Examen Parcial

28 de Octubre 2020

Instrucciones:

- Las respuestas deben estar escritas en bolígrafo (azul o negro). Nunca en lápiz.
- No se permite el uso de cuadernos u hojas propias.
- No se permite el uso de calculadora.
- Se pueden utilizar tantas hojas como sean necesarias, tanto de borrador como para presentar las soluciones, que serán entregadas por el profesor.
- El nombre y apellidos del alumno deberán aparecer en el encabezado de todas las hojas entregadas, que además deberán estar numeradas.

1. (*3 puntos*) Hallar el complejo $z = \log(\sqrt{w})$, siendo w tal que $\frac{w}{1+\sqrt{3}i}$ es un número real, y su módulo $|w| = 1$

2. (*2 puntos*) Estudiar el carácter de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{3^{n-2}}$$

3. (*2 puntos*) Hallar el dominio de la función $g \circ h \circ f$, dadas:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 3x - 4} \qquad g(x) = \log x \qquad h(x) = \sqrt{x}$$

4. Dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{4^n} x^n$$

   a. (*1.5 puntos*) Determinar el radio de convergencia
   b. (*1.5 puntos*) Hallar el intervalo de convergencia

Soluciones:

1. Se comienza tomando $w = x + yi$ y operando el cociente del enunciado:

$$u = \frac{w}{1+\sqrt{3}i} = \frac{x+yi}{1+\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = \frac{x+\sqrt{3}y}{4} + \frac{y-\sqrt{3}x}{4}i$$

A continuación, considerando las condiciones dadas en el enunciado:

a) El número es real, por lo que la parte imaginaria ha de ser cero:

$$u \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y-\sqrt{3}x}{4} = 0 \Rightarrow y - \sqrt{3}x = 0$$

b) Su módulo, es la unidad, y por lo tanto:

$$|w| = \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Y de aquí se extrae un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} y - \sqrt{3}x = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \sqrt{3}x \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \\ 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \end{array}$$

Siendo por tanto $w_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $w_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Antes de calcular el logaritmo, se pasa a forma exponencial:

$$w_1 \Leftrightarrow \begin{cases} |w_1| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ \alpha = \arctan\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow e^{\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)i}$$

$$w_1 \Leftrightarrow \begin{cases} |w_2| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1 \\ \alpha = \arctan\sqrt{3} - \pi = \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow e^{\left(\frac{-2\pi}{3}+2k\pi\right)i}$$

Y por lo tanto:

$$\log\sqrt{w_1} = \log\left(e^{\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{2}i}\right) = \left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)i, \quad k = 0, 1$$

$$\log\sqrt{w_2} = \log\left(e^{\frac{\frac{-2\pi}{3}+2k\pi}{2}i}\right) = \left(\frac{-\pi}{3} + k\pi\right)i, \quad k = 0, 1$$

Dando valores a k, se obtendrían las cuatro soluciones:

$$\frac{\pi}{6}i + 2k'\pi, \quad \frac{7\pi}{6}i = \frac{-5\pi}{6}i + 2k'\pi, \quad \frac{-\pi}{3}i + 2k'\pi \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{3}i + 2k'\pi \qquad k' \in \mathbb{Z}$$

2. Se trata de una serie alternada. Un criterio de utilidad en estos casos puede ser el criterio de Leibniz, por el cual, dada una serie alternada de la forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, ésta será convergente si se dan dos condiciones de manera simultánea: i) que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y ii), que a_n sea monónotona decreciente. Comprobemos ambas condiciones:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}} = 0$$

El límite es inmediato por comparación de órdenes de infinitud de las funciones exponenciales de numerador (base menor) y denominador (base mayor).

La segunda condición es que a_n sea monótona decreciente. Si es así, debe verificarse lo siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}}{\frac{2^n}{3^{n-2}}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2^{n+1}\cdot 3^{n-2}}{2^n \cdot 3^{n-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < 1$$

Lo cual se cumple para cualquier valor de n, siendo por lo tanto monótona *estrictamente* decreciente.

Por lo tanto, se concluye que la serie es *convergente* de acuerdo con el criterio de Leibniz.

Alternativamente,
podemos considerar el teorema del valor absoluto, por el cual si la serie es absolutamente convergente, entonces es convergente. Para ello, basta considerar la serie en valor absoluto y analizarla recurriendo a alguno de los criterios para series de términos positivos. A modo de ejemplo, aplicamos aquí el criterio de Cauchy (o de la raiz) considerando el valor de $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^{n-2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^{1-\frac{2}{n}}} = \frac{2}{3}$$

Como $L < 1$, se concluye que la serie es *absolutamente* convergente, y por lo tanto, convergente (Fig. 1).

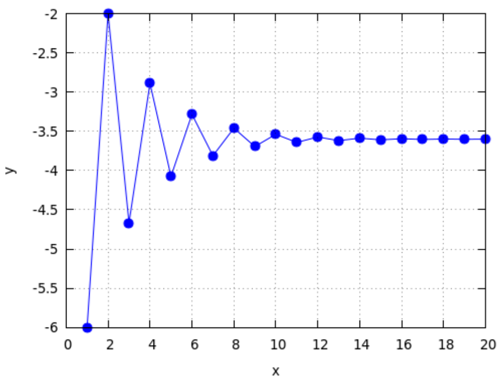

Figura 1: Representación gráfica de las sumas parciales n-ésimas, desde $n = 1$ hasta $n = 20$. Se muestra la convergencia de la serie al valor $-18/5$.

3. Se escribe la función $g \circ h \circ f$ como

$$k(x) = g \circ f \circ h = \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x-4}}\right)$$

Para el cálculo de Dk, se considera que $D_{log(x)} = (0, +\infty)$, y que $D_{\sqrt{x}} \geq 0$ (al ser raíz par). Por lo tanto:

$$\frac{x+1}{x^2-3x-4} > 0$$

Existen dos puntos de no definición de la función donde se anula el denominador:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1, \quad x = 4$$

Estudiando los intervalos definidos por ambos puntos críticos, se tiene que:

- Si $x < -1 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-3x-4} < 0$
- Si $-1 < x < 4 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-3x-4} < 0$
- Si $x > 4 \Rightarrow \frac{x+1}{x^2-3x-4} > 0$

Por lo tanto, se concluye que $Dk = (4, +\infty)$. Se representa gráficamente la solución en la Figura 2.

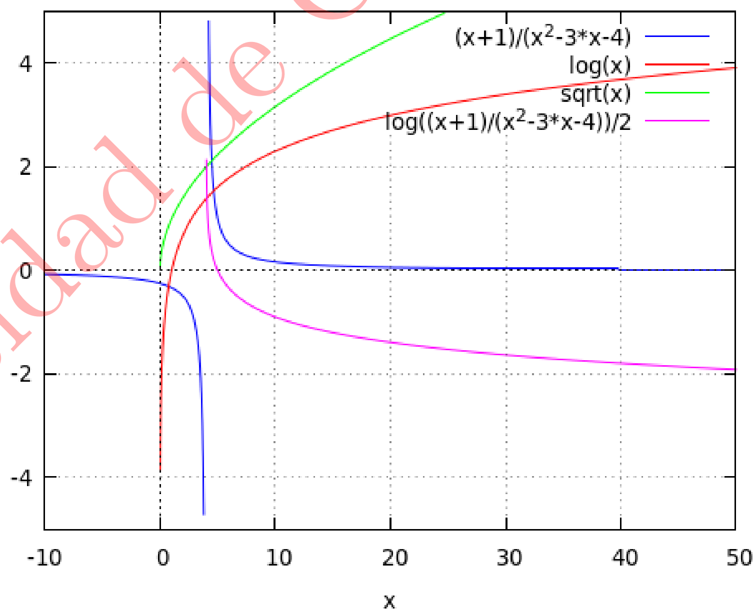

Figura 2: Gráficas de las funciones $g(x) = \log x$ (rojo), $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x-4}$ (azul), $h(x) = \sqrt{x}$ (verde) y $g \circ f \circ h = \log\left(\sqrt{\frac{x+1}{x^2-3x-4}}\right)$ (rosa).

4. En el ejercicio se presenta una serie de potencias centrada en $x_0 = 0$. Por lo tanto, en este punto la serie será convergente.

   a. Se estudia la convergencia absoluta de la serie empleando el criterio de d'Alembert:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)^3 \cdot x^{n+1}}{4^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n^3 \cdot x^n}{4^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|4^n \cdot (n+1)^3 \cdot x^{n+1}|}{|4^{n+1} \cdot n^3 \cdot x^n|} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{4 \cdot n^3} = \frac{|x|}{4}$$

   Para que la serie sea convergente de acuerdo con el criterio del cociente, el valor de L debe ser menor que uno:

$$\frac{|x|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x| < 4$$

   Siendo por lo tanto el radio de convergencia $R = 4$

   b. Para calcular el intervalo de convergencia habrá que estudiar el carácter de la serie en los extremos del intervalo, $x = -4$ y $x = 4$. En este caso, basta con analizar la condición necesaria de convergencia:
   Para $x = -4$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot (-4)^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^3 \quad \text{(no existe el límite, serie oscilante)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot 4^n}{4^n} = \lim_{n\to\infty} n^3 = \infty \quad \text{(serie divergente)}$$

   Por lo tanto, la serie será convergente dentro del intervalo $I = (-4, 4)$.