Hoja de Ejercicios 5 - Cálculo Integral en una variable

Ejercicio 1. *Evaluar la siguientes integrales indefinidas*

a)
$$\int (x-1)(x+4)^7\,dx$$

b)
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8}dx$$

c)
$$\int \frac{e^a \cdot e^{\tan x}}{4\cos^2 x}dx$$

d)
$$\int \frac{1}{b}x^2 4^{\operatorname{sen}(x^3)}\cos(x^3)dx, \quad b = cte.$$

e)
$$\int \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{5\operatorname{sen}^2(x)}dx$$

f)
$$\int \arctan x dx$$

g)
$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx$$

h)
$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$$

i)
$$\int \frac{4x}{x^2+3x+2}dx$$

j)
$$\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$$

k)
$$\int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x - 1}dx$$

l)
$$\int \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x}dx$$

m)
$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}dx$$

n)
$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x}$$

ñ)
$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$$

o)
$$\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{\cos^3 x + 2\cos x \operatorname{sen}^2 x}$$

Ejercicio 2. *Determinar el carácter de la siguiente integral impropia de primera especie en función de los valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:*

$$I = \int_a^\infty \frac{1}{x^\lambda}dx \quad , \quad a > 0$$

Ejercicio 3. *Determinar el carácter de la integral impropia:*

$$I = \int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(x^2+1)^{5/2}}$$

Ejercicio 4. *Calcula el valor de la siguiente integral definida:*

$$\int_0^1 \log(x)dx$$

Ejercicio 5. *Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$, calcula el área encerrada entre su gráfica y el eje X entre los puntos $x = 1$ y $x = 2$.*

Ejercicio 6. *Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$, calcula el área encerrada entre su gráfica y el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.*

Ejercicio 7. *Calcular el área comprendida entre la cardioide de ecuación* $\rho = a\,(1 + \cos(\theta))$, *con* $a > 0$, *y el eje* Y, *considerando la parte positiva del eje* X.

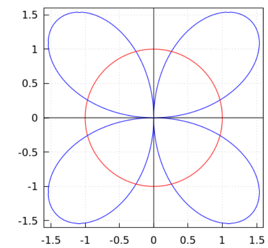
Ejercicio 8. *Determinar el área encerrada por la lemniscata de ecuación*

$$\begin{cases} x = 2\cos\phi \\ y = \operatorname{sen} 2\phi \end{cases}$$

Ejercicio 9. *Dada la cardioide de ecuación* $\rho = 1 + \cos\theta$, *hallar la longitud del arco de cardiodide externo a la circunferencia centrada en el origen y de radio* $\frac{3}{2}$.

Ejercicio 10. *Hallar la longitud de la espiral* $\rho(\theta) = e^{2\theta}$ *desde* $\theta = 0$ *a* $\theta = 2\pi$

Ejercicio 11. *Hallar el área de la región* $\mathcal{R}$ *que está encerrada por la curva* $\rho = 2\operatorname{sen} 2\theta$ *y fuera de la curva* $\rho = 1$ *en el primer cuadrante, mostrada en la Figura de la derecha.*



Ejercicio 12. *Calcular el área interior a la cardiodide* $\rho = 2(1 + \cos\theta)$ *y exterior a la circunferencia* $\rho = 2$.

Ejercicio 13. *Hallar el volumen del sólido generado por la región acotada entre las gráficas de la parábola* $y = x^2 + 1$ *y la recta* $y = x + 3$ *al girar alrededor del eje* X.

Ejercicio 14. *Dada la región limitada por las gráficas de* $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ *y* $x = 4$:

a.) *Obtener, aplicando el método de los discos, el volumen de revolución engendrado al girar dicha región alrededor del eje OX*

b.) *Obtener, aplicando el método de capas, el volumen de revolución engendrado al girar dicha región en torno al eje OY*

Ejercicio 15. *Encuentra el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje* X *la región delimitada por las curvas* $f(x) = x^2$ *y* $g(x) = x^3$ *y las rectas* $x = 0$ *y* $x = 1$

Ejercicio 16. *Calcular el volumen de revolución del sólido generado al girar la región acotada por las gráficas de* $y = x^2 + 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$ *alrrededor del eje* Y

Sol. Ej. 1.

a) Integral semi-inmediata, con una breve manipulación del integrando:

$$\int (x-1)(x+4)^7\,dx = \int ((x+4)-5)(x+4)^7\,dx = \int \left((x+4)(x+4)^7 - s\,(x+4)^7\right)dx$$
$$= \int \left((x+4)^8 - 5\,(x+4)^7\right)dx = \int (x+4)^8\,dx - 5\int (x+y)^7\,dx$$
$$= \frac{(x+4)^9}{9} - 5\frac{(x+4)^8}{8} + C$$

b) Se trata de una integral inmediata, dado que se reconoce el numerador como derivada del denominador:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8}dx = -\log(\cos x + 8) + C$$

c) Se trata de una integral de la forma $\int e^u du$, siendo $u = \tan x$ y $du = \frac{1}{cos^2 x}dx$. Por lo tanto, es inmediata:

$$\int \frac{e^a \cdot e^{\tan x}}{4\cos^2 x}dx = \frac{e^a}{4}\int e^{\tan x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{e^a}{4}e^{\tan x} + C = \frac{e^{a+\tan x}}{4} + C$$

d)
$$I = \int \frac{1}{b}x^2 4^{\operatorname{sen}(x^3)}\cos(x^3)dx = \frac{1}{b}\int x^2 4^{\operatorname{sen}(x^3)}\cos(x^3)dx$$

Tomando $u = \operatorname{sen}(x^3)$, y por tanto $du = \cos(x^3)3x^2dx$, vemos que es una integral inmediata del tipo $\int a^u du$, por lo que:

$$I = \frac{1}{3b}\int \underbrace{4^{\operatorname{sen}(x^3)}}_{4^u}\underbrace{\cos(x^3)3x^2dx}_{du} = \frac{4^{\operatorname{sen}(x^3)}}{3b\log(4)} + C$$

e) Teniendo en cuenta la fórmula del seno del ángulo doble, resulta inmediato identificar una integral logarítmica de la forma $\int \frac{du}{u}$:

$$\int \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{5\operatorname{sen}^2(x)}dx = \frac{3}{5}\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \frac{3}{5}\log(\operatorname{sen}^2 x) + C = \frac{6}{5}\log|\operatorname{sen} x| + C$$

f) La integral se resuelve mediante integración por partes:

$$I = \int \arctan x dx \to \begin{cases} dv = dx \Leftrightarrow x = v \\ u = \arctan x \Leftrightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \end{cases}$$
$$\Rightarrow I = x\arctan x - \int \frac{xdx}{1+x^2} = \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2} =$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left|1+x^2\right| + C$$

g) Se resuelve por partes:

$$
\begin{aligned}
I = \int x^2 \sin x dx &\rightarrow \begin{cases} u = x^2 \Leftrightarrow du = 2x dx \\ \sin x dx = dv \Leftrightarrow v = -\cos x \end{cases} \\
= -x^2 \cos x - \int -\cos 2x dx &= -x^2 \cos x + \underbrace{\int 2x \cos x dx}_{A} + C
\end{aligned}
$$

A continuación, volvemos a aplicar integración por partes para resolver la integral A:

$$
\begin{aligned}
A = \int 2x \cos x dx &\rightarrow \begin{cases} u = 2x \Leftrightarrow du = 2dx \\ cos x dx = dv \Leftrightarrow v = \operatorname{sen} x dx \end{cases} \\
= 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x dx &= 2x \operatorname{sen} x - 2 \int \operatorname{sen} x dx \\
&= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C_1
\end{aligned}
$$

Reuniendo soluciones, se llega al resultado:

$$
\begin{aligned}
I &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C \\
&= 2x \operatorname{sen} x + (2 - x^2) \cos x + C
\end{aligned}
$$

h) La resolveremos descomponiendo el integrando de manera conveniente. La primera integral es un logaritmo, la segunda es una arcotangente, como queda de manifiesto tras completar cuadrados:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx + \int \frac{3}{x^2+2x+5} dx = \\
&= \log(x^2+2x+5) + 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \log(x^2+2x+5) + \frac{3}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C
\end{aligned}
$$

i) Similar a la anterior, la integral racional puede resolverse de manera semi-inmediata descomponiendo el integrando para lograr una primitiva logarítmica y, mediante completación de cuadrados, un arco-tangente:

Completación de cuadrados:

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b}{2} + c$$

Nótese el cambio de signo de la última integral para obtener la forma $\int \frac{du}{a^2-u^2}$ correspondiente a la arcotangente hiperbólica

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{4x}{x^2+3x+2}dx &= 2\int \frac{2x+3-3}{x^2+3x+2}dx = \\
2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx &- 2\int \frac{3dx}{x^2+3x+2} = \\
&= 2\log\left|x^2+3x+2\right| - 2\int \frac{3dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \\
&= 2\log\left|x^2+3x+2\right| + 2\int \frac{3dx}{\frac{1}{4}-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2} = \\
&= 2\log\left|x^2+3x+2\right| + 2\text{argtanh}(2x+3)+C
\end{aligned}
$$

La primitiva también puede presentarse en su forma logarítmica:

$$I = 2\log\left|x^2+3x+2\right| + 2\frac{\log|\frac{1}{2}+x+\frac{3}{2}|}{\log|\frac{1}{2}-x-\frac{3}{2}|}+C$$

j) La descomposición en fracciones simples da lugar a dos factores cuadráticos (distintos), ya que las expresiones cuadráticas del denominador no tienen raíces reales:

$$I = \int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x^2+1)} = \int \left(\frac{Ax+B}{(x^2+x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\right)dx$$

Se descompone la función subintegral en dichas fracciones, quedando:

$$\Rightarrow (Ax+B)(x^2+1)+(x^2+x+1)(Cx+D) = 1 \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=-1 \\ D=0 \end{cases}$$

Por lo tanto, se reescribe I como:

$$
\begin{aligned}
I = \int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \\
&= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx
\end{aligned}
$$

Puede reescribirse la ecuación x^2+x+1 como cuadrado perfecto, de la forma $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, siendo inmediata la solución:

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\log|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\log|x^2+1|+C$$

Es posible reescribir el resultado aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \log \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + C$$

k) Se trata de una integral del tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Por no verificarse ninguna de las paridades estudiadas, se puede aplicar el cambio de variable $\tan \frac{x}{2} = t$, y proceder a su resolución. Sin embargo, otra opción que simplifica notablemente los cálculos implica una primera manipulación sencilla de la función subintegral, de modo que se escribirá:

$$J = \int \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x - 1} = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x - 1} + \int \frac{1}{\cos x - 1} = -\log|\cos x - 1| + \int \frac{1}{\cos x - 1}$$

Se resuelve ahora la segunda integral (llamémosla K),

$$\text{Cambio de variable: } \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Por consiguiente:

$$K = \int \frac{1}{\cos x - 1} = \int \frac{2}{\frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \frac{1}{2\tan x} + C$$

Y reuniendo soluciones, se tiene que:

$$J = \frac{1}{2\tan x} - \log|\cos x - 1| + C$$

l) Se trata de una integral racional, siendo el grado del polinomio del numerador menor que el del denominador. Se procede a la descomposición en fracciones simples de la función subintegral para su resolución.

$$J = \int \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x} dx = \int \frac{x^2+3x-4}{x(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \right) dx$$

Operando, se obtiene:

$$\begin{aligned} x^2+3x-4 &= A(x-2)^2 + Bx(x-2) + Cx \\ &= Ax^2 + 4A - 4Ax + Bx^2 - 2Bx + Cx \quad \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo que se descompone la integral en tres integrales inmediatas:

$$\Rightarrow J = \int \frac{-dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2} = -\log|x| + 2\log|x-2| - \frac{3}{x-2} + C$$

Puede reescribirse la solución aplicando las propiedades de los logaritmos como:

$$J = \log \frac{(x-2)^2}{|x|} - \frac{3}{x-2} + C$$

m) Se trata de una integral racional trigonométrica. El análisis de la función subintegral indica que ésta es impar en coseno, verificándose que:

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} = -\frac{\operatorname{sen}^3 x}{-\cos x} \Rightarrow R(\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, -\cos x)$$

Por lo tanto, se utilizará el cambio de variable $\operatorname{sen} x = t$, y por lo tanto:

$$\cos x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Aplicando el cambio de variable, se obtiene

$$I = \int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^3}{1-t^2} dt$$

que es una integral racional, siendo el grado del numerador mayor que el del denominador, lo que obliga a efectuar la división de ambos polinomios, obteniéndose :

$$\int \frac{p(t)}{q(t)} dt = \int c(t) dt + \int \frac{r(t)}{q(t)} dt = \int -t dt + \int \frac{t}{1-t^2} dt$$

Ambas integrales resultan inmediatas:

$$I = -\int t dt - \frac{1}{2}\int \frac{2t dt}{t^2-1} = -\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\log|t^2-1|$$

$$\Rightarrow \text{deshaciendo el cambio } \Rightarrow I = -\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}^2 x + \log|\operatorname{sen}^2 x - 1|\right) + C$$

n) La integral se resuelve fácilmente con el cambio de variable $t = \operatorname{sen} x$. Alternativamente, podría probarse el cambio de variable "universal" $t = \tan \frac{x}{2}$.

$$t = \operatorname{sen} x \Rightarrow \cos x dx = dt$$

Por otra parte:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x = 1 - t^2$$

Por lo tanto:

$$I = \int \frac{dt}{-t^2 - 2t + 1} \to \text{Completando cuadrados} \to \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} = -\int \frac{dt}{2 - (t+1)^2}$$

Esta integral ya es inmediata, respondiendo a la forma $\int \frac{du}{a^2 - u^2}$ (argumento tangente hiperbólica), siendo $u = t + 1$ y $a = \sqrt{2}$. Alternativamente, puede plantearse como una integral racional llegando a su forma logarítmica equivalente. Por lo tanto:

$$I = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{argtanh}\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right) + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2} + t + 1}{\sqrt{2} - t - 1} \right| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$I = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \left| \frac{\sqrt{2} + \operatorname{sen} x + 1}{\sqrt{2} - \operatorname{sen} x - 1} \right| + C$$

ñ) La función no es impar en coseno. Se aplica el cambio de variable "universal" para las funciones racionales trigonométricas, $\tan \frac{x}{2} = t$:

$$J = \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx \to \begin{cases} \tan \dfrac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \to$$

$$J = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2} - \int dt = 2 \arctan t - t$$

$$= 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) - \tan \frac{x}{2} = 2\frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = x - \tan \frac{x}{2} + C$$

o) La integral se resuelve con el cambio de variable $t = \cos x$. Alternativamente, podría probarse el cambio de variable "universal" $t = \tan \frac{x}{2}$.

$$t = \cos x \Rightarrow -\operatorname{sen} x dx = dt$$

Por otra parte:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

Por lo tanto:

$$I = \int \frac{-dt}{t^3 + 2t(1-t^2)} = -\int \frac{dt}{2t - t^3} = \int \frac{dt}{t(t^2-2)} = \int \frac{dt}{t(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})}$$

Con lo que llegamos a una integral racional con tres factores lineales únicos, de modo que se aplica la descomposicion en fracciones simples como sigue:

$$\frac{1}{t(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} + \frac{C}{t-\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 & \to A = \frac{-1}{2} \\ t = \sqrt{2} & \to B = \frac{1}{4} \\ t = -\sqrt{2} & \to C = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Llegando a la nueva integral que es inmediata por descomposición del integrando:

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t-\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+\sqrt{2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4}\log|t-\sqrt{2}| + \frac{1}{4}\log|t+\sqrt{2}| = -\frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4}\log|(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})| =$$
$$= -\frac{1}{2}\log|t| + \frac{1}{4}\log|t^2-2| + C$$

Deshaciendo el cambio de variable, se llega finalmente a la primitiva:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\log|\cos x| + \frac{1}{4}\log|\cos^2 x - 2| + C$$

Sol. Ej. 2. Se trata de una integral impropia de primera especie, ya que el límite superior del intervalo de integración es ∞. No hay ningún otro punto singular, ya que el enunciado indica que $a > 0$, por lo que no se anula el denominador.

$$I = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx = I = \int_a^{\infty} x^{-\lambda} dx = \lim_{H\to\infty} \left(\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) \Big]_a^H = \lim_{H\to\infty} \left(\frac{H^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right)$$

$$= \frac{1}{1-\lambda} \lim_{H\to\infty} \left(H^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda \leq 1 \Rightarrow I = \infty \quad \text{(Divergente)} \\ \text{Si } \lambda > 1 \Rightarrow I = \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} \in \mathbb{R}^+ \quad \text{(Convergente)} \end{cases}$$

Nótese que en el caso particular $\lambda = 1$ se tiene una integral de tipo logaritmo:

$$I = \int_a^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{H\to\infty} (\log(H) - \log(a)) = \infty$$

Por lo tanto, la integral sólo será convergente para valores de λ estrictamente mayores de 1, siendo en cualquier otro caso divergente.

Sol. Ej. 3. Se trata de una integral impropia de primera especie. Por lo tanto:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}} = \lim_{p\to-\infty} \int_p^0 \frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}} = \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{2} \int_p^0 \frac{2xdx}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{2} \int_p^0 \underbrace{(x^2+1)^{\frac{-5}{2}}}_{u^n} \cdot \underbrace{2xdx}_{du} = \lim_{p\to-\infty} \frac{-1}{3(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \Bigg]_p^0$$

$$= \lim_{p\to-\infty} \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{-1}{3}$$

Por lo tanto, se trata de una integral impropia de carácter *convergente*.

Sol. Ej. 4. Se trata de una integral impropia de segunda especie, ya que $Df = (0, \infty)$. Por tanto, la función subintegral no está definida en $x_0 = 0$. La función $\log(x)$ se calcula mediante integración por partes. Calcularemos primero la integral indefinida:

$$\left. \begin{array}{l} dv = dx \Rightarrow v = x \\ u = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right\} \Rightarrow J = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x(\log(x) - 1) + C$$

Aplicando la Regla de Barrow y considerando el límite por la derecha en 0:

$$J = 1 \cdot (\log(1) - 1) - \underbrace{\lim_{p \to 0^+} p(\log(p) - 1)}_{=0} = -1$$

Por lo tanto, se trata de una integral impropia convergente.

Sol. Ej. 5. Para calcular el área pedida hay que resolver la integral, aplicando la regla de Barrow. Se calculará en un primer paso la integral indefinida, que es una integral racional. Cabe destacar que la función es positiva en el intervalo pedido, como se muestra en la figura 1. Analizando el denominador se encuentra que la única raiz real es $x = -1$, y por lo tanto la factorización del mismo queda como $(x+1)(x^2 - 4x + 5)$, ya que la expresión cuadrática resultante no tiene raíces reales.

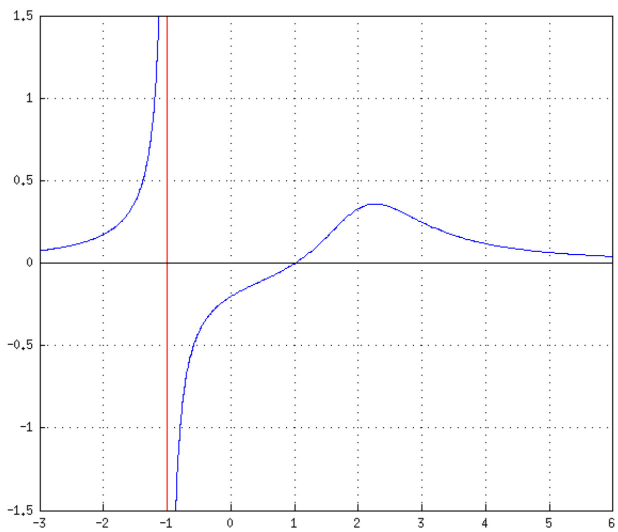


Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}$. Se muestra la asíntota vertical en rojo. El área pedida es la encerrada por la curva y el eje OX desde $x = 1$ hasta $x = 2$

Resolución de la integral indefinida:

Por lo tanto, la descomposición en fracciones simples es de la forma siguiente, correspondiente a un factor lineal y un factor cuadrático:

$$\frac{x-1}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 4x + 5} \Rightarrow x - 1 = A(x^2 - 4x + 5) + (Bx + C)(x + 1)$$

Resolviendo el sistema resultante se obtiene que $A = -\frac{1}{5}$, $B = \frac{1}{5}$ y $C = 0$. Por lo tanto, puede escribirse la integral como:

$$\int \frac{x-1}{x^3 - 3x^2 + x + 5} = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{5} \int \frac{x}{x^2 - 4x + 5} dx$$

La primera integral es inmediata:

$$-\frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}dx = -\frac{1}{5}\log|x+1| + C$$

Nos centraremos a continuación en la segunda (nótese la completación de cuadrados en la segunda integral):

$$\frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2-4x+5}dx = \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+5}dx = \frac{1}{10}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \frac{2}{5}\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx =$$
$$= \frac{1}{10}\log|x^2-4x+5| + \frac{2}{5}\int \frac{1}{1+(x-2)^2}dx = \frac{1}{10}\log|x^2-4x+5| + \frac{2}{5}\arctan(x-2) + C$$

Por lo tanto, reuniendo soluciones parciales, se obtiene la primitiva I:

$$I = -\frac{1}{5}\log|x+1| + \frac{1}{10}\log|x^2-4x+5| + \frac{2}{5}\arctan(x-2) + C$$

El área pedida viene dada por la siguiente integral de Riemann:

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}dx$$

Sol. Ej. 6. Para calcular el área pedida hay que resolver la integral, aplicando la regla de Barrow. Se calculará en un primer paso la integral indefinida, que es una integral racional. Cabe destacar que la función es positiva en el intervalo pedido, como se muestra en la figura 2 al final del ejercicio. Analizando el denominador se encuentra que la única raiz real es $x = -1$, y por lo tanto la factorización del mismo queda como $(x+1)(x^2-x+1)$, ya que la expresión cuadrática resultante no tiene raíces reales.

Resolución de la integral indefinida:

Por lo tanto, la descomposición en fracciones simples es de la forma siguiente, correspondiente a un factor lineal y un factor cuadrático:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

Resolviendo el sistema resultante se obtiene que $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{-1}{3}$ y $C = \frac{2}{3}$. Por lo tanto, puede escribirse la integral como:

$$\int \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx$$

La primera integral es inmediata:

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{3}\log|x+1| + C$$

Nos centraremos a continuación en la segunda (nótese la completación de cuadrados para obtener la función primitiva arco tangente):

$$\int \frac{\frac{-1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{2x-4+3-3}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{-3}{x^2-x+1}dx =$$
$$= -\frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$
$$= -\frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Por lo tanto, reuniendo soluciones parciales, se obtiene la primitiva I:

$$I = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

, que puede simplificarse algo operando los logaritmos:

$$I = \frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Aplicación de la Regla de Barrow:

El área pedida viene dada por la siguiente integral de Riemann:

$$A = \int_0^2 \frac{1}{x^3+1}dx$$

Aplicando la regla de Barrow, se calcula el área pedida (A):

$$A = \left[\frac{1}{6}\log\frac{(x+1)^2}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_0^2 =$$
$$= \frac{1}{6}\log\frac{9}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{3} - \left(\frac{1}{6}\log 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\log 3}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\log 3}{6} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Sol. Ej. 7. El área comprendida entre la cardioide y la parte positiva del eje X puede calcularse, por simetría, como dos veces el área encerrada por la parte superior (Fig. 5) que va desde $\theta_1 = 0$ hasta $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$
.

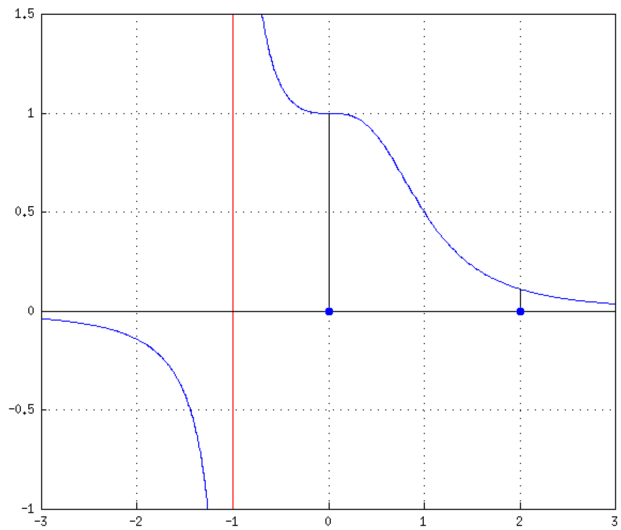


Figura 2: Gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^3+1}$. Se muestra la asíntota vertical en rojo. El área pedida es la encerrada por la curva y el eje OX desde $x = 0$ hasta $x = 2$

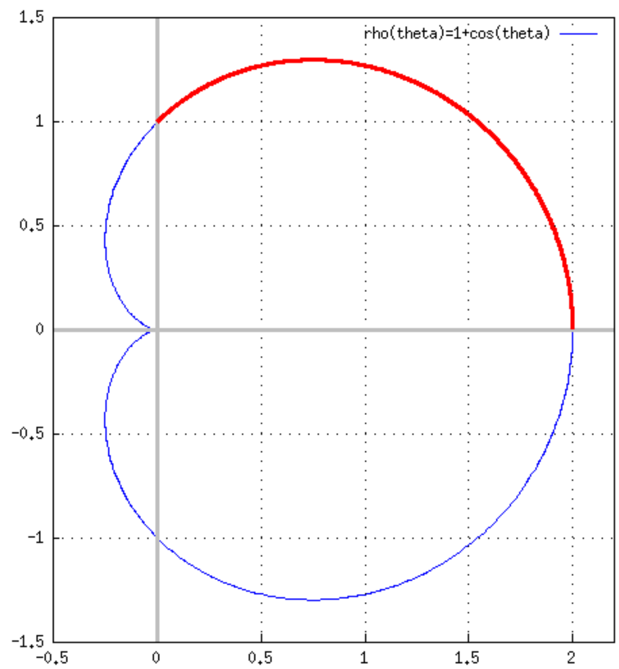


Figura 3: Cardioide de ecuación $\rho = a\,(1 + \cos(\theta))$, tomado para su representación gráfica el valor de $a = 1$. El segmento rojo indica el sector considerado para el cálculo del área pedida por simetría, que va desde $\theta_1 = 0$ hasta $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$.

Aplicando la fórmula del área en coordenadas polares:

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\theta_1=0}^{\theta_2=\frac{\pi}{2}} [a\,(1+\cos(\theta))]^2\,d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta}_{I}$$

Nos centramos ahora en el cálculo de la integral I, que se resuelve de forma inmediata utilizando la transformación ya conocida a partir de la fórmula del ángulo mitad:

$$I = \int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{4}\int \cos 2\theta \cdot 2d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} + C$$

Por lo tanto, volviendo a la integral definida:

$$A = a^2 \left(\theta + 2\operatorname{sen}\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4} \right) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2 \left(\frac{3\pi + 8}{4} \right) \quad \text{(uds. de área)}$$

Sol. Ej. 8. El enunciado proporciona la ecuación paramétrica de una curva lemniscata, tal y como se presenta en la figura 4:

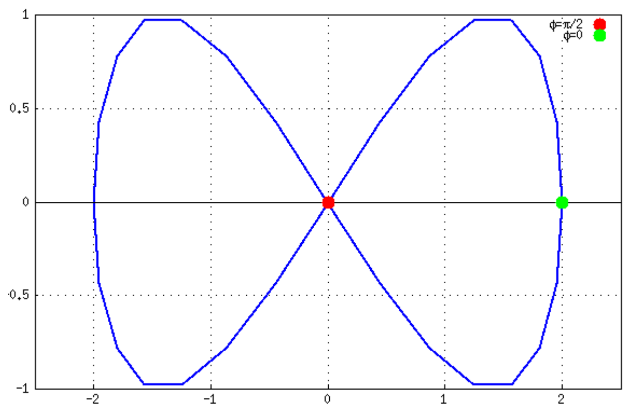


Figura 4: Representación gráfica de la curva dada por su ecuación en paramétricas. Teniendo en cuenta la simetría respecto de ambos ejes de la figura, para resolver el problema se considera el intervalo de integración $\phi_1 = 0$ (punto verde), $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$ (punto rojo), para después multiplicar el resultado por 4.

Dada la simetría de la figura, en este ejemplo se considera el intervalo de integración $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$, para después multiplicar el resultado por 4. Teniendo en cuenta la fórmula del área para la forma paramétrica:

$$A = \int y(\phi)x'(\phi)d\phi$$

En este caso, tenemos que $y(\phi) = \operatorname{sen} 2\phi$, y $x'(\phi) = -2\operatorname{sen}\phi$ por lo que calcularemos la siguiente integral indefinida:

$$\int \operatorname{sen}(2\phi)(-2\operatorname{sen}\phi)d\phi$$

Se trata de un producto del tipo $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$, por lo que aplicando dicha equivalencia se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 2\phi \\ \beta = \phi \end{array} \right. \Rightarrow A = \frac{-2}{2}\int (\cos(2\phi - \phi) - \cos(2\phi + \phi))\, d\phi = -\int (\cos\phi - \cos 3\phi)d\phi = -\operatorname{sen}\phi + \frac{\operatorname{sen}(3\phi)}{3} + C$$

Por lo tanto, el área a calcular (nótese el cambio de signo al permutar los límites de integración) vendrá dada por:

$$A = -4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos\phi d\phi - \cos 3\phi)d\phi = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi d\phi - \cos 3\phi)d\phi = 4\left[\operatorname{sen}\phi - \frac{1}{3}\operatorname{sen}3\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}$$

Sol. Ej. 9. La circunferencia indicada en forma polar tiene como ecuación $\rho(\theta) = \frac{3}{2}$ (nótese que en este caso ρ no depende del ángulo, ya que es constante). Se representa el planteamiento del problema en la Figura 5.

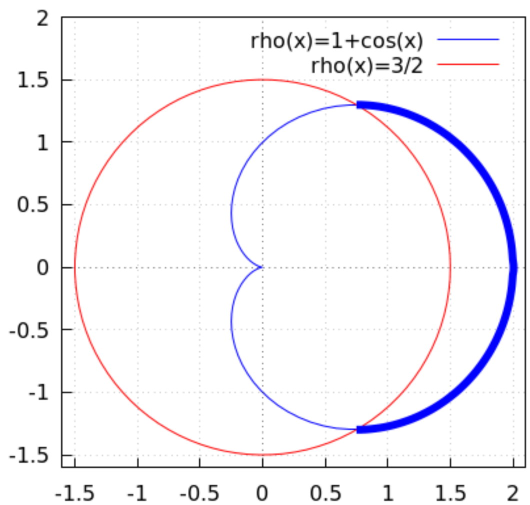


Figura 5: Cardioide y circunferencia. El arco cuya longitud se pide se indica con trazo más grueso.

Comenzamos por calcular los puntos de intersección de la circunferencia y la cardiodide, igualando ambas ecuaciones, de tal modo que:

$$\begin{aligned} 1+\cos\theta &= \tfrac{3}{2} \\ \cos\theta &= \tfrac{1}{2} \\ \theta &= \arccos\tfrac{1}{2} = \pm\tfrac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la fórmula para la obtención de la longitud de arco en coordenadas polares:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}d\theta$$

Se tiene que:

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

y

$$\rho(\theta)^2 = 1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta, \quad \rho'(\theta)^2 = \operatorname{sen}^2\theta$$

y por lo tanto:

$$L = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \cos^2\theta + 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2 + 2\cos\theta}\, d\theta =$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{2(1+\cos\theta)}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{2\cdot 2(1+\cos\theta)}{2}}\, d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}\, d\theta =$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 8\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = 8\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 4$$

Sol. Ej. 10. Aplicando la fórmula para calcular la longitud de un arco en polares:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(2e^{2\theta}\right)^2 + \left(e^{2\theta}\right)}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{e^{4\theta}(4+1)}\, d\theta =$$
$$= \sqrt{5}\int_0^{2\pi} e^{2\theta}\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}\int_0^{2\pi} e^{2\theta} 2\, d\theta = \frac{\sqrt{5}}{2} e^{2\theta}\Big]_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{2}\left(e^{4\pi} - 1\right)$$

Sol. Ej. 11. Se calculan primeramente los puntos de corte de la rosa de cuatro puntas y la circunferencia en el primer cuadrante, que determinan el intervalo de integración:

$$\begin{aligned} 2\sin(2\theta) &= 1 \\ \sin(2\theta) &= \frac{1}{2} \\ 2\theta = \arcsin\frac{1}{2} &= \frac{\pi}{6} \\ \theta_1 &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Se deduce además la segunda solución observando la simetría de la figura:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

Por lo tanto, el area pedida se calcula aplicando la fórmula, teniendo en cuenta la diferencia entre el área de la rosa y la de la circunferencia, en el sector polar determinado por el intervalo de integración:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} [\rho_1(\theta)^2 - \rho_2(\theta)^2] d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} [(2\operatorname{sen} 2\theta)^2 - 1] d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} (4\operatorname{sen}^2 2\theta - 1) d\theta$$

$$= 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12} (\operatorname{sen}^2 2\theta) d\theta - \frac{\theta}{2}\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = -\frac{\pi}{6} + 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta$$

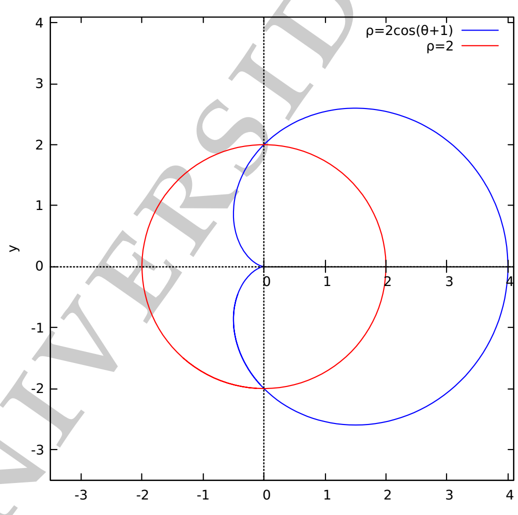
$$= -\frac{\pi}{6} + \int_{\pi/12}^{5\pi/12} (1-\cos 4\theta) d\theta = -\frac{\pi}{6} + \theta\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4\theta\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Sol. Ej. 12. El área pedida vendrá dada como la diferencia entre el área encerrada por la cardioide y el área de la circunferencia, como se muestra en la figura.

$$A = A_{cardioide} - A_{circunferencia} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[4(1+\cos\theta)^2 - 4\right] d\theta = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (cos^2\theta + 2\cos\theta) d\theta$$

Aplicando simetría para simplificar levemente los cálculos, podemos reescribir la integral considerando el cálculo de la mitad superior del área y multiplicando por dos:

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (cos^2\theta + 2\cos\theta) d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} + 2\cos\theta\right) d\theta = 8 + \pi \ (u^2)$$



Sol. Ej. 13. Se obtienen los puntos de corte de la parábola con la recta, que dan el intervalo de integración:

$$x^2+1=x+3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Así, se delimita la región del plano que genera el volumen de revolución sobre el eje X, representada en la figura 6:

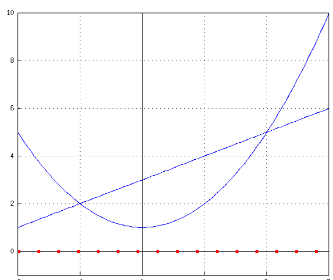


Figura 6: Región de revolución sobre el eje X. Se indica el eje de revolución mediante la línea punteada roja.

Así, considerando el método de las *arandelas*, tenemos que el diferencial de volumen:

$$dV = \pi h(R^2-r^2)dx \quad \text{con } R=x+3 \quad \text{y} \quad r=x^2+1$$

Por lo tanto:

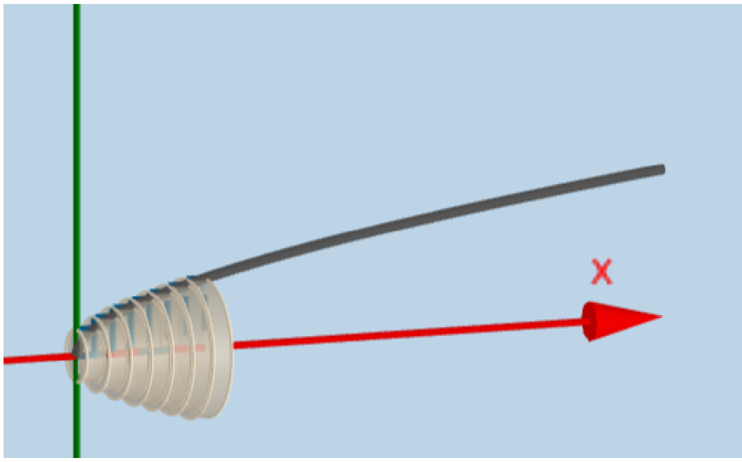
$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$

$$=\pi\left[\frac{-x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{2}=\frac{117\pi}{5} \quad \text{(uds. vol.)}$$

Sol. Ej. 14.

a.) En este caso, se define un disco vertical, de anchura dx y radio $y=\sqrt{x}$, que se moverá a lo largo de los límites de integración, $x=0, x=4$. El volumen del disco V_d viene dado por $V_d=\pi r^2 h \Rightarrow dV=\pi(\sqrt{x})^2dx=\pi x dx$. Por lo tanto:

$$V=\pi\int_0^4 x dx = 8\pi \ (u^3)$$

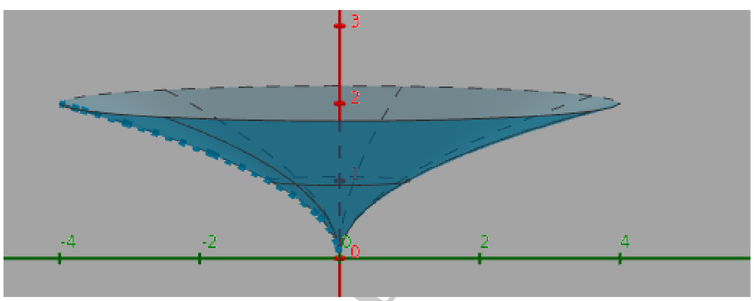


b.) Método de capas, volumen de revolución alrededor del eje OY. El diferencial de volumen viene dado por la capa cilíndrica de ecuación:

$$dV = 2\pi rh dx = 2\pi x\sqrt{x}dx = 2\pi x^{\frac{3}{2}}$$

Obteniéndose el volúmen pedido considerando los límites de integración $x = 0, x = 4$ como:

$$V = 2\pi \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{128\pi}{5} \ (u^3)$$



Sol. Ej. 15. Apoyándose en la representación gráfica del problema (Fig. 7), tomando el método de arandelas se comprueba que el diferencial de volumen viene dado como:

$$dV = \pi(R^2 - r^2)dx = \pi\left([x^2]^2 - [x^3]^2\right) dx$$

Por lo tanto, el volumen se calcula como:

$$V = \pi \int_0^1 (x^4 - x^6)dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right) \Bigg]_0^1 = \frac{2\pi}{35}$$

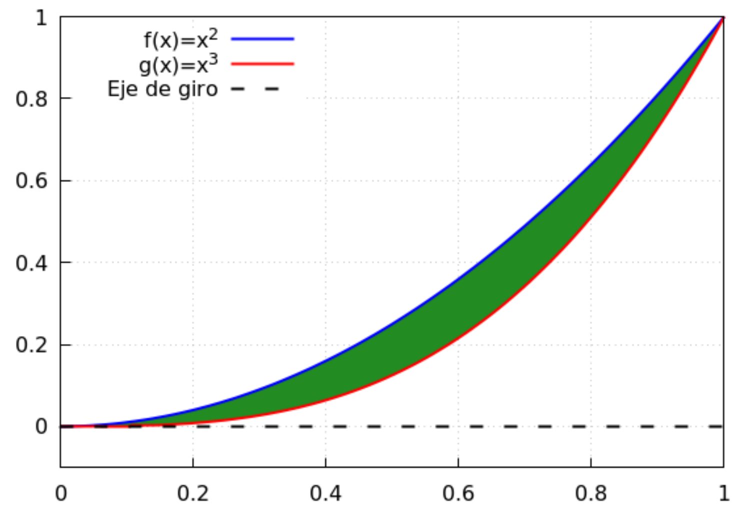


Figura 7: Figura esquemática del problema planteado. El área de revolución se representa con el sombreado verde.

Sol. Ej. 16. Método de las arandelas

Aplicando el método de las arandelas, vemos que es necesario integrar sobre dos tramos. El primero, entre $y = 0$ y $y = 1$, que es un cilindro cuyo volumen puede calcularse fácilmente, y el segundo tramo desde $y = 1$ hasta $y = 2$, en el que se define una arandela horizontal cuyo volumen viene dado por $dV = \left[1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2\right] dy$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 1^2 dy + \pi \int_1^2 1^2 - \left(\sqrt{y-1}\right)^2) dy \\ &= \pi \, [y]_0^1 + \pi \int_1^2 (2-y)\, dy \\ &= \pi + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Método de las capas

El método de las capas resulta más conveniente en este ejercicio, pues permite su resolución con una única integral. En este caso, se tienen capas cilíndricas cuyo volumen viene dado por $dv = 2\pi r h w$, siendo $r = x$, $h = y = x^2 + 1$ y $w = dx$:

$$V = 2\pi \int_a^b h \cdot r \cdot dx = 2\pi \int_0^1 x \left(x^2 + 1\right) dx$$
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\pi}{2}$$