Examen Parcial

06 de Noviembre 2020

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. (*3 puntos*) Determinar el valor del parámetro $k \in \mathbb{R}^+$, para que las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sean equivalentes:

$$\{a_n\} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \qquad\qquad \{b_n\} = kn^3$$

2. (*3 puntos*) Estudiar el carácter de la serie aplicando el criterio de comparación por paso al límite:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{2n}{2n+1}\right)$$

3. (*2 puntos*) Hallar el conjunto de definición de la función

$$f(x) = \frac{\log(x+3)}{\sqrt[4]{x^2-1}}$$

4. (*2 puntos*) Resolver la ecuación algebraica $x^6 + 1 = 0$, expresando el resultado en forma binómica.

Soluciones:

1. Se dice que dos sucesiones$\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son equivalentes si se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

En este caso, escribimos dicho límite:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{kn^3}$$

La expresión del numerador sugiere la conveniencia de aplicar el criterio de Stolz. Para ello, se comprueban las hipótesis de aplicación. En este caso, se verifica que $b_n = kn^3 \quad, k \in \mathbb{R}^+$ es monótona divergente, y por lo tanto puede aplicarse Stolz:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}{k\left[(n+1)^3 - n^3\right]} =$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3k}$$

Para que ambas sean equivalente, ha de cunplirse que $L = 1$:

$$L = \frac{1}{3k} = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Ambas sucesiones serán equivalentes en caso de que $k = \frac{1}{3}$.

2. Como primer paso, analizamos la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = \log(1) = 0$$

No puede descartarse por lo tanto la convergencia de la serie. Aplicamos por lo tanto el criterio de comparación por paso al límite, tal y como se pide en el enunciado. En este caso, tomemos por ejemplo la serie armónica, que como sabemos es divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Leftrightarrow b_n = \frac{1}{n}$$

En aplicación de la fórmula de paso al límite, desarrollamos la expresión para determinar el valor de L:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} n\left(\log\underbrace{\left(\frac{2n}{2n+1}\right)}_{a_n\to 1}\right) \sim \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n}{2n+1} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+1} = \frac{-1}{2}$$

Como L es un número real finito diferente de cero, podemos afirmar que el caracter de la serie a_n y b_n es el mismo, y por lo tanto la serie a_n es divergente.

3. El dominio de la función será igual a la intersección de los dominios de la función del numerador y del denominador, excluyendo además los valores de x que anulan el denominador.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow Df = Dg \cap Dh - \{\text{ceros de } h(x)\}$$

Analizamos el numerador:

$$g(x) = \log(x+3) \Rightarrow x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3 \Rightarrow Dg = (-3, +\infty)$$

La expresión bajo la raíz de índice par no puede ser negativa:

$$h(x) = \sqrt[4]{x^2-1} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq -1 \Rightarrow Dh = (-\infty, -1] \cap [1, +\infty)$$

Además, la expresión del denominador no puede ser cero, y por lo tanto:

$$x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \infty) - \{-1, 1\}$$

- Finalmente, reuniendo soluciones parciales se obtiene el dominio de la función, representada en la figura 1:

$$\begin{aligned} Df &= Dg \cap Dh - \{\text{ceros de } h(x)\} = \\ &= (-3, +\infty) \cap (-\infty, -1] \cap [1, +\infty) \cap (-\infty, \infty) - \{-1, 1\} = \\ &= (-3, -1) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

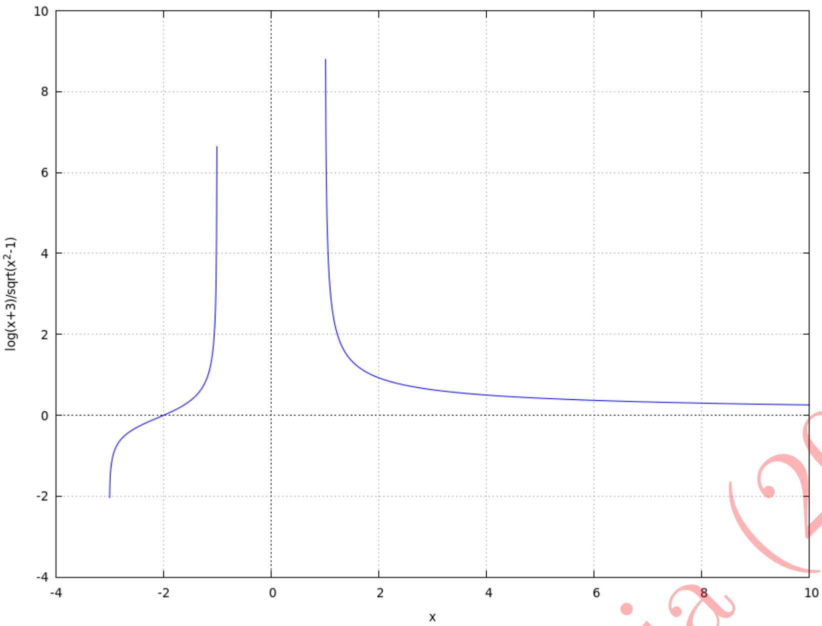

Figura 1: Gráfica de la función $f(x)$.

4. De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, la ecuación debe tener exactamente 6 soluciones complejas.

$$x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 + 0i \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{-1 + 0i}$$

Para calcular dicha raíz, se emplea aquí la fórmula de de Moivre. Para ello, se convierte el complejo $z = 1 + 0i$ a su forma trigonométrica, resultando:

$$z = 1+0i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ \alpha = \pi - \arctan \frac{0}{1} = \pi + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow z = \cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi)$$

Así, las soluciones de la ecuación vendrán dadas por:

$$\sqrt[6]{z} = \cos\left(\frac{1}{6}(\pi + 2k\pi)\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}(\pi + 2k\pi)\right), \qquad k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

dando valores a k:

- $k = 0: \quad x_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k = 1: \quad x_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i$
- $k = 2: \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k = 3: \quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{-5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{-5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- $k = 4: \quad x_5 = \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{-\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{-\pi}{2} = -i$
- $k = 5: \quad x_6 = \cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{-\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Se representan dichas soluciones sobre el plano complejo en la Figura 2.

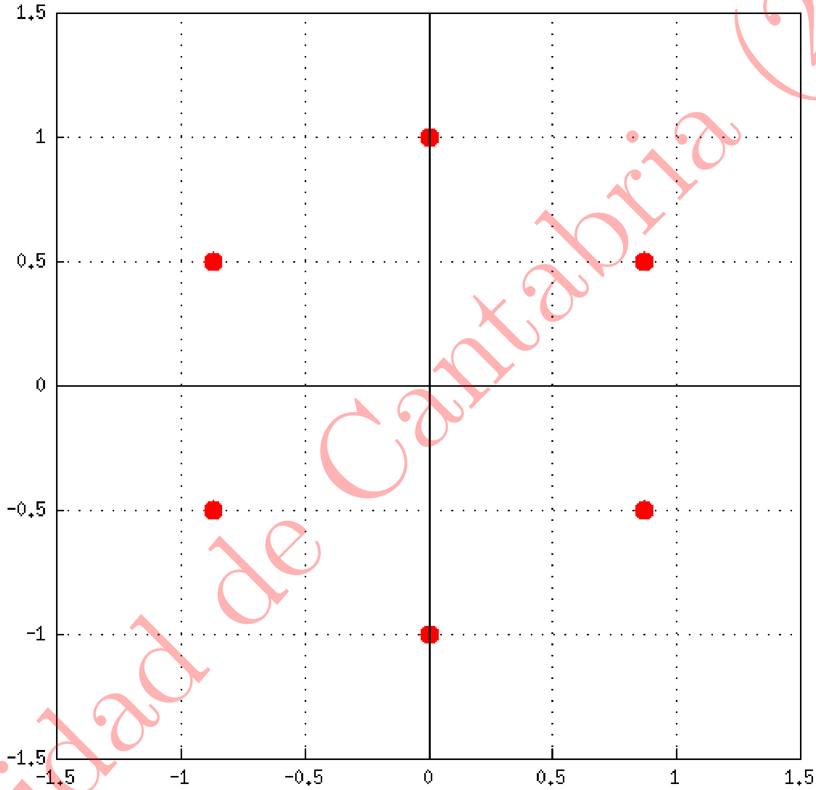

Figura 2: Los afijos de las soluciones de $x^6 + 1 = 0$ son los vértices de un hexágono regular sobre el plano complejo.