Tema 1: Números complejos

Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Valor absoluto y concepto de distancia en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^2$.
- Representación cartesiana de puntos del plano. Lugares geométricos: ecuación de la recta, circunferencia y elipse.
- Representación gráfica, suma y diferencia de vectores en el plano.
- Funciones exponenciales. Propiedades y operaciones elementales.
- Funciones logarítmicas. Propiedades y operaciones elementales.
- Funciones polinómicas.
- Fórmula del binomio de Newton.
- Polinomios.
- Trigonometría: medidas de ángulos, funciones seno, coseno y tangente y relaciones trigonométricas básicas.

Resumen teórico

1. SISTEMAS NUMÉRICOS

Los diferentes conjuntos de números surgen por necesidades prácticas de dar sentido a algunas operaciones algebraicas.

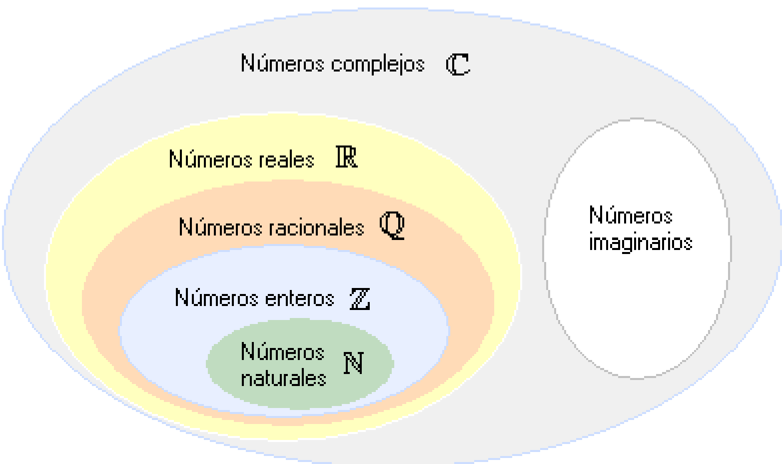

Figura 1.- Diferentes conjuntos de números.

2. DEFINICIÓN DE NÚMERO COMPLEJO

Si consideramos la ecuación $x^2+1=0$, observamos que no existe ningún número real que la verifique. Con objeto de dar solución a esta ecuación vamos a definir un conjunto de números que amplíen a los números reales.

Definición *(Números complejos)*.- A los elementos de $\mathbb{R}^2$ se les llama números complejos y al conjunto de números complejos le denotamos en lo sucesivo por $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{C}=\{(a,b)\,/\,a,b\in\mathbb{R}\}$$

Cada número complejo $z=(a,b)$ puede identificarse con el punto P de coordenadas (a,b), que recibe el nombre de afijo de z.

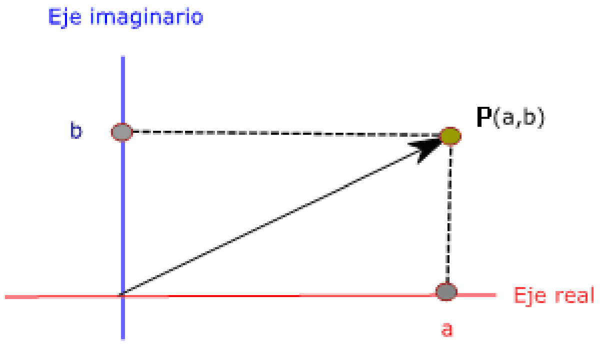

Figura 2.- Representación de los números complejos

Forma binómica de un complejo.- El complejo $z=(a,b)$ se representa en forma binómica, como $z=a+bi$

Definición *(Conjugado)*.- Sea $z=a+bi$ un número complejo. Se define el conjugado de z, y se representa por $\overline{z}$, como el número complejo $\overline{z}=a-bi$.

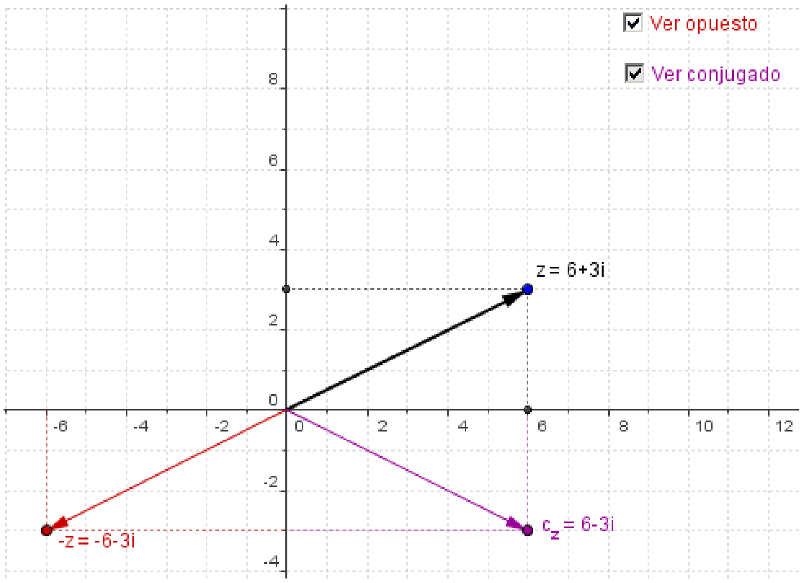

Figura 3.- Opuesto y conjugado

PROPIEDADES.- Se verifican las siguientes propiedades:

(i) $\overline{\overline{z}} = z$ (ii) $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$

(iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ (iv) $z \cdot \overline{z}$ es un número real positivo.

Definición *(Parte real e imaginaria)*.- Si $z = a + bi$ es un número complejo se define la parte real de z, $\mathrm{Re}(z)$, y la parte imaginaria, $\mathrm{Im}(z)$, como

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} = a \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} = b \in \mathbb{R}$$

3.- MÓDULO Y ARGUMENTO

Definición *(Módulo)*.- Si $z = (a,b)$ es un número complejo se define el módulo de z, $|z|$, como:

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Interpretación geométrica del módulo *(Distancia)*.- Sean los complejos $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$, el valor de $|z - z_0|$ representa la distancia entre los afijos de los complejos z y z_0.

De la interpretación geométrica del módulo se deduce que la igualdad $|z-z_0|=r$ la verifican todos los puntos (x,y) del plano, cuya distancia al punto (x_0,y_0) es igual a r. Elevando la igualdad anterior al cuadrado se obtiene la ecuación de la circunferencia de centro (x_0,y_0) y radio r.

$$|z-z_0|^2=\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Definición (*Argumento*).- Sea z un número complejo con afijo P. El ángulo medido en radianes que forma el vector OP con la dirección positiva del eje real se llama argumento del número complejo z, $\varphi=\operatorname{Arg} z$.

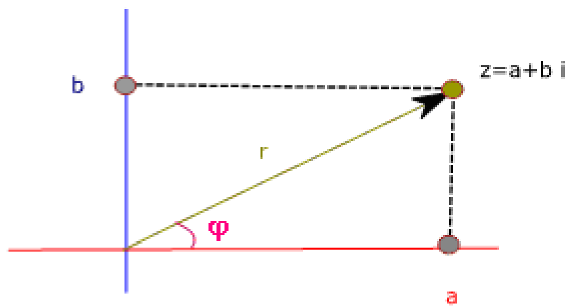

Figura 4.- Representación del módulo y argumento de un número complejo

PROPOSICIÓN.- Si z es un número complejo y φ su argumento se cumple:

$$\cos\varphi=\frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} \qquad \operatorname{sen}\varphi=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$$

Llamaremos valor principal del argumento al comprendido entre $-\pi$ y π: $-\pi<\arg z\le\pi$.

Formas de un complejo en función de su módulo y de su argumento:

- Forma polar: $z=r_\varphi$
- Forma trigonométrica: $z=r(\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi)$
- Forma exponencial $z=re^{i\varphi}$, siendo

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\operatorname{sen}\varphi$$ (Fórmula de Euler)

4.- OPERACIONES ELEMENTALES

SUMA Y DIFERENCIA

- forma binómica

$$z \pm w = (a+bi) \pm (a'+b'i) = (a \pm a') + (b \pm b')i$$

PRODUCTO

- forma binómica: $z \cdot w = (a+bi)\cdot(a'+b'i) = (aa'-bb') + (ab'+a'b)i$
- forma módulo-argumento o polar: si $z = r_\varphi$ y $w = r'_{\varphi'}$ entonces se cumple que

$$zw = (rr')_{\varphi+\varphi'}$$

- forma exponencial: $zw = (rr')e^{i(\varphi+\varphi')}$

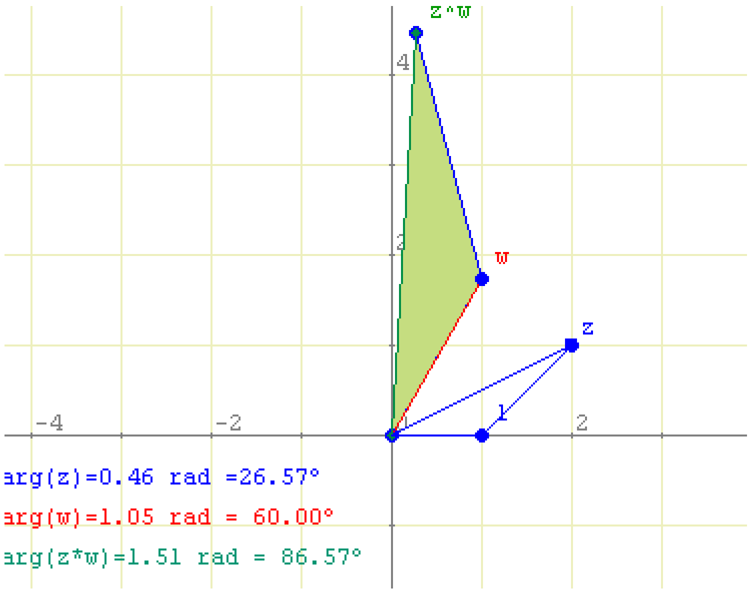

Figura 5. Representación del producto de números complejos

COCIENTE

Consideramos z y w dos números complejos siendo w distinto de cero. El cociente z/w se reduce al producto de z con el inverso de w: $\frac{z}{w} = zw^{-1}$.

- forma binómica: Para calcular el cociente de z y w se debe multiplicar el numerador y denominador por el conjugado del denominador, con ello el cociente se reduce a

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{a'+b'i} = \frac{(a+bi)(a'-b'i)}{(a'+b'i)(a'-b'i)} = \frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2} + \frac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}i$$

- forma polar: si $z = r_\varphi$ y $w = r'_{\varphi'}$, se tendrá $\frac{z}{w} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\varphi-\varphi'}$

- forma exponencial: $\frac{z}{w} = \left(\frac{r}{r'}\right) e^{i(\varphi-\varphi')}$

5.- FUNCIÓN EXPONENCIAL

Definición *(Función exponencial)*.- Sea $z = a+bi$, definimos la función exponencial como

$$e^z = e^{a+bi} = e^a(\cos b + i\,\text{sen}\, b)$$

PROPIEDADES.- Si $z, w \in \mathbb{C}$ se cumplen las siguientes propiedades

(i) $e^{z+w} = e^z e^w$ (ii) $e^0 = 1$ (iii) $e^z e^{-z} = 1$

(iv) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$ (v) $\left|e^z\right| = e^{\text{Re}(z)}$ (vi) $\arg e^z = \text{Im}(z)$

(vii) $\text{Re}\left(e^z\right) = \text{Re}\left(e^{a+bi}\right) = e^a \cos b$ (viii) $\text{Im}\left(e^z\right) = \text{Im}\left(e^{a+bi}\right) = e^a senb$

6.- POTENCIAS Y RAÍCES ENÉSIMAS DE COMPLEJOS

POTENCIAS ENTERAS

Si el exponente "n" es un número entero

$$z = re^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Entonces

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\right]^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi\right)$$

A esta expresión se la conoce con el nombre de *fórmula de Moivre*.

RAÍCES ENÉSIMAS

Análogamente,

$$z^{1/n} = \left[r(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)\right]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2\ldots(n-1)$$

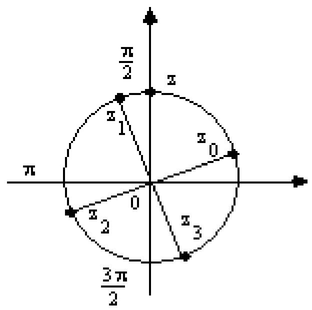

Figura 6.- Representación gráfica de las raíces cuartas de $16_{\pi/2}$.

7.- LAS FUNCIONES POLINÓMICAS. RAÍCES.

Definición *(Grado y coeficiente director)*.- Sea el polinomio

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n \quad \text{con} \quad a_n \neq 0$$

Al número natural n se le llama grado del polinomio no nulo y al coeficiente a_n coeficiente director.

Definición (Raíz de un polinomio).- Se dice que un número complejo z_0 es raíz del polinomio $p(z)$ si

$$p(z_0) = a_0 + a_1 z_0 + a_2 {z_0}^2 + \ldots + a_n {z_0}^n = 0 .$$

PROPOSICIÓN.- El número complejo z_0 es raíz del polinomio $p(z)$ si y solamente si dicho polinomio es divisible por ($z - z_0$).

PROPOSICIÓN.- Sea $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ con $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}$. Entonces si z_0 es una raíz compleja también lo es su conjugada.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.- Un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ ($a_i \in \mathbb{C}$) se puede escribir de la forma

$$p(x) = a_n (x - \lambda_1)^{k_1} (x - \lambda_2)^{k_2} \ldots (x - \lambda_r)^{k_r}$$

siendo $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$ (k_i es la multiplicidad de la raíz λ_i).