Examen Parcial

15 de Enero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2y - y^2}{2x^4 + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

se pide estudiar en todo $\mathbb{R}^2$:

a. (*1 punto*) Su continuidad

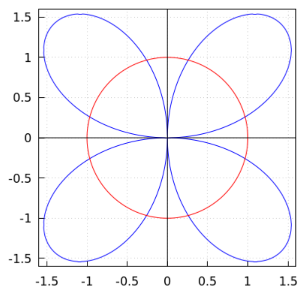
b. (*1 punto*) La existencia de derivadas parciales

c. (*0.5 puntos*) Su diferenciabilidad

d. (*1.5 puntos*) Además, determinar la ecuación del plano tangente a su gráfica en el punto $(x,y) = (1,1)$

2. *(2 puntos)* Hallar los extremos locales de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y - 5$

3. *(2 puntos)* Hallar el área de la región $\mathcal{R}$ que está encerrada por la curva $\rho = 2\,\mathrm{sen}\, 2\theta$ y fuera de la curva $\rho = 1$ en el primer cuadrante.



4. *(2 puntos)* Determinar el carácter de la siguiente integral impropia de primera especie en función de los valores del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$I = \int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\lambda}} dx \quad , \quad a > 0$$

Soluciones:

1. a. *Continuidad en* $(0,0)$:

Para el estudio de la continuidad, se calcula el valor del límite (si es que existe) en el origen. Se comienza por los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\left(\frac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}\right)\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4}{2x^4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^4+x^2y-y^2}{2x^4+3y^2}\right)\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-y^2}{3y^2}\right)=\frac{-1}{3}$$

Por ser los límites reiterados distintos, se concluye que no existe el límite de $f(x,y)$ en el origen, siendo por lo tanto la función discontinua en $(0,0)$. Dicha discontinuidad es por tanto inevitable.

Continuidad en $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$:

Al ser $f(x,y)$ un cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula, se concluye que f es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en el origen.

b. *Derivadas parciales en* $(0,0)$*:*

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{2h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}=\infty\ \Rightarrow \text{No existe}$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^2}{3h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{3h}=\infty\ \Rightarrow \text{No existe}$$

Por lo tanto, las derivadas parciales en el origen no existen. En el resto de puntos de $\mathbb{R}^2$, las derivadas parciales se obtienen mediante derivación parcial, aplicando la regla del cociente:

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(4x^3+2xy)(2x^4+3y^2)-8x^3(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2}=\frac{20x^3y^2-4x^5y+6xy^3}{(2x^4+3y^2)^2}$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x^2-2y)(2x^4+3y^2)-6y(x^4+x^2y-y^2)}{(2x^4+3y^2)^2}=\frac{2x^6-10x^4y-3x^2y^2}{(2x^4+3y^2)^2}$$

c. La función no es diferenciable en el origen, dado que no tiene derivadas parciales en dicho punto. En el resto de $\mathbb{R}^2$ las derivadas parciales son continuas (al no quedar anulado el denominador), que es condición suficiente de diferenciabilidad.

d. La ecuación del plano tangente puede calcularse a través de la fórmula:

$$P(x, y) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(x - b) + f(a, b) = 0$$

Las derivadas parciales ya se encuentran calculadas en al apartado anterior, por lo que:

$$f_x(1, 1) = \frac{20 - 4 + 6}{5^2} = \frac{22}{25} \quad \text{y} \quad f_y(1, 1) = \frac{2 - 10 - 3}{5^2} = \frac{-11}{25}$$

Además

$$f(1, 1) = \frac{1 + 1 - 1}{2 + 3} = \frac{1}{5}$$

Y por lo tanto, esta es la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\frac{1}{5})$:

$$P(x, y) = \frac{22}{25}(x - 1) - \frac{11}{25}(y - 1) + \frac{1}{5}$$

En la Figura 1 se representa la superficie en estudio así como el plano tangente al punto dado.

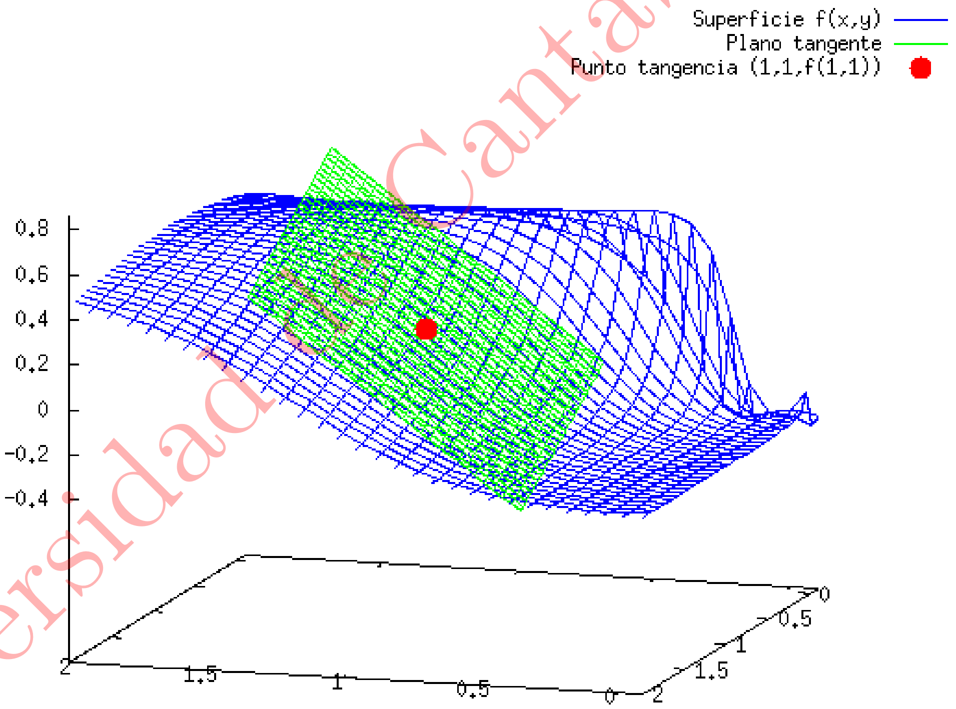


Figura 1: Gráfica de la función $f(x, y)$ y plano tangente a la misma en el punto $P = (1, 1, \frac{1}{5})$.

2. Se comienza por determinar los puntos críticos, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{es decir,} \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x + 3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene el punto crítico $P = (1, -2)$. A continuación, calculamos el determinante Hessiano:

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

En este ejercicio, el valor del determinante Hessiano es independiente del punto en el que se evalúen las derivadas parciales, y es siempre mayor que cero. El valor de la derivada parcial segunda en x es por lo tanto igual a 2, también mayor que cero.

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,-2)} > 0 \quad \text{y} \quad H_{(1,-2)} > 0$$

y por lo tanto puede afirmarse que $f(x,y)$ presenta un mínimo relativo en el punto $(1, -2)$ (Fig.2). Dado que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}^2$ y no presenta ningún otro punto crítico, puede afirmarse que se trata además de un mínimo absoluto.

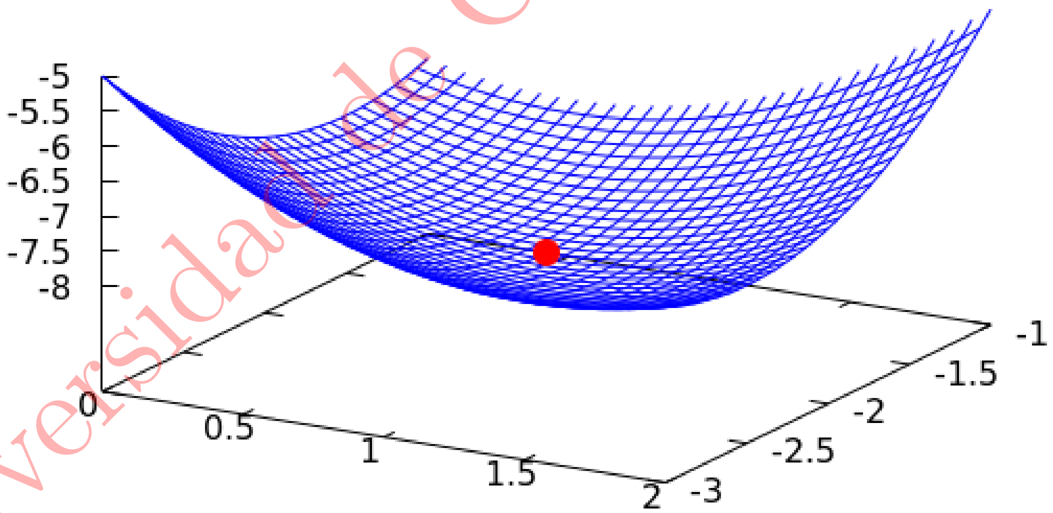


Figura 2: Gráfica de la función $f(x,y)$ y mínimo relativo identificado.

3. Se calculan primeramente los puntos de corte de la rosa de cuatro puntas y la circunferencia en el primer cuadrante, que determinan el intervalo de integración:

$$\begin{aligned} 2\sin(2\theta) &= 1 \\ \sin(2\theta) &= \frac{1}{2} \\ 2\theta = \arcsin\frac{1}{2} &= \frac{\pi}{6} \\ \theta_1 &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Se deduce además la segunda solución observando la simetría de la figura:

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$$

Por lo tanto, el area pedida se calcula aplicando la fórmula, teniendo en cuenta la diferencia entre el área de la rosa y la de la circunferencia, en el sector polar determinado por el intervalo de integración:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[\rho_1(\theta)^2 - \rho_2(\theta)^2]d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}[(2\operatorname{sen}2\theta)^2 - 1]d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12}(4\operatorname{sen}^2 2\theta - 1)d\theta \\ &= 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12}(\operatorname{sen}^2 2\theta)d\theta - \frac{\theta}{2}\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = -\frac{\pi}{6} + 2\int_{\pi/12}^{5\pi/12}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta \\ &= -\frac{\pi}{6} + \int_{\pi/12}^{5\pi/12}(1-\cos 4\theta)d\theta = -\frac{\pi}{6} + \theta\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta\Big|_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

4. Se trata de una integral impropia de primera especie, ya que el límite superior del intervalo de integración es ∞. No hay ningún otro punto singular, ya que el enunciado indica que $a > 0$, por lo que no se anula el denominador.

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{\infty}\frac{1}{x^{\lambda}}dx = I = \int_a^{\infty}x^{-\lambda}dx = \lim_{H\to\infty}\left(\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right)\Big]_a^H = \lim_{H\to\infty}\left(\frac{H^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{1-\lambda}\lim_{H\to\infty}\left(H^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } \lambda \le 1 \Rightarrow I = \infty & \text{(Divergente)} \\ \text{Si } \lambda > 1 \Rightarrow I = \dfrac{a^{1-\lambda}}{\lambda - 1} \in \mathbb{R}^+ & \text{(Convergente)} \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que en el caso particular $\lambda = 1$ se tiene una integral de tipo logaritmo:

$$I = \int_a^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{H\to\infty}(\log(H) - \log(a)) = \infty$$

Por lo tanto, la integral sólo será convergente para valores de λ estrictamente mayores de 1, siendo en cualquier otro caso divergente.