Recuperación Examen Parcial I

25 de Enero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Estudiar razonadamente la convergencia de las series:

   a.) (*1.5 puntos*)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}$$

   b.) (*1.5 puntos*)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$$

2. (*2 puntos*) Escribir en forma binómica el número complejo z:
   $$z = \log\left(\frac{(2+2\sqrt{3}i)^{-2}}{(1-i)^{-2}}\right)$$

3. *(3 puntos)* Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ definidas por:
   $$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad b_n = \log n \quad ,$$
   estudiar razonadamente si son equivalentes.

4. (*2 puntos*) Resolver la ecuación algebraica $x^6 + 1 = 0$, expresando el resultado en forma binómica.

Soluciones:

1. a.) Se comprueba como primer paso la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{(n+1)!} = 0$$

por comparación de órdenes de infinitud del numerador (exponencial) y denominador (factorial). Por lo tanto, ha de aplicarse alguno de los criterios de convergencia. Dado que se trata de una serie de términos positivos, se aplica en primer lugar el criterio del cociente:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1+1)!}}{\frac{5^n}{(n+1)!}} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

De acuerdo con el criterio del cociente, como $\lambda < 1$ se concluye que la serie es convergente.

b.) Se trata de una serie alternada. Por lo tanto, aplicaremos el criterio de Leibniz. Comprobamos las condiciones del Teorema de Leibniz:

Primero, el límite de la sucesión a_n (prescindiendo de la alternancia de signo) ha de ser cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

por comparación de órdenes de infinitud del numerador (potencial orden 1) y denominador (potencial de orden 2).

Segundo, la sucesión a_n ha de ser decreciente. En este caso, se cumple esta segunda condición, por ser un cociente de dos polinomios positivos, siendo el del denominador de mayor grado que el del numerador. Así, siendo decreciente, se considera la siguiente desigualdad:

$$\frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

Que demostramos operando la desigualdad:

$$\begin{array}{rcl} n\left[(n+1)^2+1\right] & > & (n+1)(n^2+1) \\ n^3+2n^2+n+1 & > & n^3+n^2+n+1 \\ 2n^2 & > & n^2 \\ 2 & > & 1 \end{array}$$

Dado que se cumplen ambas condiciones, se puede concluir por el Teorema de Leibniz que la serie es convergente. Cabe recordar que el criterio de Leibniz proporciona una condición suficiente (pero no necesaria) de convergencia.

2. Para hallar z, calculamos primero el valor de numerador y denominador, posteriormente el valor del cociente, y por último se calcula el logaritmo. Tomando $z = \log \dfrac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}}$, tenemos que:

$$w_1 = 2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \\ \alpha = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Por lo tanto, en forma exponencial se tiene que $w_1 = 4e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}$
Del mismo modo:

$$w_2 = 1 - i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 - \arctan \frac{|-1|}{1} = 0 - \arctan 1 \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

Siendo $w_2 = \sqrt{2}e^{\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)i}$. Entonces:

$$w_1^{-2} = (4e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i})^{-2} = 4^{-2}e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i} = \left(\frac{1}{16}\right) e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i}$$

y:

$$w_2^{-2} = \left(\sqrt{2}e^{\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)i}\right)^{-2} = \sqrt{2}^{-2}e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i} = \left(\frac{1}{2}\right) e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i}$$

Se calcula a continuación el cociente en su forma exponencial:

$$\frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\right) e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i}}{\left(\frac{1}{2}\right) e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i}} = \left(\frac{2}{16}\right) e^{\left[\frac{-2\pi}{3}-4k\pi-\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)\right]i} = \frac{1}{8}e^{\frac{-7\pi}{6}i} = \frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{8}$$

Finalmente, se calcula el valor del logaritmo:

$$z = \log\left(\frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}}\right) = \log\left(\frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{8}\right) = \log\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right) - \log(8) = \frac{5\pi}{6}i\underbrace{\log(e)}_{=1} - \log(8)$$

Siendo por lo tanto éste el resultado expresado en forma binómica:

$$z = \frac{5\pi}{6}i - \log(8)$$

3. Dos sucesiones a_n y b_n serán equivalentes siempre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

En este caso la resolución del límite se plantea utilizando el criterio de Stolz:

Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}, \quad \text{siempre que:}$$

   a) $\{b_n\}$ sea una sucesión monónotona divergente,
   o bien:

   b) $a_n \to 0, \quad b_n \to 0$ y $\{b_n\}$ sea monótona.

En este caso, se cumple la primera de las condiciones, ya que $a_n = \log(n)$ es monótona y divergente, por lo tanto es de aplicación el citerio de Stolz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}{\log(n+1) - \log(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(\frac{n+1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \sim \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Nótese el uso del infinitésimo equivalente $\log(f(x))$ con $f(x) \to 1 \sim f(x) - 1$

Al ser el límite igual a 1, se concluye que $a_n \sim b_n$.

4. De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra, la ecuación debe tener exactamente 6 soluciones complejas.

$$x^6 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = -1 + 0i \Leftrightarrow x = \sqrt[6]{-1 + 0i}$$

Para calcular dicha raíz, se emplea aquí la fórmula de de Moivre. Para ello, se convierte el complejo $z = 1 + 0i$ a su forma trigonométrica, resultando:

$$z = 1 + 0i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \\ \alpha = \pi - \arctan\frac{0}{1} = \pi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow z = \cos(\pi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\pi + 2k\pi)$$

Así, las soluciones de la ecuación vendrán dadas por:

$$\sqrt[6]{z} = \cos\left(\frac{1}{6}(\pi + 2k\pi)\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{1}{6}(\pi + 2k\pi)\right), \quad k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

dando valores a k:

- $k = 0: \quad x_1 = \cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k = 1: \quad x_2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} = i$
- $k = 2: \quad x_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
- $k = 3: \quad x_4 = \cos\frac{7\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{6} = \cos\frac{-5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- $k = 4: \quad x_5 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = \cos\frac{-\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{2} = -i$
- $k = 5: \quad x_6 = \cos\frac{11\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{11\pi}{6} = \cos\frac{-\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Se representan dichas soluciones sobre el plano complejo en la Figura 1.

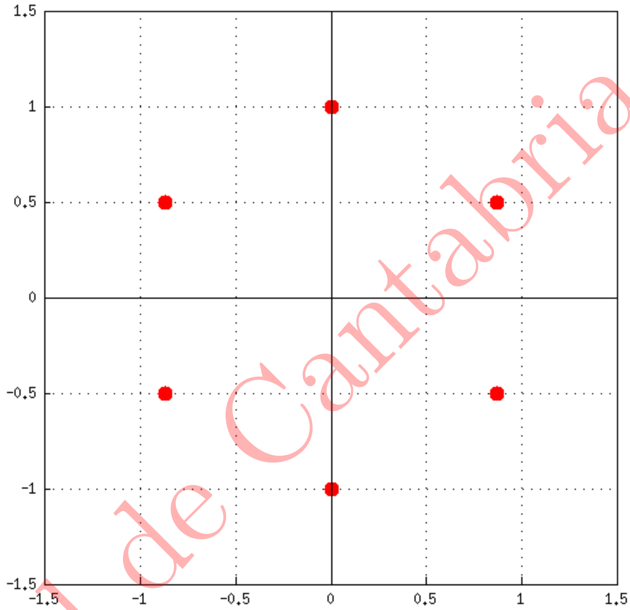

Figura 1: Los afijos de las soluciones de $x^6 + 1 = 0$ son los vértices de un hexágono regular sobre el plano complejo.