Examen Convocatoria Extraordinaria

20 de Febrero 2021

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. Dada la función $f(x) = \dfrac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x}$

   a.) (*0.25 puntos*) Indicar su dominio.

   b.) (*1 punto*) Estudiar su continuidad en todo $\mathbb{R}$, clasificando las discontinuidades si las hubiere.

   c.) (*0.25 puntos*) Enunciar el Teorema de Bolzano y discutir su aplicación en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

2. Estudiar razonadamente la convergencia de las series:

   a.) (*1 punto*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$ b.) (*2 puntos*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R}$

3. (*1.5 puntos*) Escribir en forma binómica el número complejo z:

$$z = \log\left(\frac{(2+2\sqrt{3}i)^{-2}}{(1-i)^{-2}}\right)$$

4. (*2 puntos*) Determinar el carácter de la integral impropia:

$$I = \int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}}$$

5. (*2 puntos*) Hallar el volumen del sólido generado por la región acotada entre las gráficas de la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = x + 3$ al girar alrededor del eje X.

Soluciones:

1. a.) Se observa que x no puede ser cero, ya que da lugar a una indefinición en el numerador. Estudiamos los puntos que anulan el denominador:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $Df(x) = \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b.) Estudiamos la continuidad de la función en los puntos críticos identificados:
En $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{-x}{x}}(-x)}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}(-1)e^{-1}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{e(x-1)} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e}{x-1} = -e$$

Los límites laterales no coinciden, por lo que no existe el límite en $x = 0$. Dado que ambos límites laterales tienen un valor real finito, se trata de una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.
En $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{e}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\frac{x}{x}}\cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{e}{x-1} = \infty$$

Los límites laterales son infinitos. La función presenta una discontinuidad asintótica en $x = 1$.

c.) Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, y f toma valores de signos opuestos en los extremos de dicho intervalo tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$, existe al menos un punto interior c en el que $f(c) = 0$. Dado que la función no es continua en el intervalo indicado, al ser discontinua en $x = 1$, no es de aplicación el Teorema de Bolzano.
La gráfica de la función se representa en la Figura 1.

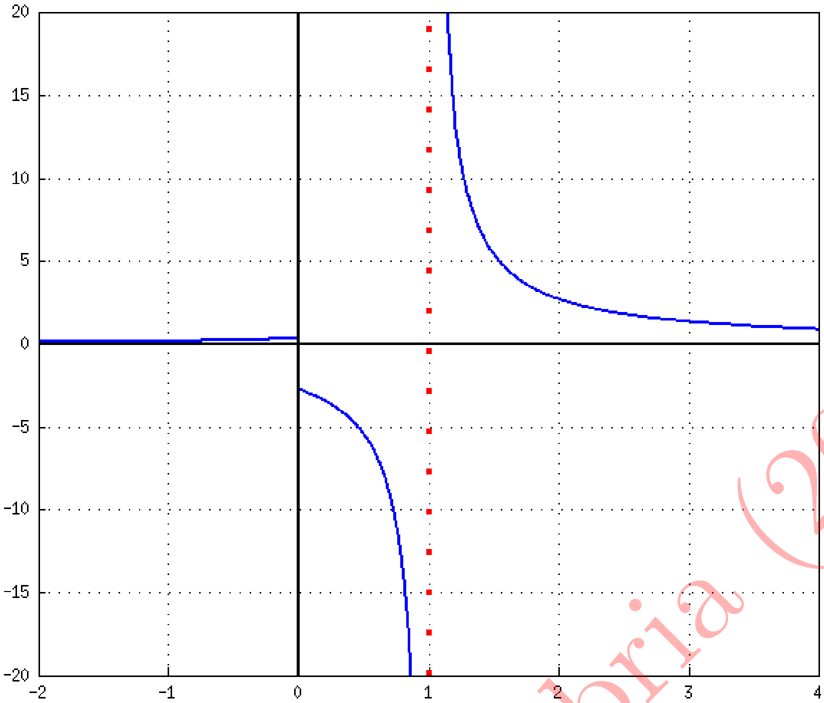

Figura 1: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{e^{\frac{|x|}{x}}|x|}{x^2 - x}$ en el intervalo $(-2, 4)$. La asíntota vertical en $x = 1$ se indica mediante la línea punteada roja.

2. a.) Dado que se trata de una serie de términos positivos (la x se encuentra elevada al cuadrado), se aplica uno de los criterios conocidos para este tipo de series. En este caso se utiliza el criterio del cociente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot (2n)! \cdot x^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2 \cdot (2n)! \cdot x^2}{(2n+2)\,(2n+1)\,(2n)!} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \cdot x^2$$

Por lo tanto,

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} \cdot x^2 = \frac{x^2}{4}$$

La serie sólo será convergente para valores de $\lambda < 1$, esto es:

$$\frac{x^2}{4} < 1 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow |x| < 2$$

Así, la serie será divergente para $\forall x \notin (-2, 2)$

Queda por dilucidar el comportamiento de la serie para $x = \pm 2$. En este caso $\lambda = 1$ y el criterio del cociente no decide. Sin embargo, puede demostrarse que el término $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es mayor que 1 para cualquier valor de n:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{con } x = \pm 2) = \frac{4n^2 + 8n + 4}{4n^2 + 6n + 2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} 4n^2 + 8n + 4 &> 4n^2 + 6n + 2 \\ 2n &> -2 \\ n &> -1 \end{aligned}$$

lo cual se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto la serie diverge.
Alternativamente, se puede recurrir en estos casos al criterio de Raabe:

$$L = \lim_{n - \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{(n^2 + 2n + 1)\, x^2}{4n^2 + 6n + 2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2}{4n^2} = \frac{-1}{2}$$

Al ser $L < 1$, se concluye que la serie es divergente para $x = \pm 2$.

b.) Se trata de una serie alternada. Por lo tanto, aplicaremos el criterio de Leibniz. Comprobamos las condiciones del Teorema de Leibniz:
Primero, el límite de la sucesión a_n (prescindiendo de la alternancia de signo) ha de ser cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$$

por comparación de órdenes de infinitud del numerador (potencial orden 1) y denominador (potencial de orden 2).
Segundo, la sucesión a_n ha de ser decreciente. En este caso, se cumple esta segunda condición, por ser un cociente de dos polinomios positivos, siendo el del denominador de mayor grado que el del numerador. Así, siendo decreciente, se considera la siguiente desigualdad:

$$\frac{n}{n^2 + 1} > \frac{n+1}{(n+1)^2 + 1}$$

Que demostramos operando sobre la misma:

$$\begin{aligned} n\left[(n+1)^2 + 1\right] &> (n+1)(n^2 + 1) \\ n^3 + 2n^2 + n + 1 &> n^3 + n^2 + n + 1 \\ 2n^2 &> n^2 \\ 2 &> 1 \end{aligned}$$

Dado que se cumplen ambas condiciones, se puede concluir por el Teorema de Leibniz que la serie es convergente. Cabe recordar que el criterio de Leibniz proporciona una condición suficiente (pero no necesaria) de convergencia.

3. Para hallar z, calculamos primero el valor de numerador y denominador, posteriormente el valor del cociente, y por último se calcula el logaritmo. Tomando $z = \log \frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}}$, tenemos que:

$$w_1 = 2 + 2\sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4 \\ \alpha = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{2} = \arctan \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

Por lo tanto, en forma exponencial se tiene que $w_1 = 4e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}$

Del mismo modo:

$$w_2 = 1 - i \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \alpha = 0 - \arctan \frac{|-1|}{1} = 0 - \arctan 1 \Rightarrow \alpha = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

Siendo $w_2 = \sqrt{2}e^{\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)i}$. Entonces:

$$w_1^{-2} = (4e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i})^{-2} = 4^{-2}e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i} = \left(\frac{1}{16}\right) e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i}$$

y:

$$w_2^{-2} = \left(\sqrt{2}e^{\left(\frac{-\pi}{4}+2k\pi\right)i}\right)^{-2} = \sqrt{2}^{-2} e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i} = \left(\frac{1}{2}\right) e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i}$$

Se calcula a continuación el cociente en su forma exponencial:

$$\frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{16}\right) e^{\left(\frac{-2\pi}{3}-4k\pi\right)i}}{\left(\frac{1}{2}\right) e^{\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)i}} = \left(\frac{2}{16}\right) e^{\left[\frac{-2\pi}{3}-4k\pi-\left(\frac{\pi}{2}-4k\pi\right)\right]i} = \frac{1}{8}e^{\frac{-7\pi}{6}i} = \frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{8}$$

Finalmente, se calcula el valor del logaritmo:

$$z = \log\left(\frac{w_1^{-2}}{w_2^{-2}}\right) = \log\left(\frac{e^{\frac{5\pi}{6}i}}{8}\right) = \log\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right) - \log(8) = \frac{5\pi}{6}i \underbrace{\log(e)}_{=1} - \log(8)$$

Siendo por lo tanto éste el resultado expresado en forma binómica:

$$z = \frac{5\pi}{6}i - \log(8)$$

4. Se trata de una integral impropia de primera especie. Por lo tanto:

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}} = \lim_{p\to-\infty} \int_{p}^{0} \frac{xdx}{(x^2+1)^{5/2}} = \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{p}^{0} \frac{2xdx}{(x^2+1)^{5/2}}$$

$$= \lim_{p\to-\infty} \frac{1}{2}\int_{p}^{0} \underbrace{(x^2+1)^{\frac{-5}{2}}}_{u^n} \cdot \underbrace{2xdx}_{du} = \lim_{p\to-\infty} \left. \frac{-1}{3(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\right]_p^0$$

$$= \lim_{p\to-\infty} \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{3(p^2+1)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{-1}{3}$$

Por lo tanto, se trata de una integral impropia de carácter *convergente*.

5. Se obtienen los puntos de corte de la parábola con la recta, que dan el intervalo de integración:

$$x^2+1 = x+3 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$$

Así, se delimita la región del plano que genera el volumen de revolución sobre el eje X, representada en la figura 2:

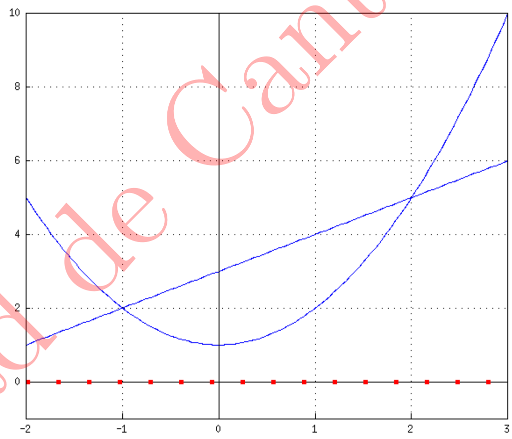

Figura 2: Región de revolución sobre el eje X. Se indica el eje de revolución mediante la línea punteada roja.

Así, considerando el método de las *arandelas*, tenemos que el diferencial de volumen:

$$dV = \pi h(R^2 - r^2)dx \quad \text{con } R = x+3 \quad \text{y} \quad r = x^2+1$$

Por lo tanto:

$$V = \pi \int_{-1}^{2} \left[(x+3)^2 - (x^2+1)^2\right] dx = \pi \int_{-1}^{2} (-x^4 - x^2 + 6x + 8)dx$$

$$= \pi \left[\frac{-x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 3x^2 + 8x \right]_{-1}^{2} = \frac{117\pi}{5} \quad \text{(uds. vol.)}$$