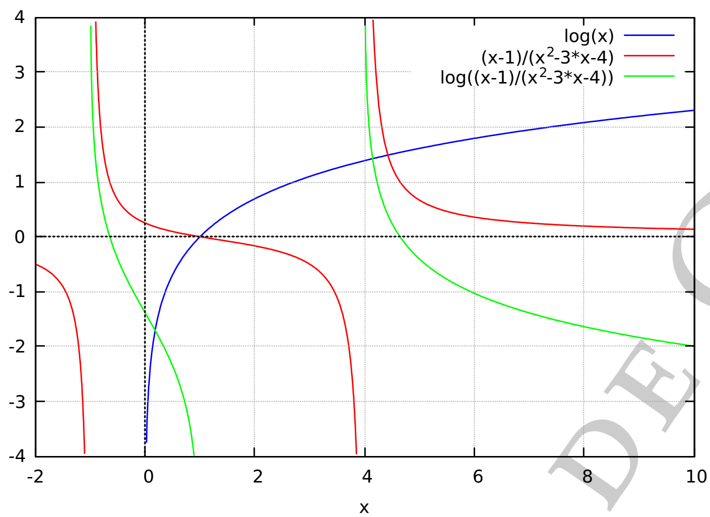

Figura 3: Gráficas de las funciones $f(x) = \log x$ (azul), $g(x) = \frac{x-1}{x^2-3x-4}$ (rojo) y $f \circ g = \log\left(\frac{x-1}{x^2-3x-4}\right)$ (verde).

Sol. Ej. 4. a)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1} = [1^\infty]$$

El límite da lugar a una indeterminación de tipo 1^∞. Por lo tanto, se aplican logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)}$$

Aplicando infinitésimos equivalentes, se tiene que $\log(1+f(x)) \sim f(x)$ cuando $f(x) \to 0$. Por lo tanto:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)} \sim e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

Y finalmente, por comparación del orden de infinitos en numerador y denominador:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)} = e^1 = e$$

b)

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right] = [\infty - \infty]$$

El límite da lugar a una indeterminación de tipo $[\infty - \infty]$. Operando la expresión:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\pi(e^{\pi x}+1) - 2\pi}{4x(e^{\pi x}+1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

La indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ permite aplicar L'Hôpital:

$$\to \text{aplicando L'Hôpital} \to L = \frac{\pi^2 e^{\pi x}}{4(e^{\pi x}+1) + 4\pi x e^{\pi x}} = \frac{\pi^2}{8}$$

Sol. Ej. 5.

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\arctan e^x - \frac{\pi}{2}\right) = \infty \cdot \left(\arctan 0 - \frac{\pi}{2}\right) = \infty \cdot 0$$

Se trata de una indeterminación. Dado que se pide explícitamente utilizar L'Hôpital, se reescribe la función para poder aplicarlo a una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan e^x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow [\text{L'Hôpital}] \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} -\frac{x^2 e^x}{1+e^{2x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Volvemos a aplicar L'Hôpital nuevamente, y se opera la expresión:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-(2xe^x + x^2 e^x)}{2e^{2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\cancel{e^x}(2x+x^2)}{2e^x\cancel{e^x}} = 0$$

El límite es cero, al ser la exponencial un infinito de orden superior a la potencia)

Dado que la función exponencial del denominador es un infinito de orden superior a la potencia del numerador, puede darse ya la solución, que obviamente es cero. Alternativamente, puede aplicarse L'Hôpital dos veces más, quedando:

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-2x-2}{2e^x} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{2e^x} = \frac{-2}{\infty} = 0$$

Sol. Ej. 6. a) El Teorema del Valor Medio (o de Lagrange), dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces $\exists\, c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \quad a \neq b$$

La interpretación geométrica de dicho teorema implica que existe un punto $c \in (a,b)$, cuya recta tangente es paralela a la recta secante que une los puntos a y b.

b) Las hipótesis del Teorema son

- que la función $f(x)$ sea continua en el intervalo $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$
- y que la función $f(x)$ sea derivable en el intervalo $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

Estudiamos la continuidad en $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{(a+1)x}{1-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x}{1+ax} = f(0) = 0$$

La función es continua en $x_0 = 0$ para cualquier valor de a. En cuanto a los extremos del intervalo $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, cabe destacar que la función no estará definida en $x_0 = \frac{1}{2}$ para $a = -2$, por lo que en este caso no se cumplirá la hipótesis de continuidad del Teorema. Por lo tanto, se cumple que $f(x)$ es continua en el intervalo $\left[-1,\frac{1}{2}\right] \quad \forall\, a \in \mathbb{R} - \{-2\}$

En cuanto a la derivabilidad, y asumiendo que $a \neq -2$, se estudian a continuación las derivadas laterales en $x_0 = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x_0\to 0^-} \frac{f(x)-f(x_{0^-})}{x-x_{0^-}} = \lim_{x_0\to 0^-} \frac{\frac{(a+1)x}{1-x}-0}{x-0} = \lim_{x_0\to 0^-} \frac{\cancel{x}(a+1)}{\cancel{x}(1-x)} = a+1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x_0\to 0^+} \frac{f(x)-f(x_{0^+})}{x-x_{0^+}} = \lim_{x_0\to 0^+} \frac{\frac{2x}{1+ax}-0}{x-0} = \lim_{x_0\to 0^+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+ax)} = 2$$

La derivada sólo existirá cuando coincidan las derivadas laterales, es decir

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a+1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

La función es derivable en $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ si $a = 1$, y por lo tanto sólo se cumplen las hipótesis del Teorema del valor medio cuando $a = 1$. Se representa gráficamente esta solución en la Figura 4. Queda por lo tanto la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x} & si \quad x < 0 \\ \frac{2x}{1+x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

para la cual existirá un punto $c \in \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ / $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(-1)}{\frac{1}{2}-(-1)} = \frac{9}{10}$

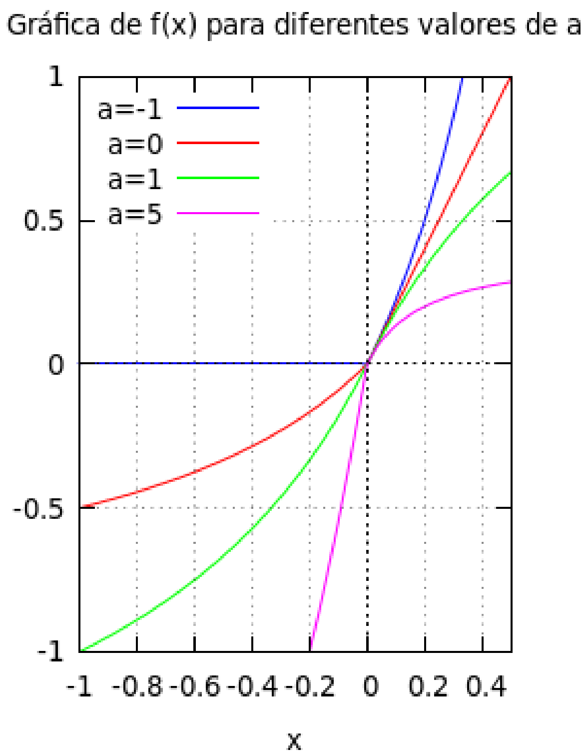

Figura 4: La función $f(x)$ del ejercicio 4 para diferentes valores del parámetro a, representada dentro del intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Como se aprecia, $f(x)$ sólo será derivable en $x_0 = 0$ para $a = 1$.

Sol. Ej. 7. a) Si f es derivable, como indica el enunciado, entonces debe ser necesariamente continua. En este caso, el único punto de posible discontinuidad es $x_0 = 0$, ya que ambos trozos de la función son continuos en sus respectivos subdominios. Por lo tanto, estudiando la continuidad en $x_0 = 0$:

Por la izquierda:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} e^x(x^2 + ax) = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} \frac{bx^2+c}{x+1} = c \end{array}\right\} \Rightarrow c = 0$$

Además, sabiendo que f es derivable, y estudiando el valor de las derivadas laterales en $x_0 = 0$, con $c = 0$, se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \Rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0^-)}{x - 0^-} = \lim_{x \Rightarrow 0^-} \frac{e^x(x^2 + ax)}{x} = -a \\ \displaystyle\lim_{x \Rightarrow 0^+} \frac{\frac{bx^2 + c}{x+1} - c}{x} = \lim_{x \Rightarrow 0^+} \frac{bx^2}{x(x+1)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 0$$

Queda por determinar el valor de b. Para ello, el enunciado dice además que $f'(1) = 3$, por lo que calculando dicha derivada:

$$f'(1) = 3 = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{bx^2}{x+1} - \frac{b}{2}}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2bx^2 - bx - b}{2x^2 - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \text{L'Hopital} \Rightarrow = \lim_{x \to 1} \frac{4bx - b}{4x} = \frac{3b}{4}$$

Por lo tanto $\frac{3b}{4} = 3 \Rightarrow b = 4$.

La gráfica de la función $f(x)$ resultante, considerando los valores de $a = 0$, $b = 4$ y $c = 0$, se representa en la figura 5.

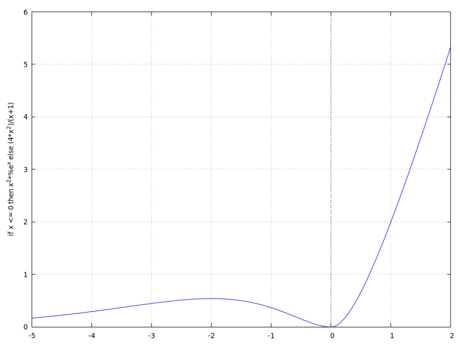

Figura 5: Gráfica de la función $f(x)$ del ejercicio 4 considerando los valores $a = 0$, $b = 4$ y $c = 0$, representada dentro del intervalo $[-5, 2]$. Como se aprecia, $f(x)$ es continua y derivable en $x_0 = 0$.

b) El Teorema del Valor Medio (o de Lagrange), dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces $\exists\, c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La interpretación geométrica de dicho teorema implica que existe un punto $c \in (a, b)$, cuya recta tangente es paralela a la recta secante que une los puntos a y b.

c) Las hipótesis del Teorema son

- que la función $f(x)$ sea continua en el intervalo $[0, 1]$
- y que la función $f(x)$ sea derivable en el intervalo $(0, 1)$

ambas garantizadas por los valores de a,b y c antes calculados.
Por lo tanto,

$$\exists x_0 \in (0,1) \;/\; f'(x_0) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{\frac{4\cdot 1^2}{1+1} - e^0 \cdot 0}{1-0} = 2$$

Por lo tanto, para hallar el valor de x_0, se calcula el valor de la derivada de $f(x)$ en el intervalo $(0,1)$ y se iguala a 2:

$$f(x) = \frac{4x^2}{x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^2+8x}{(x+1)^2} = 2 \Rightarrow 4x^2+8x = 2(x+1)^2 \Rightarrow 2x^2+4x-2 = 0$$

Esta última ecuación tiene dos soluciones:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{4} = -1 \pm \sqrt{2}$$

de las cuales se deshecha la negativa por no encontrarse dentro del intervalo $(0,1)$, y por lo tanto $x_0 = -1+\sqrt{2}$, que es el punto buscado que verifica el Teorema.

Sol. Ej. 8. Se pide estudiar la derivabilidad en el intervalo $(0,\infty)$. Para ello, es condición necesaria (que no suficiente) la *continuidad* de dicha función. Estudiaremos entonces la continuidad de $f(x)$ en $x = 1$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2(x-1)}{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \log\left(\operatorname{sen}^2(x+a)+1\right) = \log\left(\operatorname{sen}^2(1+a)+1\right) = L \end{cases}$$

En consecuencia, la función será continua cuando se verifique que $L = 0$, lo que nos permite deducir el valor de a despejando:

$$\begin{aligned} \log\left(\operatorname{sen}^2(1+a)+1\right) = 0 \quad &\Rightarrow \operatorname{sen}^2(1+a)+1 = 1 \\ &\Rightarrow \operatorname{sen}^2(1+a) = -1 \\ &\Rightarrow \operatorname{sen}(1+a) = 0 \\ &\Rightarrow 1+a = \operatorname{arc\,sen}(0) \\ &\Rightarrow 1+a = 0+k\pi \\ &\Rightarrow a = -1+k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, se concluye que si $a = -1$, entonces $f(x)$ es continua $\forall x \in (0,\infty)$, al cumplirse que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 0$. Se estudia a continuación la derivabilidad, analizando el valor de las

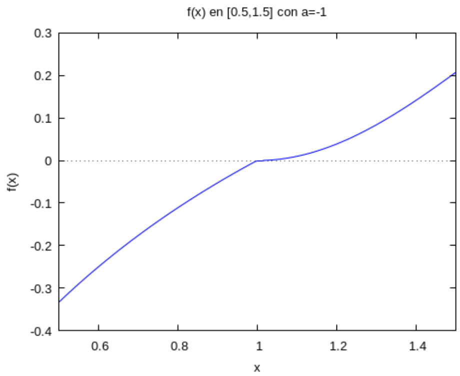

Figura 6: Gráfica de la función. Se observa un punto anguloso en $x = 1$, en el que la función es continua, pero no derivable.

derivadas laterales en el punto $x_0 = 1$. En este ejercicio, lo haremos aplicando la definición de derivada lateral como:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\log\left(\operatorname{sen}^2(x-1)+1\right)-0}{x-1} \sim \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x-1)}{x-1} \Rightarrow [\text{L'Hôpital}] \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+} 2\operatorname{sen}(x-1)\cos(x-1) = 0 \end{cases}$$

$f'(1^-) \neq f(1^+) \Rightarrow \nexists f'(1)$. Las derivadas laterales no coinciden, y por lo tanto $f(x)$ no es derivable en $x = 1$. La gráfica de la función (Fig.6) muestra un punto anguloso en $x = 1$.

Sol. Ej. 9. Se estudia la función en los puntos críticos $x = 0$ y $x = 2$, donde se estudiará qué valores de los parámetros a y b garantizan la continuidad:

- En $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} x^2 + 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{ax+b} = \sqrt{b}$$

Además, sabemos que $f(0) = \sqrt{b}$, por lo tanto, la función será continua cuando coincidan los límites laterales:

$$L^- = L^+ \Leftrightarrow 2 = \sqrt{b} \Leftrightarrow b = 4$$

- En $x_0 = 2$:

  Directamente sustituímos el valor de b anteriormente hallado, necesario para la continuidad de $f(x)$ en 0.

$$\lim_{x\to 2^-} \sqrt{ax+4} = \sqrt{2a+4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{-x}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

  Además, sabemos que $f(2) = \sqrt{ax+4}$, por lo tanto, la función será continua cuando coincidan los límites laterales:

$$L^- = L^2 = f(2) \Leftrightarrow \sqrt{2a+4} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2a+4 = 2 \Leftrightarrow a = -1$$

Por lo tanto, $f(x)$ sera continua $\forall x \in \mathbb{R}$ si $a = -1$ y $b = 4$. Estudiamos ahora la derivabilidad. Para ello, se analiza el valor de las derivadas laterales considerando los valores de a y b previamente calculados, que garantizan la continuidad.

- En $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(x_{0^-})}{x - x_{0^-}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+2-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(x_{0^+})}{x - x_{0^+}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \to \text{L'Hopital} \to$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{-1}{4}$$

  Las derivadas laterales no coinciden, y por lo tanto $f(x)$ no es derivable en $x_0 = 0$

- En $x_0 = 2$

  A modo de ejemplo, en este segundo caso emplearemos la definición alternativa del cociente diferencial. Así, la derivada lateral izquierda se calcula como:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{2-h}-\sqrt{2}}{h} = \left\{\frac{0}{0}\right\} \to \text{L'Hopital} \to$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-1}{2\sqrt{2-h}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

  La derivada lateral derecha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{-2-h}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{2\sqrt{2}h} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

Como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable en $x = 2$

Sol. Ej. 10. a) Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x(1+\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{=1}}{\frac{[(1+\cos x)^2 + sen^2 x]\cancel{(1+\cos x)^2}}{\cancel{(1+\cos x)^2}}} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{1+\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\cos x + 1} = \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} = \frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

b) Dado que el valor de la derivada es constante $\forall x \in Df$, se tiene que $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

c) Del mismo modo, resulta inmediato el cálculo de la diferencial en $x_0 = \frac{-3\pi}{2}$:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \Rightarrow dy = f'(x)dx = \frac{1}{2}dx$$

d) La recta tangente viene dada por la ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

En este caso, se trata de la recta tangente en el punto $(0, f(0)) = (0,0)$, por lo tanto la recta tangente vendrá dada por la ecuación:

$$y = \frac{x}{2}$$

La recta normal, viene dada por la ecuación

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{es decir, } y = -2x$$

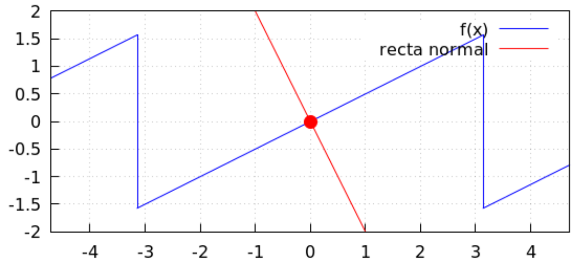

Figura 7: La función $f(x)$ es una función periódica ($T = 2\pi$), siendo inyectiva si se considera el dominio $(-\pi, \pi)$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Aquí se muestra la gráfica de $f(x)$ y la recta normal en el punto $x_0 = 0$. No se representa la recta tangente en $x_0 = 0$, ya que esta coincide con la propia función en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Sol. Ej. 11. a.) Se observa que x no puede ser cero, ya que da lugar a una indefinición en el numerador. Estudiamos los puntos que anulan el denominador:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $Df(x) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b.) Estudiamos la continuidad de la función en los puntos críticos identificados:

En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{-x}{x}}(-x)}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(-1)e^{-1}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{e(x-1)} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e}{x-1} = -e$$

Los límites laterales no coinciden, por lo que no existe el límite en $x = 0$. Dado que ambos límites laterales tienen un valor real finito, se trata de una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e}{x-1} = \infty$$

Los límites laterales son infinitos. La función presenta una discontinuidad asintótica en $x = 1$.

c.) Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y f toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto interior c en el que $f(c) = 0$. Dado que la función no es continua en el intervalo indicado, al ser discontinua en $x = 1$, no es de aplicación el Teorema de Bolzano.

La gráfica de la función se representa en la Figura 8.

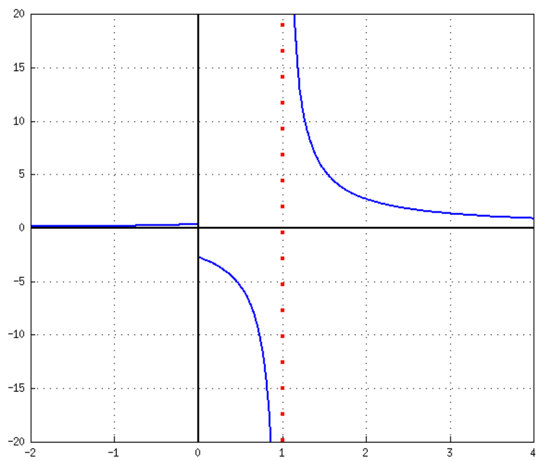

Figura 8: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x}$ en el intervalo $(-2, 4)$. La asíntota vertical en $x = 1$ se indica mediante la línea punteada roja.

Sol. Ej. 12.

Dada la simetría de dicha parábola respecto del eje X (Fig. 9), puede resolverse el problema considerando únicamente una de las ramas de la misma, por ejemplo la positiva, de modo que se tomará la función $f(x) = 2\sqrt{x}$. En este caso, la función objetivo que se desea minimizar es la distancia euclídea desde el punto $P = (3, 0)$ a un punto de la parábola $P_y = (x, y)$, es decir:

$$d(P_y, P) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + 9 - 6x + y^2}$$

Como el punto (x, y) pertenece a $f(x)$, puede escribirse $y = f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 4x$, siendo ésta la restricción que permite escribir la función a minimizar como función de una única variable:

$$y = 2\sqrt{x} \Rightarrow d(x) = \sqrt{x^2 + 9 - 6x + 4x} = \sqrt{x^2 - 2x + 9}$$

A continuación se calcula la derivada, y se iguala a cero para calcular los extremos:

$$d'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 9)^{\frac{-1}{2}} \cdot (2x - 2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 9}} = 0 \Rightarrow x = 1$$

Se obtiene un extremo en x=1, es decir, el punto $P_1 = (1, f(1)) = (1, 2)$ Considerando la rama negativa de la parábola, se tiene la segunda solución $P_2 = (1, -2)$. El criterio de la segunda derivada permite determinar el carácter de los extremos de una función. Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es convexa en un intervalo abierto que contiene a c, siendo $f'(c) = 0$, c debe ser un mínimo relativo a f. Del mismo modo, si la gráfica de una función es cóncava en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0$, c debe ser un máximo relativo de f

Por lo tanto, se calcula la segunda derivada y se evalúa en el punto $x = 1$:

$$d''(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 9} - (x-1)^2(x^2 - 2x + 9)^{\frac{-1}{2}}}{x^2 - 2x + 9} \Rightarrow d''(1) = \frac{\sqrt{8}}{8} > 0$$

El resultado confirma por lo tanto que la solución hallada es un mínimo, siendo por lo tanto los puntos de la parábola $P_1 = (1, 2)$ y $P_2 = (1, -2)$, los más próximos al punto $P(3, 0)$. Queda representada esta solución en la Figura 9.

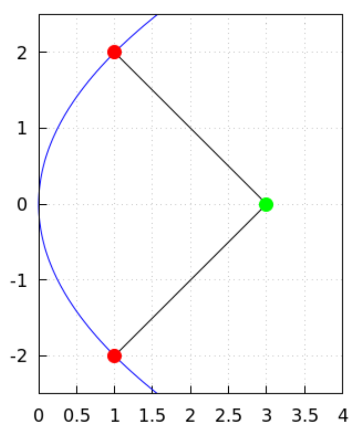

Figura 9: Representación gráfica del problema, donde se indica el punto $P = (3, 0)$ (verde) y los puntos solución (en rojo) pertenecientes a la parábola.

Sol. Ej. 13. Los valores que toma en los extremos del intervalo son:

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - a(-2) + 1 = -1$$
$$f(6) = 6^3 - 3 \cdot 6^2 - 9 \cdot 6 + L = 45$$

Se calcula a continuación su derivada primera, hallándose los posibles puntos estacionarios:

$$f^1(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 3\left[(x-1)^2 - 4\right]$$
$$\Rightarrow x = \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Nótese la completación de cuadrados para la resolución de la ecuación:

$$x^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Que permite escribir:

$$f^1(x) = 3(x+1)(x-3) \Rightarrow \begin{cases} f'(x) > 0 \text{ si } x \in (-2,-1) \rightarrow \text{creciente} \\ f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-1,3) \rightarrow \text{decreciente} \\ f'(x) > 0 \text{ si } x \in (3,6) \rightarrow \text{creciente} \end{cases}$$

Analizando los resultados para cada intervalo:

En un entorno de $x = -1$: por la izquierda la función es creciente, y por su derecha decreciente, existiendo por lo tanto un máximo relativo en este punto. El valor de dicho máximo es:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 9 \cdot (-1) + 1 = 6$$

En un entorno de $x = 3$: por la izquierda la función es decreciente y por la derecha es creciente. La función tiene un mínimo relativo de valor:

$$f(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 1 = -26$$

Por lo tanto, reuniendo todos los puntos identificados, se tiene que:

- El valor máximo absoluto del intervalo lo toma en el punto $x = 6$, por un valor igual a 45
- El valor mínimo absoluto del intervalo lo toma en el punto $x = 3$, por un valor igual a -26

Sol. Ej. 14.

a) **TODO!**

---

b) **TODO!**

c) **TODO!**

d)

$$y' = \frac{-2\sec x\ \sec x\ \tan x}{-2\operatorname{cosec} y \operatorname{cosec} y \cot y} = \frac{\sec^2 x \tan x}{\operatorname{cosec}^2 y \cot y}$$

e) **TODO!**

Sol. Ej. 15.

$$(uv)^{(4)} = \binom{4}{0} u^{(4)} v^{(0)} + \binom{4}{1} u^{(3)} v^{(1)} + \binom{4}{2} u^{(2)} v^{(2)} + \binom{4}{3} u^{(1)} v^{(3)}$$
$$+ \binom{4}{4} u^{(0)} v^{(4)} = u^{(4)} v + 4u''' v' + 6u'' v'' + 4u' v''' + uv^{(4)}.$$

Sol. Ej. 16.

Llamemos $u = \sqrt{x}$ y $v = \log(x+1)$. Entonces,

$u = x^{1/2},\ u(1) = 1$

$u' = \dfrac{1}{2} x^{-1/2},\ u'(1) = \dfrac{1}{2}$

$u'' = -\dfrac{1}{4} x^{-3/2},\ u''(1) = -\dfrac{1}{4}$

$u^{(3} = \dfrac{3}{8} x^{-5/2},\ u^{(3}(1) = \dfrac{3}{8}$

$u^{(4} = -\dfrac{15}{16} x^{-7/2},\ u^{(4}(1) = -\dfrac{15}{16}$

$v = \log(x+1),\ v(1) = \log 2$

$v' = (x+1)^{-1},\ v'(1) = \dfrac{1}{2}$

$v'' = -(x+1)^{-2},\ v''(1) = -\dfrac{1}{4}$

$v^{(3} = 2(x+1)^{-3},\ v^{(3}(1) = \dfrac{1}{4}$

$v^{(4} = -6(x+1)^{-4},\ v^{(4}(1) = -\dfrac{3}{8}$

Se aplica a continuación la fórmula de Leibniz:

$$
\begin{aligned}
f^{(4)}(1) &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}u^{(4-k)}(1)v^{(k)}(1)\\
&= -\frac{15}{16}\log 2 + 4\frac{3}{8}\frac{1}{2} + 6\frac{-1}{4}\frac{-1}{4} + 4\frac{1}{2}\frac{1}{4} - \frac{3}{8}\\
&= -\frac{15}{16}\log 2 + \frac{12}{16} + \frac{6}{16} + \frac{8}{16} - \frac{6}{16}\\
&= \frac{20-15\log 2}{16} = \frac{5}{4} - \frac{15}{16}\log 2
\end{aligned}
$$

Sol. Ej. 17.

Llamando $u(x) = e^{\alpha x}$ y $v(x) = x^2$, se obtiene:

$$
\begin{cases}
u^{(0)}(x) = e^{\alpha x}\\
u^{(1)}(x) = \alpha e^{\alpha x}\\
u^{(2)}(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}\\
u^{(3)}(x) = \alpha^3 e^{\alpha x}\\
\dots\\
u^{(n)}(x) = \alpha^n e^{\alpha x}
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
v^{(0)}(x) = x^2\\
v^{(1)}(x) = 2x\\
v^{(2)}(x) = 2\\
v^{(3)}(x) = 0\\
\dots\\
v^{(n)}(x) = 0
\end{cases}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n}(x) &= \binom{n}{0}\alpha^n e^{\alpha x}x^2 + \binom{n}{1}\alpha^{n-1}e^{\alpha x}\cdot 2x + \binom{n}{2}\alpha^{n-2}e^{\alpha x}\cdot 2\\
&= \alpha^n e^{\alpha x}x^2 + 2n\alpha^{n-1}e^{\alpha x}x + n(n-2)\alpha^{n-2}e^{\alpha x}\\
&= \alpha^{n-2}e^{\alpha x}(\alpha^2x^2 + 2n\alpha x + n^2 - 2n)
\end{aligned}
$$

Sol. Ej. 18.

Llámense $u = e^x$ y $v = \operatorname{sen} x$.

Entonces,

$$
\begin{array}{ll}
u = e^x,\ u(\pi/2) = e^{\pi/2} & v = \operatorname{sen} x,\ v(\pi/2) = 1\\
u' = e^x,\ u'(\pi/2) = e^{\pi/2} & v' = \cos x,\ v'(\pi/2) = 0\\
u'' = e^x,\ u''(\pi/2) = e^{\pi/2} & v'' = -senx,\ v''(\pi/2) = -1\\
u^{(3} = e^x,\ u^{(3}(\pi/2) = e^{\pi/2} & v^{(3} = -\cos x,\ v^{(3}(\pi/2) = 0\\
u^{(4} = e^x,\ u^{(4}(\pi/2) = e^{\pi/2} & v^{(4} = \operatorname{sen} x,\ v^{(4}(\pi/2) = 1
\end{array}
$$

Usando la fórmula de Leibniz:

$$f^{(4}(\pi/2) = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} u^{(4-k)}(\pi/2) v^{(k}(\pi/2)$$

$$= e^{\pi/2} + 0 + 6e^{\pi/2}(-1) + 0 + e^{\pi/2} = -4e^{\pi/2}.$$

Sol. Ej. 19.

Llamando $u = e^x$ y $v = x$, se obtiene:

$$\begin{cases} u^{(0} = e^x \\ u^{(1} = e^x \\ u^{(2} = e^x \\ u^{(3} = e^x \\ \quad \dots \\ u^{(n} = e^x \end{cases} \qquad \begin{cases} v^{(0} = x \\ v^{(1} = 1 \\ v^{(2} = 0 \\ v^{(3} = 0 \\ \quad \dots \\ v^{(n} = 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$y^{(n)} = (uv)^{(n)} = \binom{n}{0} e^x x + \binom{n}{1} e^x \cdot 1 = xe^x + ne^x = (x+n)e^x.$$

Sol. Ej. 20.

a) El desarrollo de MacLaurin se realiza sobre el punto de centrado $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{lll}
f(x) & = \log(1+x) & \Rightarrow f(0) = 0 \\
f'(x) & = (1+x)^{-1} & \Rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) & = (-1)(1+x)^{-2} & \Rightarrow f''(0) = -1 \\
f^{(3}(x) & = (-1)(-2)(1+x)^{-3} & \Rightarrow f^{(3}(0) = 2 \\
f^{(4}(x) & = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} & \Rightarrow f^{(4}(0) = -6 \\
f^{(5}(x) & = (-1)(-2)(-3)(-4)(1+x)^{-5} & \Rightarrow f^{(5}(0) = 24 \\
\dots & & \\
f^{(n}(x) & = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} & \Rightarrow f^{(n}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!
\end{array}$$

A continuación, en aplicación de la fórmula de Taylor, se obtiene:

$$f(x) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + R_5(x) = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

b) Considerando la aproximación del polinomio de orden 4:

$$P_4(0.4) = 0.4 - \frac{(0.4)^2}{2} + \frac{(0.4)^3}{3} - \frac{(0.4)^4}{4} + R_4(0.4)$$

Considerando la fórmula del resto de Lagrange, se tiene que:

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1}(\alpha)|}{(n+1)!}|(x-x_0)|^{n+1} \Rightarrow R_4(0.4) = \frac{(-1)^{5-1}(5-1)!(1+\alpha)^{-5}}{5!}(0.4-0)^5 = \frac{0.4^5}{5(1+\alpha)^5}$$

La decisión que debe tomarse es entonces qué valor de α considerar en la estimación. Es ente caso, si se analiza la expresión de R_n anterior, resulta fácil ver que el resto adopta su máximo valor en el entorno de 0, y el mínimo en el entorno de 0.4, ya que α se encuentra sumando en el denominador, como se ilustra en la figura 10

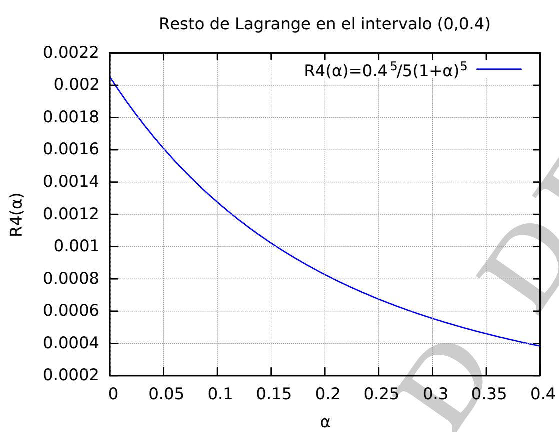

Figura 10: Representación gráfica del error en el intervalo $(0, 0.4)$.

Por lo tanto, se adopta el valor $\alpha = 0$, que dará el intervalo de error dentro del cual se encontrará el valor exacto de $f(0.4)$:

$$R_4 = \frac{0.4^5}{5} \approx 0.002 \Rightarrow |R_4| < 0.002 \Rightarrow P_4(0.4) - 0.002 < f(0.4) < P_4(0.4) + 0.002$$

Sol. Ej. 21. a)

$Df = \mathbb{R} - \{-2\}$, por lo que hay una asíntota vertical en $x = -2$

Las asíntotas horizontales se calculan considerando los límites de la función en el infinito. La función no tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2} = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$$

Se calcula la posible existencia de asíntotas oblicuas conforme a la ecuación de la recta $y = ax + b$, donde:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

Por lo tanto, existe una asíntota ablicua, de ecuación $y = x - 2$.

b)

Para determinar los extremos relativos, se calculan los puntos críticos a partir de la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada se determina si éstos son mínimos o máximos:

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(0) > 0 \to \text{Mínimo relativo en } x_0 = 0 \\ f''(-4) < 0 \to \text{Máximo relativo en } x_0 = -4 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la formula de Taylor hasta grado 3, se calculan las derivadas hasta orden 3 y se evalúan en los extremos relativos. Obviamente, al tratarse de extremos relativos, las primeras derivadas son cero.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} \to \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-4) = -8 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} \to \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(-4) = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3} \to \begin{cases} f''(0) = 1 \\ f''(-4) = -1 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{(x+2)^4} \to \begin{cases} f'''(0) = \frac{-3}{2} \\ f'''(-4) = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, para el punto de centrado $x_0 = 0$ (polinomio de McLaurin), se obtiene:

$$P_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}$$

Para $x_0 = -4$ se obtiene el siguiente polinomio de Taylor:

$$P_3(x) = -8 - \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{(x+4)^3}{4}$$

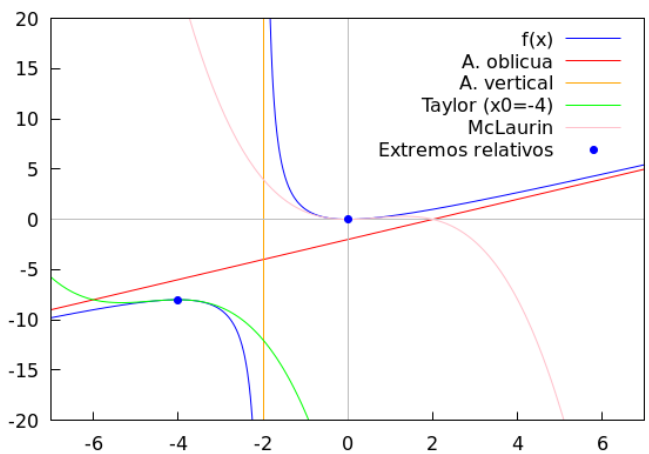

Figura 11: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, asíntotas, extremos relativos y polinomios de Taylor centrados en $x_0 = -4$ y $x_0 = 0$.

c) Se considera la expresión del resto de Lagrange:

$$Rn(x) = \frac{f^{(n+1}(\alpha)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

donde $n = 3$, el punto de estimación $x = 0.25$, el punto de centrado $x_0 = 0$ y α es un punto intermedio tal que $0 < \alpha < 0.25$:

$$f^{(4}(\alpha) = (-24)(-4)(\alpha+2)^{-5} = \frac{96}{(\alpha+2)^5}$$

Por lo tanto, la expresión del resto queda como:

$$R_3(0.25) = \frac{\frac{96}{(\alpha+2)^5}}{4!}0.25^4 = \frac{4 \cdot 0.25^4}{(\alpha+2)^5}$$

Como se deduce a partir de la expresión anterior, el error es máximo para $\alpha = 0$, y mínimo para $\alpha = 0.25$. Para acotar el error, tomaremos por tanto $\alpha = 0$, por lo que:

$$R_3(0.25) = \frac{0.25^4}{8} \approx 0.00049$$

Puede afirmarse que el error de la estimación será menor que el valor hallado, es decir,

$$|P_3(0.25) - f(0.25)| < 0.00049$$

Sol. Ej. 22. a)

Se calculan las derivadas sucesivas hasta orden 4, evaluadas en el punto de centrado $x_0 = 0$

$$\begin{array}{lcl} f(x) = x - e^{2x} & \Rightarrow & f(0) = -1 \\ f'(x) = 1 - 2e^{2x} & \Rightarrow & f'(0) = -1 \\ f''(x) = -4e^{2x} & \Rightarrow & f''(0) = -4 \\ f^{(3}(x) = -8e^{2x} & \Rightarrow & f^{(3}(0) = -8 \\ f^{(4}(x) = -16e^{2x} & \Rightarrow & f^{(3}(0) = -16 \end{array}$$

Se toma a continuación la fórmula de Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f^{(3}(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

considerando el punto de centrado $x_0 = 0$, de tal modo que el polinomio resultante es:

$$P_4(x) = -1 - x - \frac{4x^2}{2!} - 8\frac{x^3}{3!} - 16\frac{x^4}{4!} = -1 - x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} - \frac{2x^4}{3}$$

b)

Una vez conocido el polinomio de MacLaurin que aproxima a la función en el origen, es posible acotar el error de la estimación mediante la fórmula del resto de Lagrange. En este caso, el valor de la función en 0.2 vendrá dado por $y = 0.2 - e^{0.4}$, siendo el punto de estimación $x = 0.2$. El resto de Lagrange viene dado por la fórmula:

$$R_n = \frac{|f^{(n+1}(\xi)(x - x_0)^{n+1}|}{(n+1)!}, \quad \text{con } \xi \text{ entre el punto de estimación y el de centrado}$$

Es necesario hallar la expresión de la derivada 5-ésima:

$$f^{(5}(x) = -32e^{2x}$$

Analizando en detalle la expresión del resto, resulta fácil ver que el error cometido, en términos absolutos, será mayor para valores mayores del parámetro ξ, dado que la función exponencial es monótona estrictamente creciente. Por lo tanto, dado el intervalo $0 < \xi < 0.2$, tomaremos el valor $\xi = 0.2$ para calcular el resto:

$$R(\xi) = \frac{|f^{(5}(\xi)(0.2)^5|}{5!} \Rightarrow R(0.2) = \frac{|-32e^{2\cdot 0.2}\cdot(0.2-0)^5|}{5!} = \frac{4\cdot e^{0.4}\cdot 0.2^5}{15} \approx 1.27\cdot 10^{-4}$$

Finalmente, puede afirmarse que:

$$f(0.2) = P_4(0.2) \pm 1.27\cdot 10^{-4}$$

A juzgar por el valor de la deriva quinta (negativo), y considerando la gráfica de las aproximaciones de MacLaurin al punto (Fig. 12), se observa que en la aproximación en $x = 0.2$ se comete un error por exceso.

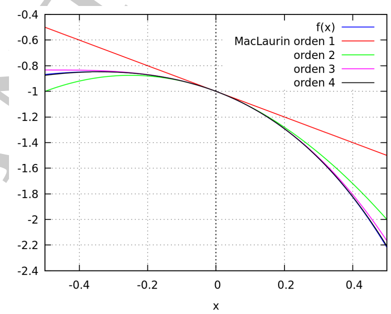

Figura 12: Gráficas de la función $f(x) = x - e^{2x}$ (azul), y las aproximaciones mediante el polinomio de MacLaurin de órdenes desde 1 hasta 4, en el intervalo $[-0.5, 0.5]$.