Hoja de Ejercicios 6 - Función de varias variables

Ejercicio 1. *Estudiar la continuidad de la función* $f(x,y) = \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{(x^2+2y^2)\log(x^2+y^2)}$

Ejercicio 2. *Estudiar la continuidad de la superficie dada por la ecuación* $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

Ejercicio 3. *Hallar la derivada direccional de* $f(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ *en* $\left(-\frac{3}{4},0\right)$*, en la dirección de* $P\left(-\frac{3}{4},0\right)$ *a* $Q(0,1)$

Ejercicio 4. *Calcular la derivada direccional de* $f(x,y) = x - y^2$ *siguiendo la parábola* $y = 2x - 3x^2$ *en el punto de coordenadas* $(1,-1)$

Ejercicio 5. *Suponemos que la cima de una montaña helada en el invierno tiene forma de un paraboloide elíptico* $z = c - ax^2 - by^2$*, donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas geográficas longitud-latitud, y z es la altitud sobre el nivel del mar (x, y y z están medidas en metros). En el punto* $(1,1)$ *se encuentra un alpinista, que se dirige por la vía más directa hacia la cima. ¿En qué dirección asciende?. ¿Qué pendiente asciende en ese punto?. Si se le cae un mosquetón de la mochila, ¿en qué dirección se deslizará éste por la ladera?*

Ejercicio 6. *Considerando la siguiente función:*

$$f(x,y) = e^{xy} + \frac{x}{y} + \operatorname{sen}(\pi(2x+3y)), \quad \textit{se pide calcular:}$$

a.) *El gradiente de la función en el punto* $(0,1)$

b.) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

c.) *La derivada direccional de la función en el punto* $(0,1)$*, considerando la dirección de la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante del plano XY*

Ejercicio 7. *Dada la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2y - y^2}{2x^4 + 3y^2} & si\ \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se pide estudiar en todo $\mathbb{R}^2$*:*

a. *Su continuidad*

b. *La existencia de derivadas parciales*

c. *Su diferenciabilidad*

d. *Además, determinar la ecuación del plano tangente a su gráfica en el punto* $(x, y) = (1, 1)$

Ejercicio 8. *Dada la función* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{x^4+y^4} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ *, se pide:*

a.) *Estudiar su continuidad.*

b.) *Determinar el gradiente de* f *en el punto de coordenadas* $(1, 1)$*, e interpretar el resultado.*

c.) *Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto del apartado anterior.*

Ejercicio 9. *Dada la función* $f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$*, se pide:*

a.) *Determinar la existencia (y en su caso el valor) del límite doble de* f *en el origen, calculando previamente los límites reiterados y direccionales en las direcciones de la familia de rectas y parábolas de las formas* $y = mx$ *y* $y = mx^2$*. Discutir brevemente la continuidad de la función.*

b.) *Calcular la derivada direccional de* f *en el punto de coordenadas* $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$*, siguiendo la dirección marcada por el vector que une los puntos del plano XY* $P(0, 2)$ *y* $Q(1, -1)$*.*

c.) *Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto del apartado anterior.*

Ejercicio 10. *Considerando la siguiente función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^4+y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a.) *Estudiar su continuidad*

b.) *Calcular el gradiente*

c.) *Hallar la derivada direccional de la función en el punto* $(0, 1)$*, considerando la dirección de la bisectriz del primer cuadrante del plano XY*

Ejercicio 11.
Hallar los extremos locales de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y - 5$

Sol. Ej. 1.

TODO

Sol. Ej. 2.

El estudio de su dominio indica que la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$, salvo en el origen, ya que es el único punto en el que el denominador x^2+y^2 se anula:

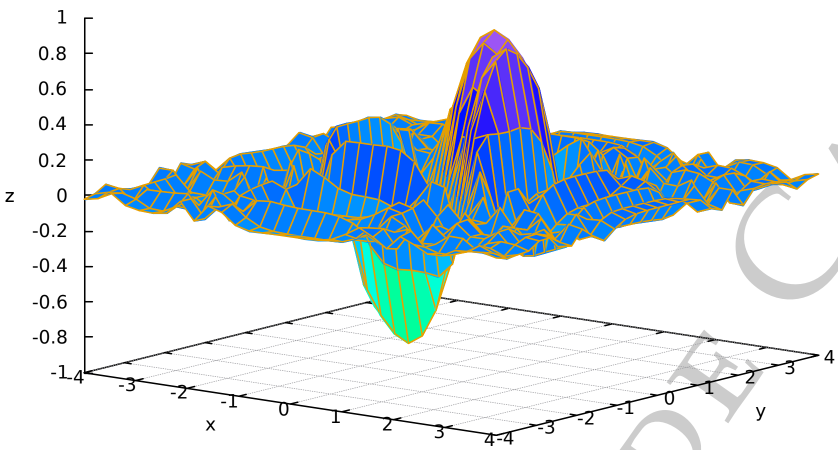

Figura 1: La función en continua en todo $\mathbb{R}^2$, salvo en el origen

$$D_{f(x,y)} = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Se procede por lo tanto al cálculo del límite doble, para determinar el tipo de discontinuidad.

- *Límites reiterados*. Se calculan en primer los límites reiterados.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right) \sim \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{3}}}{\cancel{x^2}} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right) \sim \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y^{\cancel{3}}}{\cancel{y^2}} = 0$$

Los límites reiterados existen y coinciden en cero. No puede descartarse por lo tanto la existencia del límite doble. De existir, éste valdrá cero. .

Los límites de este ejercicio se resuelven fácilmente, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(x^3+y^3)$ es un infinitésimo en el origen, equivalente a x^3+y^3

- *Límites direccionales*. Se consideran en este caso las aproximaciones al origen dada por rectas del tipo (i) $y = mx$ y (ii) parábolas del tipo $y = mx^2$:

I.) Se considera el cambio de variable $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3 + (mx)^3)}{x^2 + (mx)^2} \sim \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}(1+m^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2)} = 0$$

II.) Se considera el cambio de variable $y = mx^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^3 + (mx^2)^3)}{x^2 + (mx^2)^2} \sim \lim_{x\to 0} \frac{x^{\cancel{3}}(1+m^3x^3)}{\cancel{x^2}(1+m^2x^2)} = 0$$

Los límites direccionales valen cero. Por lo tanto, no puede descartarse la existencia del límite en el origen.

- *Límite en coordenadas polares*. Se considera ahora la función en coordenadas polares, cuando ρ tiende a cero:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\operatorname{sen}^3\theta)}{\rho^2} = 0$$

El valor del límite en polares, que es cero independientemente del ángulo θ, confirma que el límite doble existe, y vale cero.

El resultado del límite en polares indica que éste es cero, independientemente del parámetro θ

Sol. Ej. 3.

La dirección viene dada por el vector que une los puntos P y Q:

$$\mathbf{PQ} = (0,1) - \left(-\frac{3}{4}, 0\right) = \left(\frac{3}{4}, 1\right)$$

En este ejercicio, se aplicará la fórmula de la derivada direccional dada por el gradiente como $D = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$

Por lo tanto, el vector director $\mathbf{u}$ vendrá dado por:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{PQ}}{||\mathbf{PQ}||} = \frac{(\frac{3}{4}, 1)}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

Por su parte, el gradiente se calcula como:

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$$

Quedando la derivada direccional:

$$D_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})} f(-\frac{3}{4}, 0) = (6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) = \frac{18x}{5} - \frac{16y}{5}\Big|_{(-\frac{3}{4},0)} = -\frac{27}{10}$$

Sol. Ej. 4.

La dirección de la recta y, tangente a la curva en el punto $(1,-1)$, puede obtenerse de varias formas. A continuación se ilustran dos alternativas posibles:

La única "dificultad" en este tipo de ejercicios reside en hallar la dirección en el punto indicado. En este caso, dicha dirección la da la recta tangente a dicha parábola en el punto.

Opción 1: Considerando la ecuación paramétrica de la curva:

En este caso, la parábola se reescribe en función del parámetro t como:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t - 3t^2 \end{cases} \Rightarrow r(t) = (t, 2t - 3t^2) \Rightarrow r(1) = (1,-1)$$

La derivada de la función en $t = 1$ es por tanto:

$$\mathbf{v} = r'(t) = (1, 2 - 6t) \Rightarrow r'(1) = (1,-4)$$

que da la dirección de la derivada direccional pedida. Alternativamente, podemos considerar la forma rectangular de la ecuación:

Opción 2: Considerando la ecuación rectangular de la curva:

Tomado la parábola, se calcula la recta tangente en el punto $(1,-1)$, considerando la derivada en el punto, obtenemos la ecuación de la recta tangente (y):

Recuérdese que la ecuación de una recta tangente en un punto (x_0, y_0) viene dada por la expresión $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x) = 2 - 6x \Rightarrow f'(1) = 2 - 6 = -4 \Rightarrow y = -4x + 3$$

, que como puede verse tiene pendiente negativa. A continuación, pueden tomarse dos puntos cualesquiera de la recta tangente para obtener un vector de dirección, por ejemplo, tomando valores $x = 0,\ x = 1$, los puntos $P = (0,3)$ y $Q = (1,-1)$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{PQ} = (1,-1) - (0,3) = (1,-4)$$

En cualquier caso, una vez determinado el vector director $\mathbf{v}$ es necesario calcular el vector unitario $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i} - \frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}$$

El gradiente en el punto se halla aplicando la fórmula en el punto pedido:

$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{i} - 2y\mathbf{j} \Rightarrow \nabla f(1,-1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

Y por lo tanto, la derivada direccional se calcula aplicando la fórmula:

$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u}$

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{17}},-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}f(1,-1) = (\mathbf{i}+2\mathbf{j})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\mathbf{i}-\frac{4}{\sqrt{17}}\mathbf{j}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{8}{\sqrt{17}} = -\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sol. Ej. 5.

La dirección de máximo aumento de la pendiente es el gradiente de esta superficie, que es la vía por la que asciende el alpinista. Por lo tanto:

$$\nabla f(x,y) = -2ax\mathbf{i}-2by\mathbf{j} \Rightarrow \nabla f(1,1) = (-2a,-2b)$$

La dirección unitaria en el sentido de la máxima pendiente puede calcularse a partir del gradiente, en aplicación de la fórmula:

$\mathbf{u} = \frac{\nabla f(1,1)}{||\nabla f(1,1)||}$

$$\mathbf{u} = \frac{(-2a,-2b)}{\sqrt{(-2a)^2+(-2b)^2}} = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

La pendiente máxima en ese punto, que es la que el alpinista está salvando en ese momento. Por las propiedades del gradiente, se sabe que $D_{\mathbf{u}}f(x,y) = ||\nabla f(x,y)||$, y por lo tanto, la pendiente máxima será:

$$D_{\left(\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}f(1,1) = ||\nabla f(1,1)|| = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

Igualmente, la dirección de máximo decremento es la opuesta a la de máximo ascenso, que es la que seguirá un cuerpo que se deslice por gravedad ladera abajo:

$$-\nabla f(x,y) = -(-2a,-2b) = (2a,2b)$$

, que en forma de vector unitario $\mathbf{u}$ queda como:

$$\mathbf{u} = \frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Sol. Ej. 6. Se representa la gráfica de la función $f(x,y) = e^{xy}+\frac{x}{y}+\operatorname{sen}(\pi(2x+3y))$ en la figura 2.

a.) $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$

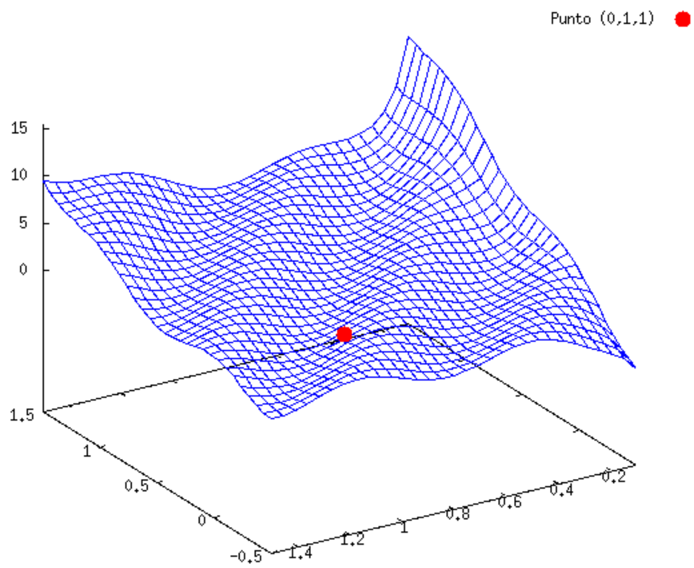

Figura 2: Superficie generada por $f(x, y)$ y posición del punto de estudio $(0, 1, f(0, 1))$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} + \frac{1}{y} + 2\pi\cos(\pi(2x+3y)) \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)} = 2 - 2\pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi\cos(\pi(2x+3y)) \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} = -3\pi$$

Por lo tanto, el gradiente de f en el punto es:

$$\nabla f(0, 1) = (2 - 2\pi)\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j}$$

b.)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ye^{xy} + \frac{1}{y} + 2\pi\cos(\pi(2x+3y))\right) = y^2e^{xy} - (2\pi)^2\operatorname{sen}(\pi(2x+3y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xe^{xy} - \frac{x}{y^2} + 3\pi\cos(\pi(2x+3y))\right) = xye^{xy} + e^{xy} - \frac{1}{y^2} - 6\pi^2\operatorname{sen}(\pi(2x+3y))$$

c.) La bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes forma un ángulo $\theta = \frac{3\pi}{4}$ con el eje X. Por lo tanto, se considera el vector unitario $\mathbf{u} = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Por lo tanto:

$$D_u f(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot \mathbf{u} = (2 - 2\pi, -3\pi) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-5\pi - 2}{\sqrt{2}}$$

Sol. Ej. 7. a. *Continuidad en* $(0,0)$:

Para el estudio de la continuidad, se calcula el valor del límite (si es que existe) en el origen. Se comienza por los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{2x^4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}\right)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{3y^2}\right)=\frac{-1}{3}$$

Por ser los límites reiterados distintos, se concluye que no existe el límite de $f(x,y)$ en el origen, siendo por lo tanto la función discontinua en $(0,0)$. Dicha discontinuidad es por tanto inevitable.

Continuidad en $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$:

Al ser $f(x,y)$ un cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula, se concluye que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en el origen.

b. *Derivadas parciales en* $(0,0)$*:*

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{2h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}=\infty\ \Rightarrow \text{No existe}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^2}{3h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3h}=\infty\ \Rightarrow \text{No existe}$$

Por lo tanto, las derivadas parciales en el origen no existen. En el resto de puntos de $\mathbb{R}^2$, las derivadas parciales se obtienen mediante derivación parcial, aplicando la regla del cociente:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(4x^3+2xy)(2x^4+3y^2)-8x^3(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2}=\frac{20x^3y^2-4x^5y+6xy^3}{(2x^4+3y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x^2-2y)(2x^4+3y^2)-6y(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2}=\frac{2x^6-10x^4y-3x^2y^2}{(2x^4+3y^2)^2}$$

c. La función no es diferenciable en el origen, dado que no tiene derivadas parciales en dicho punto. En el resto de $\mathbb{R}^2$ las derivadas parciales son continuas (al no quedar anulado el denominador), que es condición suficiente de diferenciabilidad.

d. La ecuación del plano tangente puede calcularse a través de la fórmula:

$$P(x,y) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(x-b) + f(a,b) = 0$$

Las derivadas parciales ya se encuentran calculadas en al apartado anterior, por lo que:

$$f_x(1,1) = \frac{20-4+6}{5^2} = \frac{22}{25} \quad \text{y} \quad f_y(1,1) = \frac{2-10-3}{5^2} = \frac{-11}{25}$$

Además

$$f(1,1) = \frac{1+1-1}{2+3} = \frac{1}{5}$$

Y por lo tanto, esta es la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\frac{1}{5})$:

$$P(x,y) = \frac{22}{25}(x-1) - \frac{11}{25}(y-1) + \frac{1}{5}$$

En la Figura 3 se representa la superficie en estudio así como el plano tangente al punto dado.

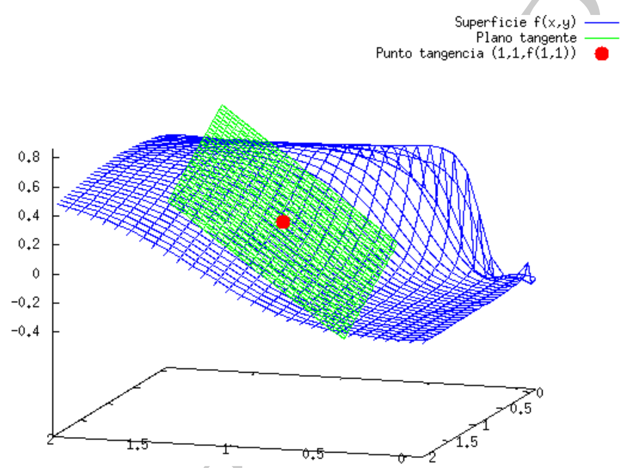

Figura 3: Gráfica de la función $f(x,y)$ y plano tangente a la misma en el punto $P = (1,1,\frac{1}{5})$.

Sol. Ej. 8. ▪ *Apartado a.:*

La función se encuentra definida a trozos. Estudiamos su continuidad en el origen. La representación gráfica de la función sugiere que la función presenta una discontinuidad no evitable en el origen (Fig. 4).

Es condición necesaria y suficiente para que la función sea continua que exista el límite en el origen, y que además el valor de éste

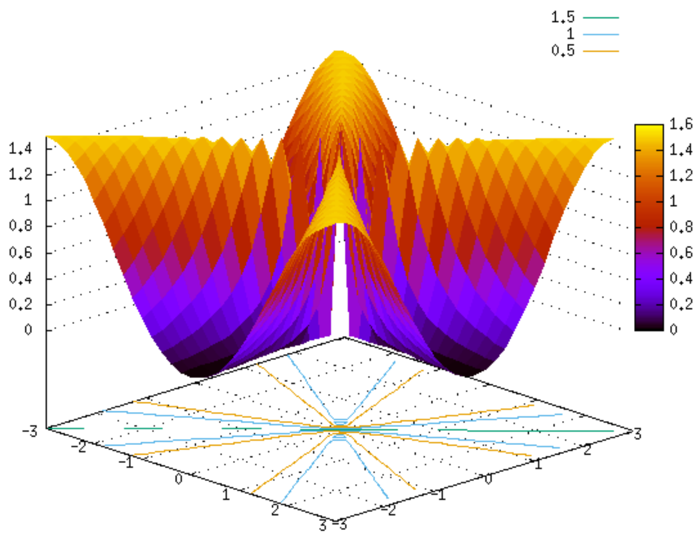

Figura 4: Representación gráfica de la función.

coindida con el valor de la función en el punto (cero en este caso). Como primer paso, calculamos los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{0}{x^4}\right)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x^2y^2}{x^4+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0}{y^4}\right)=0$$

Los límites reiterados existen y coinciden en cero. No puede descartarse por lo tanto la existencia del límite doble. De existir, éste valdrá cero.

Se considera a continuación el límite direccional, en este caso la aproximación al origen mediante rectas del tipo $y = mx$ (cambio de variable: $y = mx$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2m^2x^2}{x^4+m^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cancel{x^4}m^2}{\cancel{x^4}(1+m^4)}=\frac{3m^2}{1+m^4}$$

El límite direccional estudiado queda en función del parámetro m. El valor del límite depende de la dirección de aproximación de la recta, y por lo tanto puede afirmarse que el límite doble en el origen *no existe*. En consecuencia, la función no es continua en el origen. Presenta una discontinuidad *no evitable*, como era previsible al inspeccionar la gráfica de la figura 4.

- *Apartado b.*:

  Se calcula el vector gradiente. Para ello, se calculan en primer lugar las derivadas parciales, de acuerdo con la expresión:

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \qquad (1)$$

  - $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6xy^2}{y^4+x^4} - \frac{12x^5y^2}{(x^4+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = 0$
  - $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6x^2y}{y^4+x^4} - \frac{12x^2y^5}{(x^4+y^4)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = 0$

  Y por lo tanto, aplicando la expresión 1:

$$\nabla f(1,1) = \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

  El gradiente es nulo, y por lo tanto las pendientes de las rectas tangentes en la dirección tanto de X como de Y son cero. Se trata por lo tanto de un *punto estacionario.*

- *Apartado c.*:

  La ecuación del plano tangente a un punto cualquiera de coordenadas (x_0, y_0, z_0) de la superficie vendrá dada por la expresión:

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0 \qquad (2)$$

  Las derivadas parciales ya se han calculado en el apartado anterior, siendo nulas al tratarse, como se ha visto, de un punto estacionario. Por tanto, aplicando la fórmula 2, la ecuación explícita del plano tangente –que es obviamente un plano horizontal,– viene dada por:

$$z = \frac{3}{2}$$

  , que queda representado en la Figura 5:

Sol. Ej. 9.
- *Apartado a.*:

  El estudio de su dominio indica que la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$, salvo en el origen, ya que es el único punto en el que el denominador $x^2 + y^2$ se anula:

$$D_{f(x,y)} \equiv \left\{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)\right\}$$

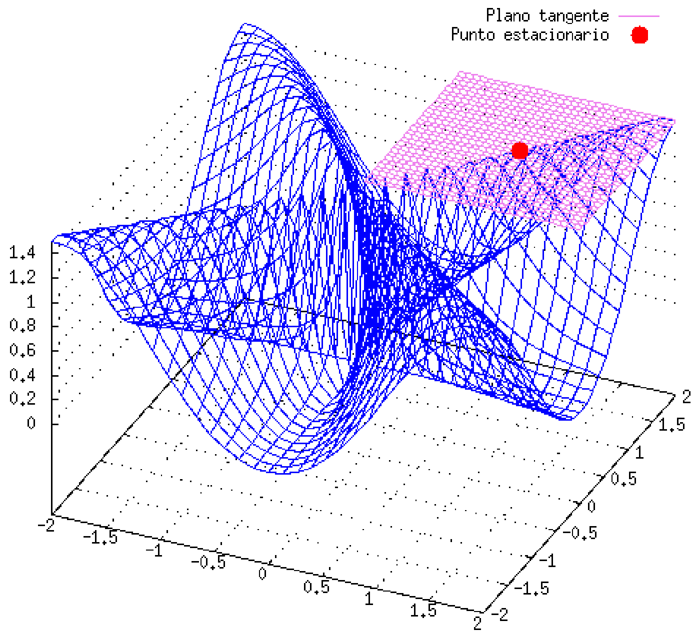

Figura 5: Superficie dada por la ecuación cartesiana $f(x,y)$ y punto de coordenadas $(1,1,\frac{3}{2})$ (punto rojo). Se trata de un punto estacionario, ya que $\nabla f(1,1) = \mathbf{0}$. por lo tanto, el plano tangente al punto es horizontal (violeta).

Se procede al cálculo del límite doble, para determinar el tipo de discontinuidad, calculando los límite pedidos en el enunciado (Los límites de este ejercicio se resuelven fácilmente, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(x^2+y^2)$ es un infinitésimo en el origen).

- *Límites reiterados*.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \sim \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\right) \sim \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\right) = 1$$

  Los límites reiterados existen y coinciden en uno. No puede descartarse por lo tanto la existencia del límite doble. De existir, éste valdrá uno.

- *Límites direccionales*. Se consideran en este caso las aproximaciones al origen dada por rectas del tipo (i) $y = mx$ y (ii) parábolas del tipo $y = mx^2$:

  I.) Se considera el cambio de variable $y = mx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2+(mx)^2)}{x^2+(mx)^2} \sim \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+m^2)}{x^2(1+m^2)} = 1$$

  II.) Se considera el cambio de variable $y = mx^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2+(mx^2)^2)}{x^2+(mx^2)^2} \sim \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1+m^2x^2)}{x^2(1+m^2x^2)} = 1$$

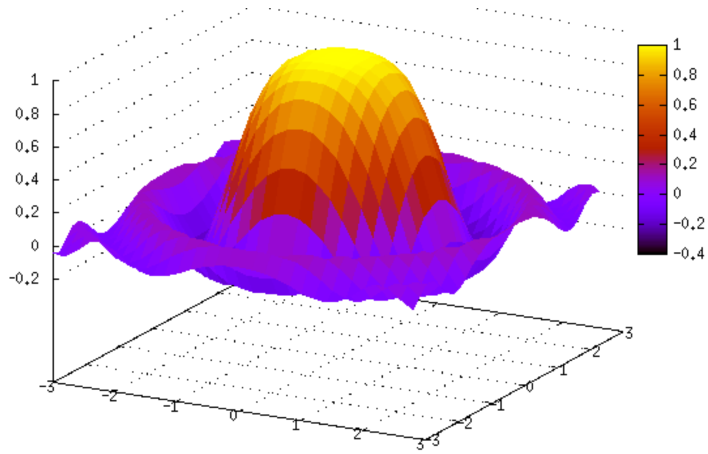

Figura 6: Superficie dada por la ecuación cartesiana $f(x,y)$

Los límites direccionales valen uno, al igual que los reiterados previamente calculados. Por lo tanto, no puede descartarse la existencia del límite en el origen.

- *Límite en coordenadas polares*. Se considera ahora la función en coordenadas polares, cuando ρ tiende a cero:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta)}{\rho^2} \sim \lim_{\rho\to 0} \frac{\cancel{\rho^2}(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)}{\cancel{\rho^2}} = 1$$

El valor del límite en polares es independiente del ángulo θ, lo que demuestra que el límite doble existe, y vale uno. Por lo tanto, la discontinuidad en el origen es una *discontinuidad evitable* (Fig. 6), que puede evitarse definiendo la función como sigue:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- *Apartado b.*:

Se calcula la derivada direccional a partir de la fórmula

$$D_{\mathbf{u}} f = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{u} \tag{3}$$

Por lo tanto, se calculan primero las derivadas parciales:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2x(\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} = -\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y(\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} - \frac{2y(\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2},-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)} = \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}$

Y por lo tanto:

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \Rightarrow \nabla f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} + \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j}$$

A partir del vector director $\mathbf{PQ} = (1,-1) - (0,2) = (1,-3)$, se calcula inmediatamente el vector unitario $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{PQ}}{||\mathbf{PQ}||} = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}$$

Finalmente, se calcula la derivada direccional pedida aplicando la fórmula 3:

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \cdot \mathbf{u} = \left(-\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}\mathbf{i} + \frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\mathbf{j}\right) = -\frac{16}{\sqrt{10\pi^3}}$$

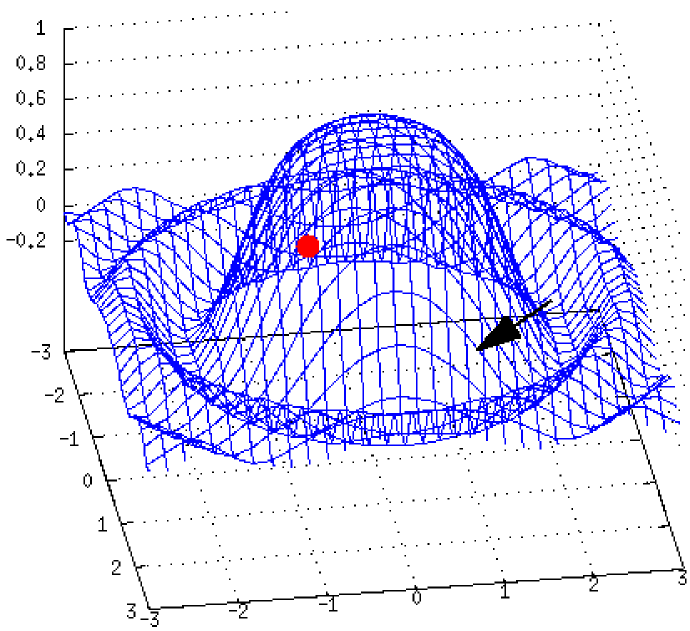

Figura 7: Superficie dada por la ecuación cartesiana $f(x,y)$, junto con el vector $PQ = (1,-3)$ que marca la dirección de la derivada pedida en el punto $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ (punto rojo).

- *Apartado c.*:

  La ecuación del plano tangente a un punto cualquiera de coordenadas (x_0, y_0, z_0) de la superficie vendrá dada por la expresión 2.

  Las derivadas parciales ya se han calculado en el apartado anterior, siendo el valor de $z_0 = f(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = \frac{2}{\pi}$. Por tanto, aplicando la fórmula 2, la ecuación implícita del plano tangente viene dada por:

$$-\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}(x-\frac{\sqrt{\pi}}{2})+\frac{4}{\pi^{\frac{3}{2}}}(y+\frac{\sqrt{\pi}}{2})-z+\frac{2}{\pi}=0$$

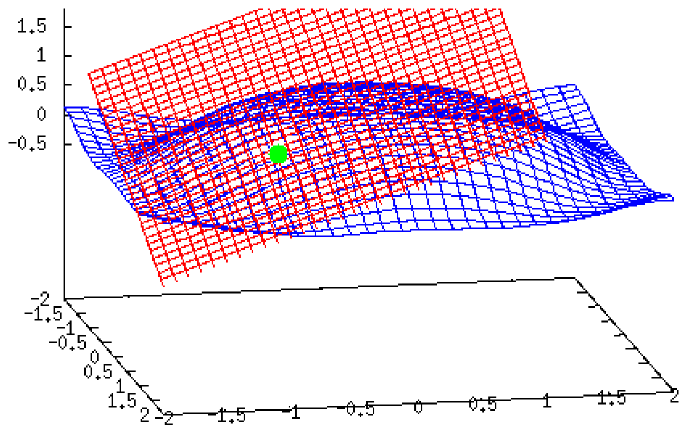

Figura 8: Plano tangente a la superficie en el punto $\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

Sol. Ej. 10. a.) Para el estudio de la continuidad, comenzaremos por calcular el valor del límite en el origen. Comezamos con los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3y-xy^3}{x^4+y^4}\right)=0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3y-xy^3}{x^4+y^4}\right)=0$$

Los límites reiterados coinciden, por lo que no puede descartarse (ni afirmarse) la existencia del límite. El límite direccional en $(0,0)$ a lo largo de la familia de rectas de ecuación $y=mx$ es:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{x^3mx-x(mx)^3}{x^4+(mx)^4}=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}}\frac{mx^4(1-m^2)}{x^4(1+m^4)}=\frac{m-m^3}{1+m^4}$$

Como resultado, el valor del límite varía en función de la recta de aproximación al origen, por lo que se concluye que no existe el límite de la función en el origen. Por lo tanto, la función presenta una discontinuidad no evitable en el punto $(0,0)$. Dicha discontinuidad es apreciable inspeccionando la gráfica de la función (Fig. 9).

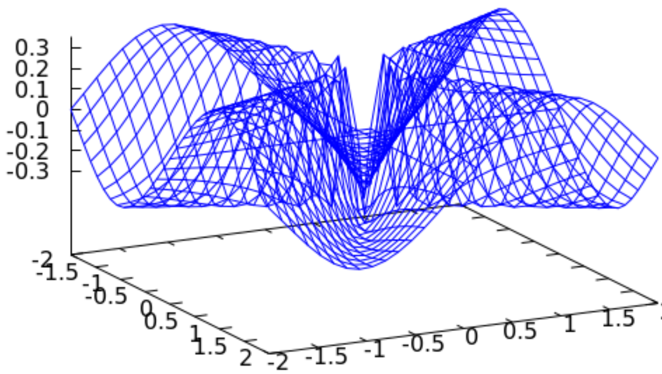

Figura 9: Gráfica de la función $f(x,y)$.

b.) Para el cálculo del gradiente, $\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$, se calculan las primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y - y^3}{y^4 + x^4} - \frac{4x^3(x^3y - xy^3)}{(y^4+x^4)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - 3xy^2}{y^4 + x^4} - \frac{4y^3(x^3y - xy^3)}{(y^4+x^4)^2}$$

Y por lo tanto:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{3x^2y - y^3}{y^4 + x^4} - \frac{4x^3(x^3y - xy^3)}{(y^4+x^4)^2}, \frac{x^3 - 3xy^2}{y^4 + x^4} - \frac{4y^3(x^3y - xy^3)}{(y^4+x^4)^2}\right)$$

Como $f(x,y)$ no es continua en $(0,0)$, tampoco es diferenciable en este punto. La no diferenciabilidad también puede deducirse de la no existencia de las derivadas parciales en el origen. Como consecuencia, podemos afirmar que $f(x,y)$ es de clase $C^1 \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$.

c.) Calcularemos la derivada direccional $D_u f$ en el punto $(0,1)$ considerando el vector unitario $\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j}$, que marca la dirección de la bisectriz del primer cuadrante. Por tanto:

$$D_u f(0,1) = \nabla f(0,1) \cdot \mathbf{u} = (-1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sol. Ej. 11. Se comienza por determinar los puntos críticos, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{es decir,} \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene el punto crítico $P = (1, -2)$. A continuación, calculamos el determinante Hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

En este ejercicio, el valor del determinante Hessiano es independiente del punto en el que se evalúen las derivadas parciales, y es siempre mayor que cero. El valor de la derivada parcial segunda en x es por lo tanto igual a 2, también mayor que cero.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-2)} > 0 \quad \text{y} \quad H_{(1,-2)} > 0$$

y por lo tanto puede afirmarse que $f(x,y)$ presenta un mínimo relativo en el punto $(1, -2)$ (Fig.10). Dado que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$ y no presenta ningún otro punto crítico, puede afirmarse que se trata además de un mínimo absoluto.

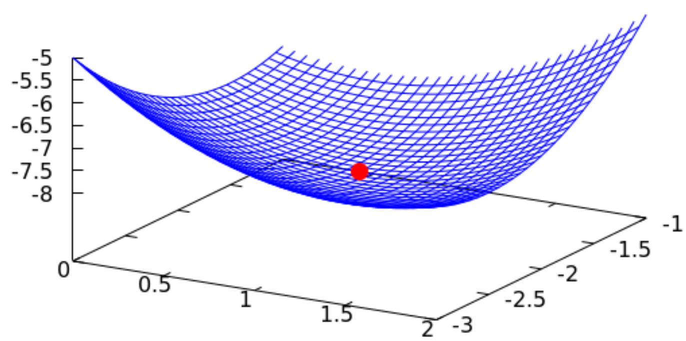

Figura 10: Gráfica de la función $f(x,y)$ y mínimo relativo identificado.