Examen Convocatoria Extraordinaria

19 de Febrero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Dada la función $f(x) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}\right)$, se pide:

    a.) (*1.5 puntos*) La función derivada, calculando su expresión en la forma más simplificada posible

    b.) (*0.5 puntos*) La ecuación de la recta tangente y de la recta normal a $f(x)$ en $x_0 = 0$

2. (*2 puntos*) Determinar la convergencia de la serie, estudiando en primer lugar la condición necesaria de convergencia.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}$$

3. (*2 puntos*) Hallar la derivada direccional del campo escalar $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) - \log\left(\dfrac{2}{x-y}\right)$ en el punto $(\frac{\pi}{3}, 1)$ considerando la dirección del segmento que une el punto $P_1(8,-2)$ con $P_2(5,1)$

4. (*2 puntos*) Calcular la longitud del arco de la curva $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log(x)$ entre los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = e$

5. Calcular las integrales impropias, indicando su carácter:

    a.) *(1 punto)* $I = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-3x}dx$ b.) *(1 punto)* $J = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{(1+x)x^2}dx$

Soluciones:

1. a.) Aplicando la regla de la cadena:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}} \cdot \frac{\cos x(1+\cos x) - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \overbrace{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}^{=1}}{\frac{[(1+\cos x)^2 + sen^2 x]\cancel{(1+\cos x)^2}}{\cancel{(1+\cos x)^2}}} =$$

$$= \frac{1+\cos x}{1+\underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{=1} + 2\cos x + 1} = \frac{1+\cos x}{2+2\cos x} = \frac{1+\cos x}{2(1+\cos x)} = \frac{1}{2}$$

   b.) La recta tangente viene dada por la ecuación

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

En este caso, se trata de la recta tangente en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$, por lo tanto la recta tangente vendrá dada por la ecuación:

$$y = \frac{x}{2}$$

La recta normal, viene dada por la ecuación

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad \text{es decir, } y = -2x$$

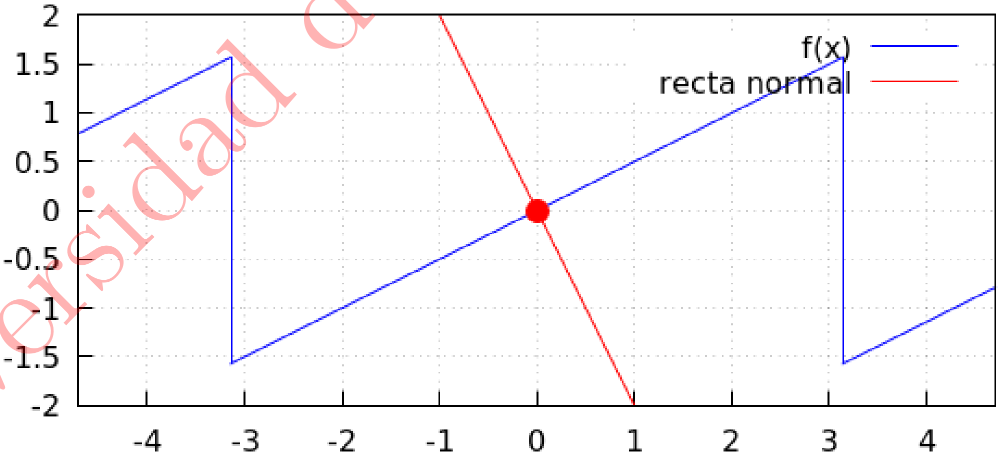

Figura 1: La función $f(x)$ es una función periódica ($T = 2\pi$), siendo inyectiva si se considera el dominio $(-\pi, \pi)$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Aquí se muestra la gráfica de $f(x)$ y la recta normal en el punto $x_0 = 0$. No se representa la recta tangente en $x_0 = 0$, ya que esta coincide con la propia función en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

2. Se comprueba en primer lugar la condición necesaria de convergencia:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n} = \left[1^{\infty}\right] \quad \text{(Indeterminación)}$$

Tomando logaritmos:

$$\log(L) = \lim_{n\to\infty}(2n^3-2n)\log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \sim \lim_{n\to\infty}(2n^3-2n)\left(\frac{n^2-1}{n^2}-1\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-2n^3+2n}{n^2} = -\infty \Rightarrow L = e^{-\infty} = 0$$

Al ser el límite de la sucesión igual a cero, se cunple la condición necesaria de convergencia. Se trata de una serie de términos positivos. En consecuencia, parece apropiado en este caso estudiar su convergencia usando el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{\frac{2n^3-2n}{n}} = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-2}$$

Entonces:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-2} = \left[1^{\infty}\right]$$

Tomando logaritmos:

$$\log(\lambda) = \lim_{n\to\infty}(2n^2-2)\log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \sim \lim_{n\to\infty}(2n^2-2)\left(\frac{n^2-1}{n^2}-1\right) = \lim_{n\to\infty}2(n^2-1)\left(\frac{-1}{n^2}\right)$$
$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{n^2}\right) = -2 \Rightarrow \lambda = e^{-2}$$

Siendo $\lambda < 1$, se concluye por el criterio de la raíz que la serie es *convergente*.

3. Se calcula en primer lugar el vector gradiente en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos xy + \frac{1}{x-y} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},1\right)} = \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi - 3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos xy - \frac{1}{x-y} \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{3},1\right)} = \frac{\pi}{6} - \frac{3}{\pi - 3}$$

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi-3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{\pi-3}\right)\mathbf{j}$$

El vector director:

$$\mathbf{v} = (5-8)\mathbf{i} + (1-(-2))\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Y por lo tanto el vector unitario:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{-3}{\sqrt{18}}\mathbf{i} + \frac{3}{\sqrt{18}}\mathbf{j} = \frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

Así, la derivada direccional queda como:

$$D_u f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = \left[\left(\frac{\pi}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\pi-3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\pi}{6} - \frac{3}{\pi-3}\right)\mathbf{j}\right] \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right)$$
$$= \frac{(\pi-9)(\pi+3)}{32^{\frac{3}{2}}(\pi-3)}$$

4. Se utilizará la fórmula de la longitud de un arco en coodenadas cartesianas:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

siendo $x_1 = 1$, $x_2 = e$ y la derivada

$$f'(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \Rightarrow [f'(x)]^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}$$

Así:

$$L = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}\right)} dx = \int_1^e \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}} dx$$
$$= \int_1^e \sqrt{\frac{(x^2+1)(x^2+1)}{4x^2}} dx = \int_1^e \frac{x^2+1}{2x} dx = \int_1^e \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2x}\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \log(x)\right]_1^e = \frac{e^2+1}{4}$$

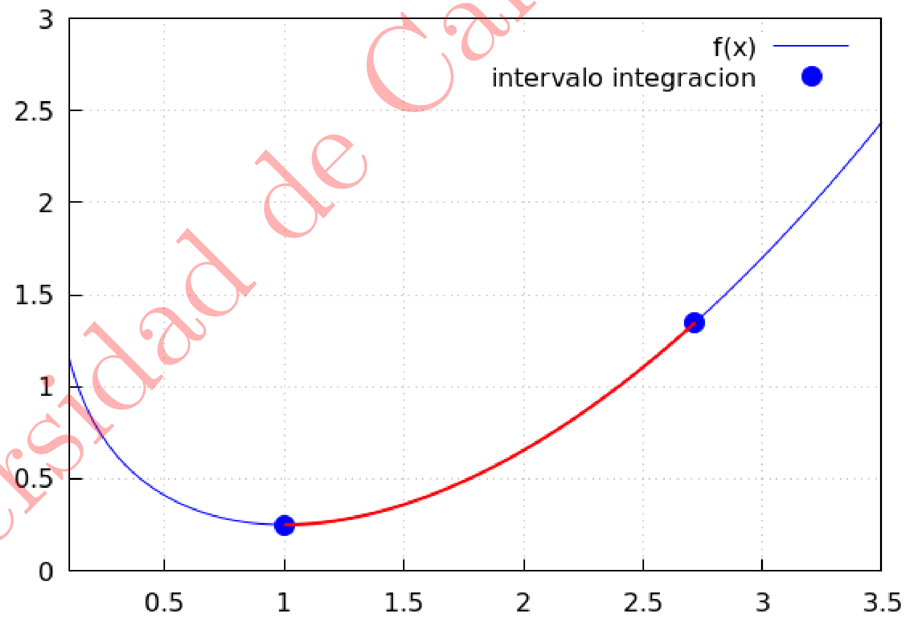

Figura 2: Gráfica de $f(x)$ en el intervalo $(0, 3.5)$ e intervalo de integración sobre el que se calcula la longitud de arco.

a.) Hallamos en un primer paso la integral indefinida. Para ello, se toma el cambio de variable $e^x = t$:

$$e^x = t$$
$$e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$$

Así:

$$\int e^{-3x} dx = \int t^{-3} \cdot \frac{dt}{t} = \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{-3} = \frac{-1}{3e^{3x}} + C$$

Y por lo tanto:

$$I = \frac{-1}{3} \lim_{H\to\infty} \left(\left. \frac{1}{e^{3x}} \right]_0^H \right) = \frac{-1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

Siendo como vemos la integral I de carácter convergente.

b.) La integral J es una integral impropia de primera especie. Se aborda primero la resolución de la integral indefinida, que es de tipo racional. Así, analizando el integrando puede verse que se trata de una función racional que puede descomponerse en un factor lineal único (correspondiente a la raíz $x = -1$) y dos factores lineales repetidos (la raíz $x = 0$, que aparece dos veces). Aplicando la descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{(1+x)\,x^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} \\ &= \frac{Ax^2 + B(x+1)\,x + C(x+1)}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{Ax^2 + 3x^2 + Bx + Cx + C}{x^2(x+1)} \\ &= \frac{x^2(A+3) + x(3+C) + C}{x^2(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Y por lo tanto, resolviendo primero la integral indefinida:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{(1+x)\,x^2} dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx &= -\log|x+1| + \log|x| - \frac{1}{x} \\ &= \log\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{1}{x} + C \end{aligned}$$

Finalmente:

$$J = \int_1^{\infty} \frac{2x+1}{(1+x)x^2}dx = \lim_{H\to\infty} \int_1^{H} \frac{2x+1}{(1+x)x^2}dx = \lim_{H\to\infty} \left(\log \frac{|x|}{|x+1|} - \frac{1}{x} \right]_1^H \Bigg)$$
$$= \lim_{H\to\infty} \left(\log\left(\frac{H}{H+1}\right) - \frac{1}{H} - \left(\log\left(\frac{1}{2}\right) - 1\right)\right)$$
$$= 1 - \log\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \log(1) + \log(2) = 1 + \log(2)$$

Se trata por tanto de una integral de carácter convergente.