Examen Parcial

25 de Enero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. (*3 puntos*) Hallar el volumen del sólido generado por la región acotada entre las gráficas de la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$ al girar alrededor del eje X.

2. (*2 puntos*) Evaluar la integral indefinida:

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{sen} x}$$

3. Dada la función $f(x, y) = \dfrac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$,

   a. (*1.5 puntos*) Estudiar la continuidad de la función en $\mathbb{R}^2$.

   b. (*0.5 puntos*) Calcular el gradiente de $f(x, y)$ en el punto $(x, y) = (1, -1)$.

   c. (*1 punto*) Calcular el valor de la derivada direccional en $(x, y) = (1, -1)$ considerando la dirección marcada por una recta que forma un ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ con el eje X.

4. (*2 puntos*) Determinar el carácter de la integral impropia:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)^{5/2}}$$

Soluciones:

1. Se obtienen los puntos de corte de la parábola con la recta, que dan el intervalo de integración:

$$x^2+1=x+3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Así, se delimita la región del plano que genera el volumen de revolución sobre el eje X, representada en la figura 1:

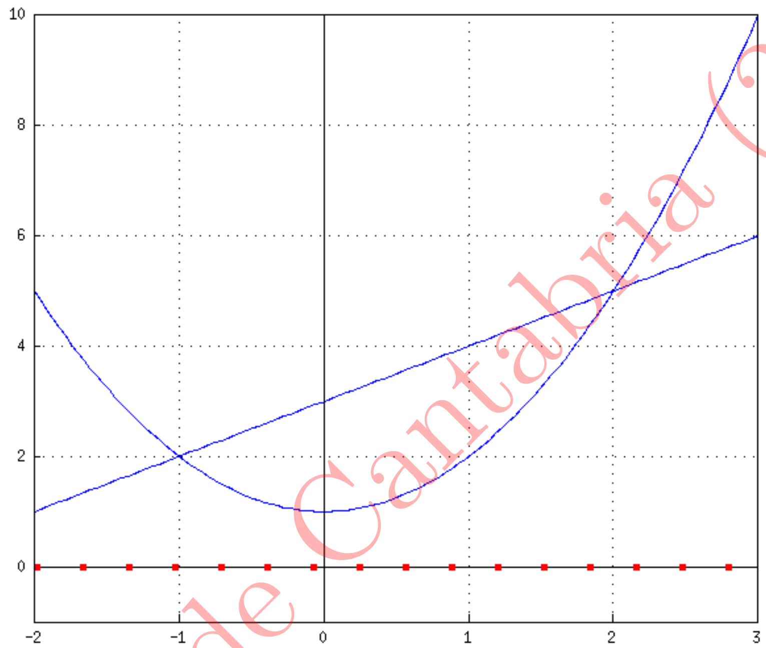

Figura 1: Región de revolución sobre el eje X. Se indica el eje de revolución mediante la línea punteada roja.

Así, considerando el método de las *arandelas*, tenemos que el diferencial de volumen:

$$dV = \pi h(R^2-r^2)dx \quad \text{con } R=x+3 \quad \text{y} \quad r=x^2+1$$

Por lo tanto:

$$V=\pi\int_{-1}^{2}\left[(x+3)^2-(x^2+1)^2\right]dx=\pi\int_{-1}^{2}(-x^4-x^2+6x+8)dx$$

$$=\pi\left[\frac{-x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+3x^2+8x\right]_{-1}^{2}=\frac{117\pi}{5} \quad \text{(uds. vol.)}$$

2. Se trata de una integral trigonométrica racional. Dado que no se encuentran paridades respecto del seno o el coseno, se aplica el cambio de variable "universal": $\tan\dfrac{x}{2} = t$. Así, se tienen las sustituciones $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ y $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Aplicando el cambio de variable:

$$I = \int \frac{dx}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \int \frac{\frac{2dt}{\cancel{1+t^2}}}{\frac{1-t^2}{\cancel{1+t^2}} + \frac{2t}{\cancel{1+t^2}}} = -2\int \frac{dt}{t^2 - 2t - 1} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - 2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{2 - (t-1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{\sqrt{2} - 1 + t}{\sqrt{2} + 1 - t}\right| + C$$

Al final queda una integral inmediata del tipo argumento tangente hiperbólica. Restaría deshacer el cambio de variable, quedando la función primitiva:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left|\frac{\sqrt{2} - 1 + \tan\frac{x}{2}}{\sqrt{2} + 1 - \tan\frac{x}{2}}\right| + K$$

3. a. Se trata de una función racional con dos expresiones polinómicas de x e y en numerador y denominador. Por lo tanto, la función será continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en aquellos puntos en los que se anule el denominador. En este caso, resulta inmediato comprobar que la función será continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en el origen. Para estudiar el carácter de esta discontinuidad, es necesario hallar el valor del límite en el origen. Se procede al cálculo de los límites reiterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0$$

Al ser éstos diferentes, se concluye que no existe el límite de f en el origen, y por lo tanto la función presenta una *discontinuidad no evitable* en dicho punto.

b. Para calcular el gradiente es necesario hallar primero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y^5 + 6xy^4 - 6x^2y^3 - 2x^3y^2}{y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy^4 + 6x^2y^3 - 6x^3y^2 - 2x^4y}{y^6 + 3x^2y^4 + 3x^4y^2 + x^6}$$

Por lo tanto, se obtienen las derivadas parciales en $(1,-1)$:

$$f_x(1,-1) = 1 \qquad f_y(1,-1) = 1$$

Siendo el vector gradiente $\nabla f(1,-1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

c. Se aplica la fórmula por la que la derivada direccional $D_u f(x, y) = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, siendo en este caso el vector unitario $\mathbf{u} = \cos\frac{\pi}{6}\mathbf{i} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\mathbf{j} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$, quedando la derivada direccional:

$$D_u f(1, -1) = (\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Se presenta la gráfica de $f(x, y)$ en la figura 2.

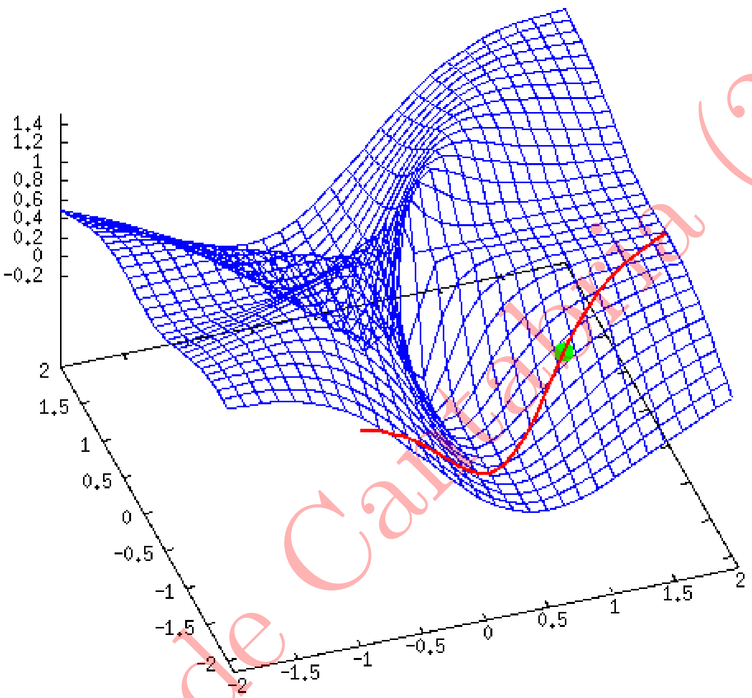

Figura 2: Representación gráfica de la superficie de la gráfica f(x,y), el punto (1,-1) y la dirección de la derivada direccional sobre la superficie, representada por la línea roja

4. Se trata de una integral impropia de primera especie. Por lo tanto:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}} = \lim_{p\to-\infty} \int_{p}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}} = \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{p}^{0} \frac{2xdx}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{p}^{0} \underbrace{(x^2+1)^{\frac{-5}{2}}}_{u^n} \cdot \underbrace{2xdx}_{du} = \lim_{p\to-\infty} \left.\frac{-1}{3(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right]_{p}^{0}$$

$$= \lim_{p\to-\infty} \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3(p^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{-1}{3}$$

Por lo tanto, se trata de una integral impropia de carácter *convergente*.