Examen Parcial

04 de Diciembre 2020

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Sea la función:
$$f(x) = \frac{1}{\log(x^2+1)} - \frac{1}{x^2}$$

   a) (1.5 puntos) Estudiar el valor de la función f en el entorno de cero

   b) (0.5 puntos) Analizar la continuidad de f en $\mathbb{R}$, indicando, de existir, el tipo de discontinuidad presente.

2. (*3 puntos*, 1 punto cada una) Hallar el valor de las siguientes integrales indefinidas:
$$I = \int x^2 \operatorname{sen} x dx \qquad J = \int \frac{2x-4}{x^2+2x+3} dx \qquad K = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + 8} dx$$

3. Sea la función definida a trozos:
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x\,|x-3| & \text{si } \ x < 5 \\ x\sqrt{x^2+2} & \text{si } \ x \geq 5 \end{cases}$$

   a. *(2 puntos)* Estudiar la derivabilidad en todo $\mathbb{R}$ de $f(x)$, empleando para tal fin la definición de derivada como cociente diferencial.

   b. *(1 punto)* Si f cumple la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo $[0, 2]$, determinar el punto correspondiente cuya existencia se afirma en dicho teorema.

4. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$, se pide:

   a. *(1.5 puntos)* Hallar polinomio de Taylor de orden 4 que aproxima a f en el entorno de $x = 1$

   b. *(0.5 puntos)* Expresar el término general de dicho polinomio

Soluciones:

1. a. Observando el dominio de la función, vemos que ésta será continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$, que es el único punto en que se anula el denominador. Para analizar la naturaleza de dicha discontinuidad, estudiaremos el valor del límite L en $x_0 = 0$, como nos pide el enunciado:

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(x^2+1)} - \frac{1}{x^2} \right) = \{\infty - \infty\} \quad \text{(indeterminación)}$$

Parece adecuado utilizar L'Hopital. Para poder aplicar la regla de L'Hopital, es necesario transformar la expresión para tener una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, basta operar la expresión:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \log(x^2+1)}{x^2 \log(x^2+1)} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad \text{(indeterminación)}$$

Ahora sí es posible aplicar L'Hopital, calculando las derivadas de primer orden en numerador y denominador:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}\left(1 - \dfrac{1}{x^2+1}\right)}{\cancel{2x}\left[\log(x^2+1) + \dfrac{x^2}{x^2+1}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2}{x^2+1}}{\log(x^2+1) + \dfrac{x^2}{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(x^2+1)\log(x^2+1) + x^2} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} \quad \text{(indeterminación)}$$

Continuando con la aplicación de L'Hopital, se calcula ahora de nuevo la derivada en numerador y denominador:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{2x\log(x^2+2) + (x^2+1)\dfrac{2x}{x^2+1} + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}}{\cancel{2x}\left[\log(x^2+1) + 1 + 1\right]} = \frac{1}{2}$$

b. Por lo tanto, la función no está definida en $x_0 = 0$, pero su límite en dicho punto existe y vale $\frac{1}{2}$. Concluimos que se trata de una *discontinuidad evitable*. Basta definir el valor de la función $f(0) = \frac{1}{2}$ para evitar la discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log(x^2+1)} - \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Finalmente, se presenta la gráfica de $f(x)$ en la Figura 1.

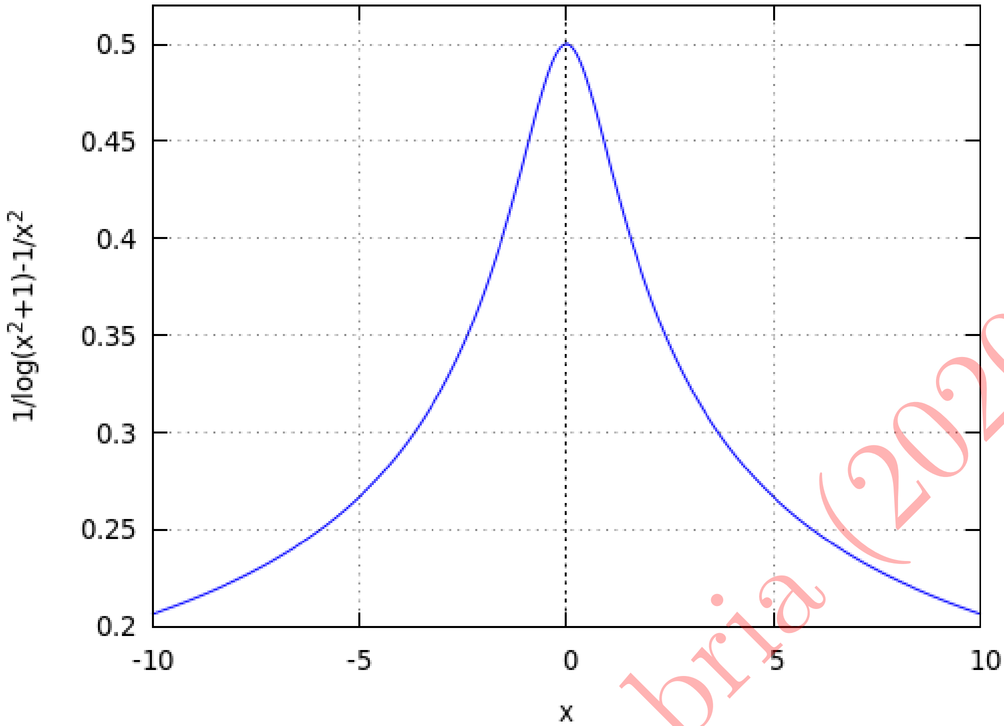

Figura 1: Gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo $[-10, 10]$. $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 0$, donde su límite vale $\frac{1}{2}$.

2. a. Se resuelve por partes:

$$I = \int x^2 \sin x dx \to \begin{cases} u = x^2 \Leftrightarrow du = 2xdx \\ \sin x dx = dv \Leftrightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$= -x^2 \cos x - \int -\cos 2x dx = -x^2 \cos x + \underbrace{\int 2x \cos x dx}_{A} + C$$

A continuación, volvemos a aplicar integración por partes para resolver la integral A:

$$A = \int 2x \cos x dx \to \begin{cases} u = 2x \Leftrightarrow du = 2dx \\ cosxdx = dv \Leftrightarrow v = \operatorname{sen} x dx \end{cases}$$

$$= 2x \operatorname{sen} x - \int 2 \operatorname{sen} x dx = 2x \operatorname{sen} x - 2 \int \operatorname{sen} x dx$$

$$= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C_1$$

Reuniendo soluciones, se llega al resultado:

$$\begin{aligned} I &= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C \\ &= 2x \operatorname{sen} x + (2 - x^2) \cos x + C \end{aligned}$$

b. Descomponemos el integrando de manera conveniente para obtener la derivada del denominador en el numerador, más una constante:

$$J=\int\frac{2x-4}{x^2+2x+3}dx=\int\frac{2x+2-6}{x^2+2x+3}dx=\underbrace{\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx}_{A}-\underbrace{\int\frac{6}{x^2+2x+3}dx}_{B}$$

$$A=\int\frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx=\log\left|x^2+2x+3\right|+C_1$$

Completando cuadrados en la expresión cuadrática del denominador en la integral B:

$$x^2+2x+3=(1)-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2+3=(x+1)^2+2$$

De modo que resulta una primitiva del tipo arco-tangente:

$$B=6\int\frac{dx}{(x+1)^2+2}=6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C_2$$

Finalmente, reuniendo las soluciones de A y B:

$$J=A-B=\log\left|x^2+2x+3\right|-3\sqrt{2}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$$

c. Se trata de una integral inmediata, dado que se reconoce el numerador como derivada del denominador:

$$K=\int\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x+8}dx=-\log(\cos x+8)+C$$

3. a. En primer lugar, analizando el valor absoluto de la rama izquierda de $f(x)$, se obtiene un punto crítico en $x = 3$. Por lo tanto, se define nuevamente la función incorporando dicho punto crítico en la definición explícita de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x & \text{si} \quad x < 3 \\ -x^2 + 6x & \text{si} \quad 3 \leq x < 5 \\ x\sqrt{x^2+2} & \text{si} \quad x \geq 5 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en un punto, es condición necesaria que sea continua en dicho punto. Se analiza la continuidad en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} -3x^2 - 6x = 9$$
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3+} -x^2 + 6x = 9$$

Los límites laterales coinciden, y por lo tanto el límite de la función en 3 existe y vale 9. Se analiza seguidamente la derivabilidad en $x = 3$, calculando para ello las derivadas laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 3^-} \frac{3x^2 - 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{3\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}} = 12$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 3^-} \frac{-x^2 + 6x - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-3)}} = 0$$

La función no es derivable en $x = 3$, ya que las derivadas laterales no coinciden

Continuidad en $x = 5$:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5} -x^2 + 6x = 5$$
$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to s} x\sqrt{x^2+2} = 5\sqrt{27}$$

La función no es continua en $x = 5$. Se trata de una discontinuidad no evitable de salto finito, ya que los límites laterales tienen valores reales finitos, pero distintos. Al no ser continua, tampoco es derivable.

Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en $x = 3$ y $x = 5$ (ver Figura 2).

b. De acuerdo con el Teorema de Rolle, si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que que $f'(c) = 0$. En este caso, la función es continua en el intervalo $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, siendo además $f(0) = f(2) = 0$, por lo que se cumplen las hipótesis del Teorema de Rolle. Debe existir por lo tanto un extremo en el punto $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$\frac{d}{dx}(3x^2 - 6x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Se deduce que $c = 1$. Se trata de un mínimo absoluto, como se comprueba gráficamente en la Fig. 2.

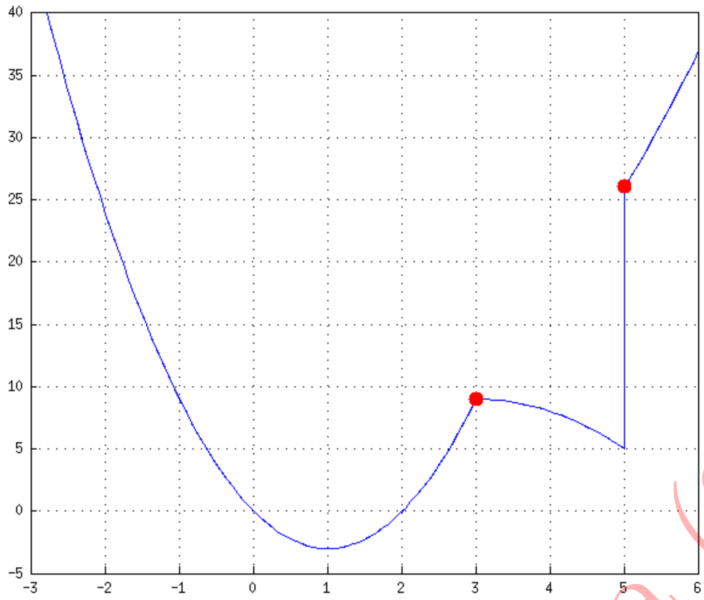

Figura 2: Gráfica de $f(x)$. Se indican en rojo los puntos de la función en $x = 3$ y $x = 5$, en los cuales la función no es derivable.

4. Para aplicar la fórmula de Taylor, se calculan a continuación las derivadas hasta orden 4 de $f(x)$ en el punto de centrado $x_0 = 1$.

$$
\begin{array}{ll}
f(x) = \dfrac{1}{x} & \Rightarrow f(1) = 1 \\
f'(x) = (-1)\, x^{-2} & \Rightarrow f'(1) = -1 \\
f^{(2}(x) = (-1)(-2)\, x^{-3} & \Rightarrow f^{(2}(1) = 2 \\
f^{(3}(x) = (-1)(-2)(-3)\, x^{-4} & \Rightarrow f^{(3}(1) = -6 \\
f^{(4}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)\, x^{-5} & \Rightarrow f^{(4}(1) = 24
\end{array}
$$

Aplicando la fórmula, se obtiene el polinomio pedido:

$$
\begin{aligned}
P_5(x) &= 1 - (x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} - \frac{6(x-1)^3}{3!} + \frac{24(x-1)^4}{4!} \\
&= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el término general *n-ésimo* de la serie se expresará como sigue, considerando la alternancia del signo, positivo en los términos impares y negativo en los pares:

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{n} (-1)^n (x-1)^n \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

Dicho polinomio aproxima el valor de la función en el entorno de $x = 1$, siendo tangente a dicha función en el punto de centrado (Fig. 3).

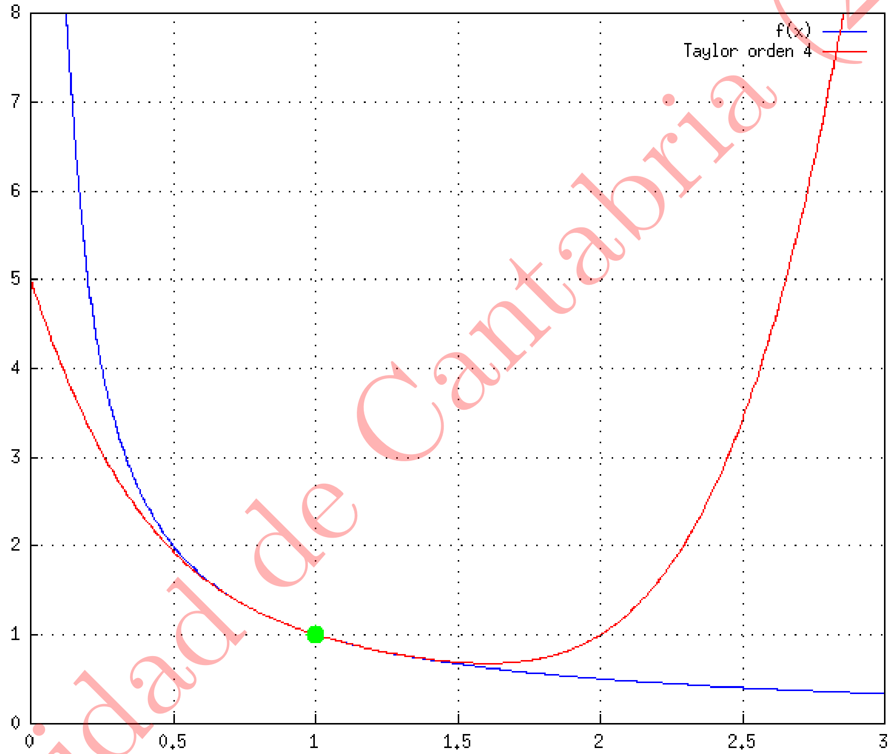

Figura 3: Gráfica de $f(x)$ (azul) y el polinomio de orden 4 centrado en $x = 1$ (rojo)