Recuperación Examen Parcial II

25 de Enero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

hallar:

a.) *(1 punto)* Sus asíntotas.

b.) *(2 puntos)* El polinomio de Taylor de grado 3 que aproxima la función en cada uno de sus extremos relativos, indicando la naturaleza de los mismos.

2. Hallar el valor de los siguientes límites:

a.) *(1.5 puntos)* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{x-1}$ b.) *(1.5 puntos)* $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right]$

3. Dada la función:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x}$$

a.) (*1 punto*) Indicar el dominio de definición de la función.

b.) (*2 puntos*) Estudiar la continuidad en todo $\mathbb{R}$, indicando si presenta alguna discontinuidad y de qué tipo es.

c.) (*1 punto*) Enunciar el Teorema de Bolzano, y justificar si se puede aplicar en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Soluciones:

1. a.) $Df = \mathbb{R} - \{-2\}$, por lo que hay una asíntota vertical en $x = -2$

   Las asíntotas horizontales se calculan considerando los límites de la función en el infinito. La función no tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2} = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$$

   Se calcula la posible existencia de asíntotas oblicuas conforme a la ecuación de la recta $y = ax + b$, donde:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+2x} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{x+2} = -2$$

   Por lo tanto, existe una asíntota ablicua, de ecuación $y = x - 2$.

   b.) Para determinar los extremos relativos, se calculan los puntos críticos a partir de la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

   Aplicando el criterio de la segunda derivada se determina si éstos son mínimos o máximos:

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3} \Rightarrow \begin{cases} f''(0) > 0 \to \text{Mínimo relativo en } x_0 = 0 \\ f''(-4) < 0 \to \text{Máximo relativo en } x_0 = -4 \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la formula de Taylor hasta grado 3, se calculan las derivadas hasta orden 3 y se evalúan en los extremos relativos. Obviamente, al tratarse de extremos relativos, las primeras derivadas son cero.

$$f(x) = \frac{x^2}{x+2} \rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(-4) = -8 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+4x}{(x+2)^2} \rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(-4) = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x+2)^3} \rightarrow \begin{cases} f''(0) = 1 \\ f''(-4) = -1 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{-24}{(x+2)^4} \rightarrow \begin{cases} f'''(0) = \frac{-3}{2} \\ f'''(-4) = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto, para el punto de centrado $x_0 = 0$ (polinomio de McLaurin), se obtiene:

$$P_3(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{4}$$

Para $x_0 = -4$ se obtiene el siguiente polinomio de Taylor:

$$P_3(x) = -8 - \frac{(x+4)^2}{2} - \frac{(x+4)^3}{4}$$

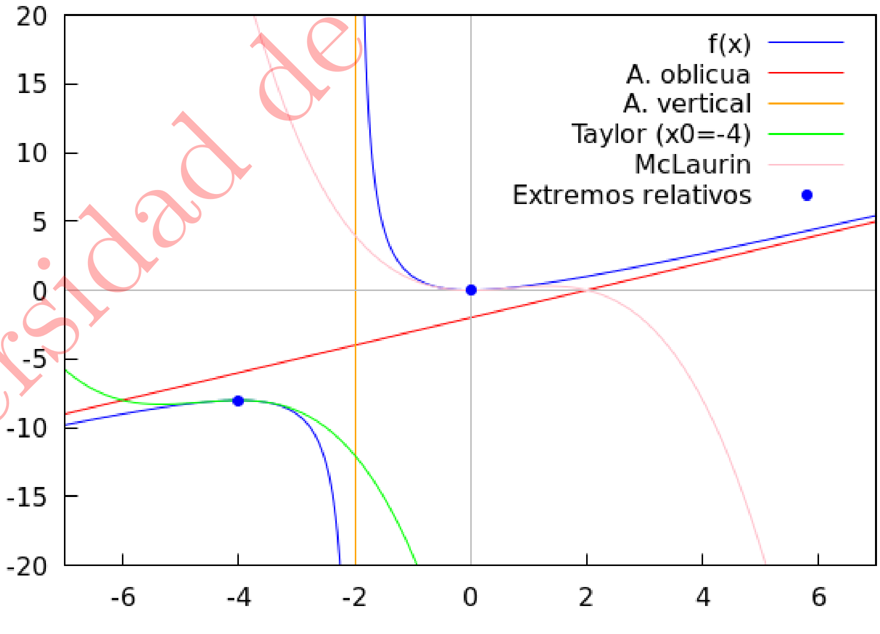

Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$, asíntotas, extremos relativos y polinomios de Taylor centrados en $x_0 = -4$ y $x_0 = 0$.

a.)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1} = [1^\infty]$$

El límite da lugar a una indeterminación de tipo 1^∞. Por lo tanto, se aplican logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x-1} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)}$$

Aplicando infinitésimos equivalentes, se tiene que $\log(1+f(x)) \sim f(x)$ cuando $f(x) \to 0$. Por lo tanto:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x-1)\log\left(1+\frac{1}{x+2}\right)} \sim e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

Y finalmente, por comparación del orden de infinitos en numerador y denominador:

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)} = e^1 = e$$

b.)

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}\right] = [\infty - \infty]$$

El límite da lugar a una indeterminación de tipo $[\infty - \infty]$. Operando la expresión:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\pi(e^{\pi x}+1) - 2\pi}{4x(e^{\pi x}+1)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

La indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$ permite aplicar L'Hôpital:

$$\to \text{aplicando L'Hôpital} \to L = \frac{\pi^2 e^{\pi x}}{4(e^{\pi x}+1) + 4\pi x e^{\pi x}} = \frac{\pi^2}{8}$$

2. a.) Se observa que x no puede ser cero, ya que da lugar a una indefinición en el numerador. Estudiamos los puntos que anulan el denominador:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $Df(x) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b.) Estudiamos la continuidad de la función en los puntos críticos identificados:

En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{-x}{x}}(-x)}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(-1)e^{-1}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{e(x-1)} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e}{x-1} = -e$$

Los límites laterales no coinciden, por lo que no existe el límite en $x = 0$. Dado que ambos límites laterales tienen un valor real finito, se trata de una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e}{x-1} = \infty$$

Los límites laterales son infinitos. La función presenta una discontinuidad asintótica en $x = 1$.

c.) Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y f toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto interior c en el que $f(c) = 0$. Dado que la función no es continua en el intervalo indicado, al ser discontinua en $x = 1$, no es de aplicación el Teorema de Bolzano.

La gráfica de la función se representa en la Figura 2.

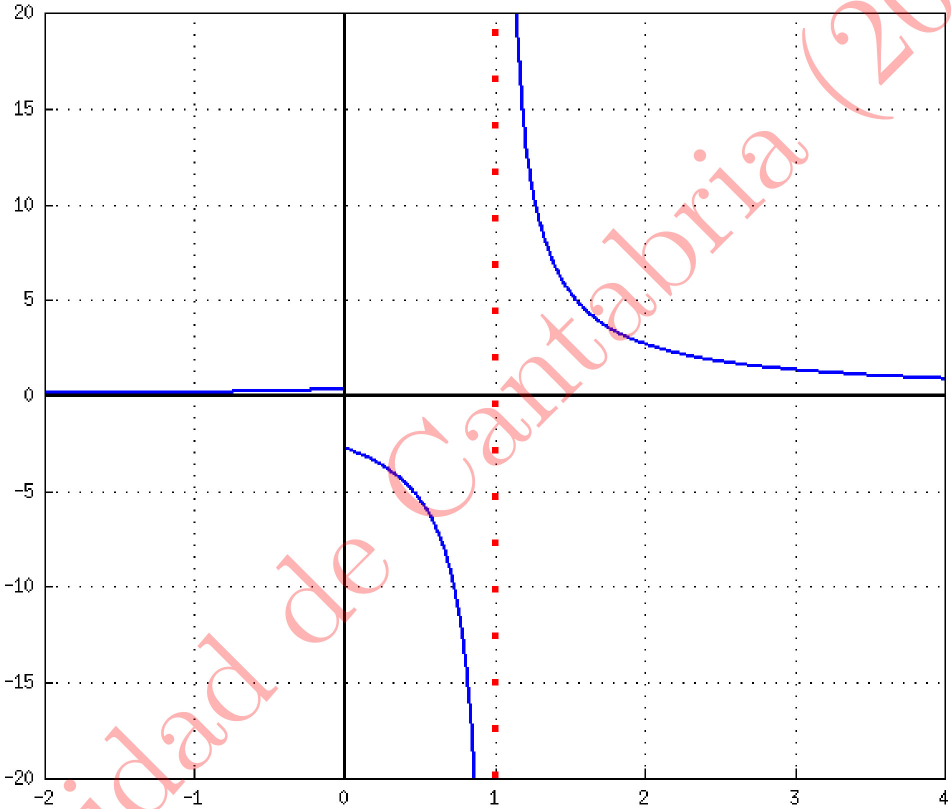

Figura 2: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x}$ en el intervalo $(-2, 4)$. La asíntota vertical en $x = 1$ se indica mediante la línea punteada roja.