1. Sucesiones

Teoremas

Acotación	Weierstrass
Conv $\Rightarrow$ Acotada	Conv $\Leftarrow$ Acotada y monótona
Div $\Rightarrow$ No acotada	Div $\Leftarrow$ No acotada y monótona

Valor absoluto: Si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Stolz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

siempre que:

1. $\{b_n\}$ sea una sucesión monónotona divergente, o bien:
2. $a_n \to 0, \quad b_n \to 0$ y $\{b_n\}$ sea monótona.

2. Series

Series notables

Geométrica	Armónica
$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n, a \neq 0$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$
$\lvert r\rvert < 1$ conv $r \geq 1$ div $r \leq -1$ osc.	$\alpha > 1$ conv $\alpha \leq 1$ div

$$\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{ar^k}{1-r}$$

Criterios de convergencia

Condición necesaria

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Cociente y raíz

$$\text{Cociente: } \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} \text{ ó } \lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\text{Raíz: } \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

- Si $\lambda < 1$ la serie converge
- Si $\lambda > 1$ la serie diverge
- Si $\lambda = 1$ es un caso dudoso. En cociente, la serie diverge si $\exists n_0$ t.q. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \; \forall n > n_0$

Raabe

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

- Si $L > 1$ la serie converge
- Si $L < 1$ la serie diverge

Paso al límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq \{0, \infty\} \Rightarrow \text{ mismo carácter}$$

- Si $\lambda = 0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow a_n$ convergente
- Si $\lambda = +\infty$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergente $\Rightarrow a_n$ divergente

Leibniz

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \quad (a_n > 0)$$

converge si la sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente y se verifica

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Convergencia absoluta

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

3. Límites

Límite de una sucesión

$L \in \mathbb{R}$ es límite de la sucesión a_n si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \;\; / \;\; |a_n - L| < \varepsilon \;\; \forall n > n_0$$

Límite de una función

$L \in \mathbb{R}$ es límite de la función $f(x)$ si:

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Órdenes de infinitud

$$\underset{(a>0)}{n^{a\cdot n}} > n! > \underset{(b>1)}{b^n} > \underset{(c>0)}{n^c} > \underset{(q>1,\; p>0)}{(\log_q n)^p}$$

Infinitésimos equivalentes ($f(x) \to 0$)

- $\operatorname{sen} f(x) \sim \operatorname{arc\,sen} f(x) \sim \tan f(x) \sim \arctan f(x) \sim \log(1 + f(x)) \sim f(x)$
- $1 - \cos f(x) \sim \frac{(f(x))^2}{2}$
- $a^{f(x)} - 1 \sim f(x) \cdot \log a$
- $\log(1 + f(x)) \sim f(x)$. Esta equivalencia se puede expresar de la siguiente manera: si $f(x) \to 1 \Rightarrow \log f(x) \sim f(x) - 1$

Fórmula de Stirling: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$