Examen Parcial

02 de Diciembre 2020

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. *(3 puntos)* Analizar la continuidad de la función f en $\mathbb{R}$, indicando, de existir, el tipo de discontinuidad.

$$f(x) = \frac{1}{\log(x^2+1)} - \frac{1}{x^2}$$

2. *(2 puntos)* Hallar el valor de **una** de las siguientes integrales indefinidas, a elección del examinando:

$$J = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx \qquad\qquad I = \int \frac{4x}{x^2+3x+2} dx$$

3. Sea la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x\,|x-3| & \text{si} \quad x < 5 \\ x\sqrt{x^2+2} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

   a. *(2 puntos)* Estudiar la derivabilidad en todo $\mathbb{R}$ de $f(x)$, empleando para tal fin la definición de derivada como cociente diferencial.

   b. *(1 punto)* Si f cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$, determinar el punto correspondiente cuya existencia se afirma en dicho teorema.

4. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide:

   a. *(1.5 puntos)* Hallar polinomio de Taylor de orden 4 que aproxima en el entorno de $x = 1$

   b. *(0.5 puntos)* Expresar el término general de dicho polinomio

Soluciones:

1. Observando el dominio de la función, vemos que ésta será continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, que es el único punto en que se anula el denominador, siendo por lo tanto una discontinuidad evitable. Para analizar en detalle la naturaleza de dicha discontinuidad, estudiaremos el valor del límite L en $x_0 = 0$:

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log\left(x^2+1\right)} - \frac{1}{x^2} \right) = \{\infty - \infty\} \quad \text{(indeterminación)}$$

Para poder aplicar la regla de L'Hopital, es necesario transformar la expresión para tener una indeterminación del tipo adecuado. En este caso, basta operar la expresión:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \log\left(x^2+1\right)}{x^2 \log\left(x^2+1\right)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad \text{(indeterminación)}$$

Ahora sí es posible aplicar L'Hopital, calculando las derivadas de primer orden en numerador y denominador:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}\left(1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)}{\cancel{2x}\left[\log\left(x^2+1\right) + \dfrac{x^2}{x^2+1}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{x^2+1}}{\log\left(x^2+1\right) + \dfrac{x^2}{x^2+1}} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\log\left(x^2+1\right) + x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad \text{(indeterminación)} \end{aligned}$$

Continuando con la aplicación de L'Hopital, se calcula ahora de nuevo la derivada en numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x\log\left(x^2+2\right) + \left(x^2+1\right)\dfrac{2x}{x^2+1} + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}\left[\log\left(x^2+1\right) + 1 + 1\right]} = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función no está definida en $x_0 = 0$, pero su límite en dicho punto existe y vale $\frac{1}{2}$. Siendo una *discontinuidad evitable*, basta definir el valor de la función $f(0) = \frac{1}{2}$ para evitar la discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(x^2+1)} - \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

A modo ilustrativo, se presenta la gráfica de $f(x)$ en la Figura 1.

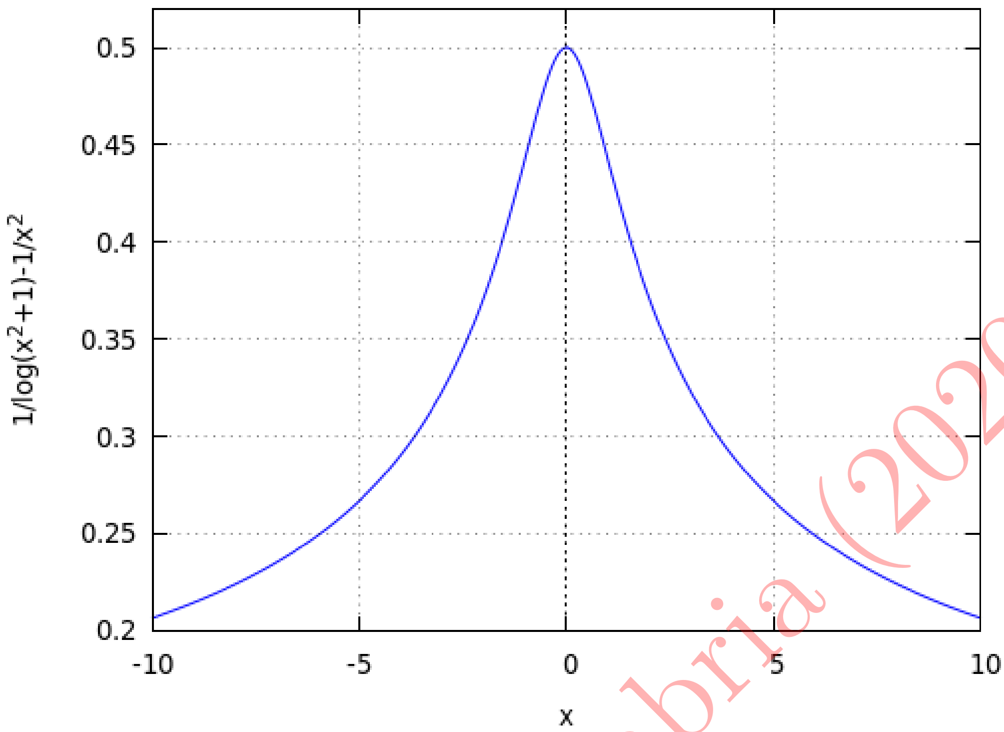

Figura 1: Gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[-10, 10]$. $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$, donde su límite vale $\frac{1}{2}$.

2. a. La función no es impar en coseno. Se aplica el cambio de variable "universal" para las funciones racionales trigonométricas, $\tan\frac{x}{2} = t$:

$$J = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx \rightarrow \begin{cases} \tan\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \rightarrow$$

$$J = \int \frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dt$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2} - \int dt = 2\arctan t - t$$

$$= 2\arctan\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \tan\frac{x}{2} = 2\frac{x}{2} - \tan\frac{x}{2} = x - \tan\frac{x}{2} + C$$

b. Se trata de una integral racional. En este caso, mediante el artificio de sumar y restar una constante en el numerador lograremos una integral de tipo logaritmo y otra racional que analizamos posteriormente:

$$I = \int \frac{4x}{x^2+3x+2} = 2\int \frac{2x+3-3}{x^2+3x+2}dx = 2\int \frac{2x+3}{x^2+3x+2} - 6\int \frac{dx}{x^2+3x+2}$$

La integral de la izquierda ya es inmediata (se trata de un logaritmo). La de la derecha resulta casi inmediata aplicando la completación de cuadrados sobre la expresión cuadrática del denominador:

$$x^2+3x+2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} I &= 2\log\left|x^2+3x+2\right| - 6\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \\ &= 2\log\left|x^2+3x+2\right| + 6\int \frac{dx}{\frac{1}{4} - \left(x+\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= 2\log\left|x^2+3x+z\right| + 12\operatorname{arg\,tanh}\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 2\log\left|x^2+3x+2\right| + 12\operatorname{arg\,tanh}(2x+3) + C \end{aligned}$$

Alternativamente, puede escribirse la primitiva argumento tangente hiperbólica en su forma logarítmica, quedando:

$$I = 2\log\left|x^2+3x+2\right| + 6\log\frac{|x+2|}{|x+1|} + C$$

3. a. En primer lugar, analizando el valor absoluto de la rama izquierda de $f(x)$, se obtiene un punto crítico en $x = 3$. Por lo tanto, se define nuevamente la función incorporando dicho punto crítico en la definición explícita de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & \text{si} \quad x < 3 \\ -x^2 + 6x & \text{si} \quad 3 \leq x < 5 \\ x\sqrt{x^2+2} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en un punto, es condición necesaria que sea continua en dicho punto. Se analiza la continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} -3x^2 - 6x = 9$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3+} -x^2 + 6x = 9$$

Los límites laterales coinciden, y por lo tanto el límite de la función en 3 existe y vale 9. Se analiza seguidamente la derivabilidad en $x = 3$, calculando para ello las derivadas laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 3^-} \frac{3x^2 - 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{3\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}} = 12$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2 + 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}} = 0$$

La función no es derivable en $x = 3$, ya que las derivadas laterales no coinciden.

Continuidad en $x = 5$:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5} -x^2 + 6x = 5$$
$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to s} x\sqrt{x^2+2} = 5\sqrt{27}$$

La función no es continua en $x = 5$. Se trata de una discontinuidad no evitable de salto finito, ya que los límites laterales tienen valores reales finitos, pero distintos. Al no ser continua, tampoco es derivable.

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en $x = 3$ y $x = 5$ (ver Figura 2).

b. De acuerdo con el Teorema de Rolle, si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que que $f'(c) = 0$. En este caso, la función es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, siendo además $f(0) = f(2) = 0$, por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. Debe existir por lo tanto un extremo en el punto $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Se deduce que $c = 1$. Se trata de un mínimo absoluto, como se comprueba gráficamente en la Fig. 2.

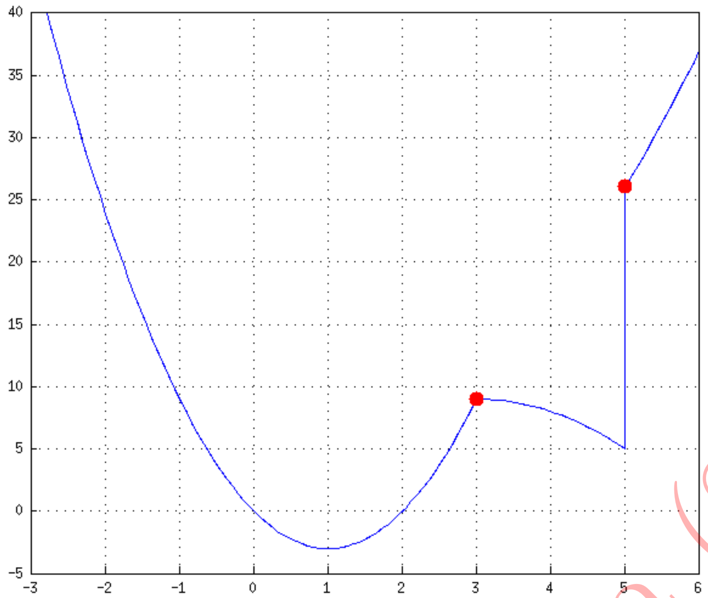

Figura 2: Gráfica de $f(x)$. Se indican en rojo los puntos de la función en $x = 3$ y $x = 5$, en los cuales la función no es derivable.

4. Para aplicar la fórmula de Taylor, se calculan a continuación las derivadas hasta orden 4 de $f(x)$ en el punto de centrado $x_0 = 1$.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \dfrac{1}{x} & \Rightarrow f(1) = 1 \\
f'(x) = (-1)\,x^{-2} & \Rightarrow f'(1) = -1 \\
f^{(2}(x) = (-1)(-2)\,x^{-3} & \Rightarrow f^{(2}(1) = 2 \\
f^{(3}(x) = (-1)(-2)(-3)\,x^{-4} & \Rightarrow f^{(3}(1) = -6 \\
f^{(4}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)\,x^{-5} & \Rightarrow f^{(4}(1) = 24
\end{array}
$$

Aplicando la fórmula, se obtiene el polinomio pedido:

$$
\begin{aligned}
P_5(x) &= 1 - (x-1) + \frac{2\,(x-1)^2}{2!} - \frac{6\,(x-1)^3}{3!} + \frac{24\,(x-1)^4}{4!} \\
&= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el término general *n-ésimo* de la serie se expresará como sigue, considerando la alternancia del signo, positivo en los términos impares y negativo en los pares:

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n (x-1)^n \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

Dicho polinomio aproxima el valor de la función en el entorno de $x = 1$, siendo tangente a dicha función en el punto de centrado (Fig. 3).

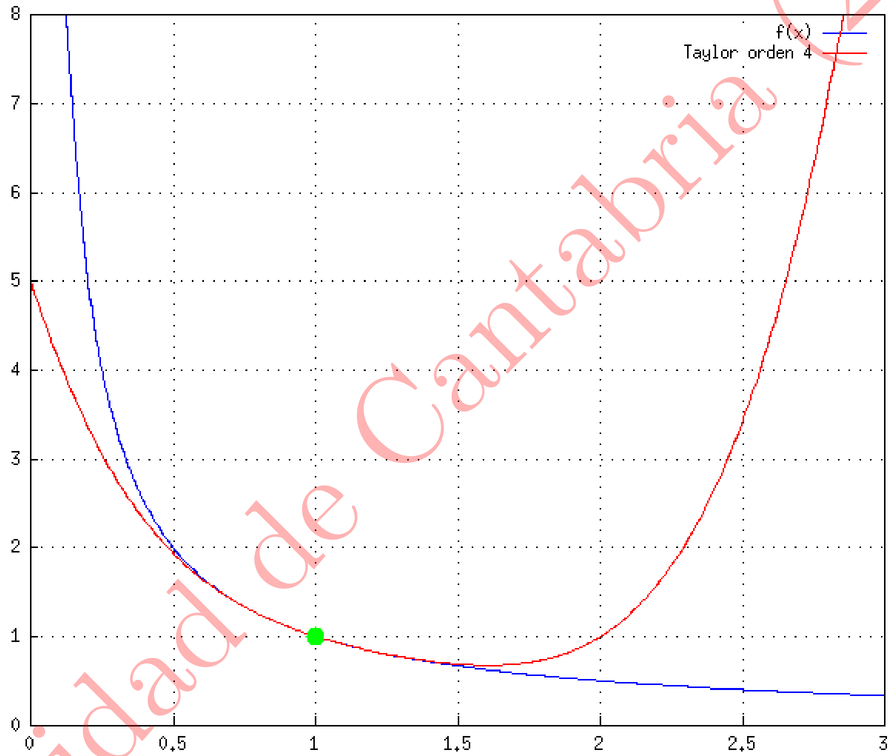

Figura 3: Gráfica de $f(x)$ (azul) y el polinomio de orden 4 centrado en $x = 1$ (rojo)