Recuperación Segundo Examen Parcial

15 de Enero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Dada la función $f(x) = \log(1+x)$, se pide:
   - a.) (*0.5 puntos*) Obtener la expresión de la derivada n-ésima de la función
   - b.) (*1.5 puntos*) Obtener el Polinomio de MacLaurin de grado 5
   - c.) (*0.5 puntos*) Obtener la expresión general de la serie obtenida hasta grado n.
2. Dada la función $f(x) = \arctan\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$, se pide:
   - a.) (*1.5 puntos*) La función derivada, calculando su expresión en la forma más simplificada posible
   - b.) (*1 punto*) La ecuación de la recta tangente y de la recta normal a $f(x)$ en $x_0 = 0$
3. (*3 puntos –1.5 cada integral–*). De las siguientes integrales semi-inmediatas, resolver **únicamente dos** de ellas, a elección del alumno:

$$a.)\ \int \frac{e^a \cdot e^{\tan x}}{4\cos^2 x}dx, \quad a = \text{cte.} \qquad b.)\ \int \frac{1}{b}x^2 4^{\operatorname{sen}(x^3)}\cos(x^3)dx, \quad b = \text{cte.}$$

$$c.)\ \int \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{5\operatorname{sen}^2 x}dx \qquad d.)\ \int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx$$

4. a.) (*0.5 puntos*) Enuncia el Teorema del Valor Medio (o de Lagrange)
   - b.) (*1.5 puntos*) Calcular el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que se cumplan las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x}{1-x} & si \quad x < 0 \\ \frac{2x}{1+ax} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Soluciones:

1. a.) Calculando las primeras derivadas, se determina la expresión de $f^{(n}(x)$ por inducción:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}\ ,\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\ ,\ f^{(3}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}\ ,\ f^{(4} = \frac{-6}{(1+x)^4}\ ,\ f^{(5} = \frac{24}{(1+x)^5}\ \cdots$$

Se observa que la sucesión resultante es alternada, siendo negativos los términos pares y positivos los impares. Por lo tanto, el término general de dicha sucesión es:

$$f^{(n}(x) = -1^{(n-1)} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

b.) Se toma a continuación la fórmula de Taylor:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \frac{f^{(3}(x_0)(x-x_0)^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}$$

, considerando el punto de centrado $x_0 = 0$, y teniendo en cuenta que $f(0) = \log(1) = 0$, de tal modo que el polinomio resultante es:

$$P_5(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

c.) Por lo tanto, el polinomio de orden n vendrá dado por la serie:

$$P_n(x) = \sum_{n=1}^{n} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

2. a.) Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x(1+\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{=1}}{\frac{[(1+\cos x)^2 + sen^2 x]\cancel{(1+\cos x)^2}}{\cancel{(1+\cos x)^2}}} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{1 + \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\cos x + 1} = \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} = \frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

b.) La recta tangente viene dada por la ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

En este caso, se trata de la recta tangente en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$, por lo tanto la recta tangente vendrá dada por la ecuación:

$$y = \frac{x}{2}$$

La recta normal, viene dada por la ecuación

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{es decir, } y = -2x$$

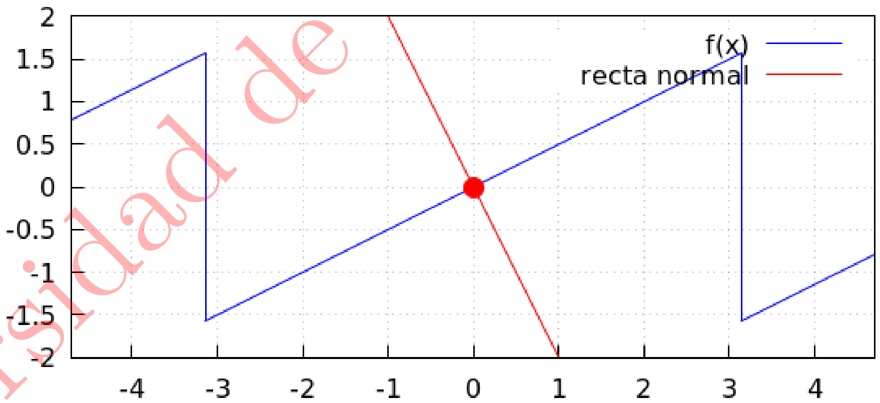

Figura 1: La función $f(x)$ es una función periódica ($T = 2\pi$), siendo inyectiva si se considera el dominio $(-\pi, \pi)$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Aquí se muestra la gráfica de $f(x)$ y la recta normal en el punto $x_0 = 0$. No se representa la recta tangente en $x_0 = 0$, ya que esta coincide con la propia función en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

3. a.) Se trata de una integral de la forma $\int e^u du$, siendo $u = \tan x$ y $du = \frac{1}{cos^2 x}dx$. Por lo tanto, es inmediata:

$$\int \frac{e^a \cdot e^{\tan x}}{4\cos^2 x}dx = \frac{e^a}{4}\int e^{\tan x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{e^a}{4}e^{\tan x} + C = \frac{e^{a+\tan x}}{4} + C$$

b.)

$$I = \int \frac{1}{b}x^2 4^{\operatorname{sen}(x^3)}\cos(x^3)dx = \frac{1}{b}\int x^2 4^{\operatorname{sen}(x^3)}\cos(x^3)dx$$

Tomando $u = \operatorname{sen}(x^3)$, y por tanto $du = \cos(x^3)3x^2dx$, vemos que es una integral inmediata del tipo $\int a^u du$, por lo que:

$$I = \frac{1}{3b}\int \underbrace{4^{\operatorname{sen}(x^3)}}_{4^u}\underbrace{\cos(x^3)3x^2dx}_{du} = \frac{4^{\operatorname{sen}(x^3)}}{3b\log(4)} + C$$

c.) Teniendo en cuenta la fórmula del seno del ángulo doble, resulta inmediato identificar una integral logarítmica de la forma $\int \frac{du}{u}$:

$$\int \frac{3\operatorname{sen}(2x)}{5\operatorname{sen}^2(x)}dx = \frac{3}{5}\int \frac{2\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}dx = \frac{3}{5}\log(\operatorname{sen}^2 x) + C = \frac{6}{5}\log|\operatorname{sen} x| + C$$

d.) La resolveremos descomponiendo el integrando de manera conveniente. La primera integral es un logaritmo, la segunda es una arcotangente, como queda de manifiesto tras completar cuadrados:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2+3}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{3}{x^2+2x+5}dx =$$
$$= \log(x^2+2x+5) + 3\int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \log(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

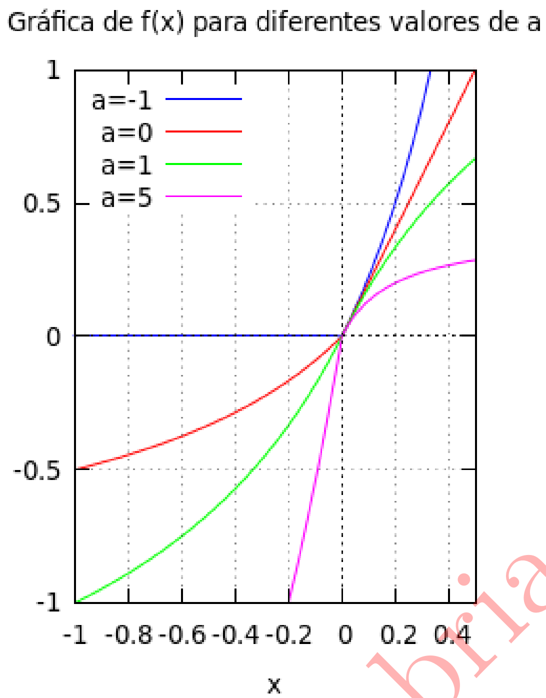

Figura 2: La función $f(x)$ del ejercicio 4 para diferentes valores del parámetro a, representada dentro del intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$. Como se aprecia, $f(x)$ sólo será derivable en $x_0 = 0$ para $a = 1$.

4. a.) El Teorema del Valor Medio (o de Lagrange), dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces $\exists\, c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La interpretación geométrica de dicho teorema implica que existe un punto $c \in (a, b)$, cuya recta tangente es paralela a la recta secante que une los puntos a y b.

b.) Las hipótesis del Teorema son

- que la función $f(x)$ sea continua en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$
- y que la función $f(x)$ sea derivable en el intervalo $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$

Estudiamos la continuidad en $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{(a+1)x}{1-x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{1+ax} = f(0) = 0$$

La función es continua en $x_0 = 0$ para cualquier valor de a. En cuanto a los extremos del intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, cabe destacar que la función no estará definida en $x_0 = \frac{1}{2}$ para $a = -2$, por lo que en este caso no se cumplirá la hipótesis de continuidad del Teorema. Por lo tanto, se cumple que $f(x)$ es continua en el intervalo $\left[-1, \frac{1}{2}\right] \quad \forall\, a \in \mathbb{R} - \{-2\}$

En cuanto a la derivabilidad, y asumiendo que $a \neq -2$, se estudian a continuación las derivadas laterales en $x_0 = 0$:

$$f'(0^-) = \lim_{x_0 \to 0^-} \frac{f(x) - f(x_{0^-})}{x - x_{0^-}} = \lim_{x_0 \to 0^-} \frac{\frac{(a+1)x}{1-x} - 0}{x - 0} = \lim_{x_0 \to 0^-} \frac{\cancel{x}(a+1)}{\cancel{x}(1-x)} = a+1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x_0 \to 0^+} \frac{f(x) - f(x_{0^+})}{x - x_{0^+}} = \lim_{x_0 \to 0^+} \frac{\frac{2x}{1+ax} - 0}{x - 0} = \lim_{x_0 \to 0^+} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}(1+ax)} = 2$$

La derivada sólo existirá cuando coincidan las derivadas laterales, es decir

$$f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$$

La función es derivable en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ si $a = 1$, y por lo tanto sólo se cumplen las hipótesis del Teorema del valor medio cuando $a = 1$. Se representa gráficamente esta solución en la Figura 2.

Queda por lo tanto la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{1-x} & si \quad x < 0 \\ \frac{2x}{1+x} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

para la cual existirá un punto $c \in \left(-1, \frac{1}{2}\right) \ / \ f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(-1)}{\frac{1}{2}-(-1)} = \frac{9}{10}$