Tema 3: Sucesiones y Series Numéricas. Series de Potencias.

Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Desigualdades de números reales.
- Conceptos generales de funciones: dominio, cotas, crecimiento, …
- Conocimiento de las propiedades de las funciones elementales: polinómicas, racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y del valor absoluto.
- Cálculo de límites, indeterminaciones y regla de L'Hôpital.

Resumen teórico

Sucesiones numéricas

1. DEFINICIONES

Una sucesión es un conjunto de objetos ordenados mediante los números naturales. Si esta colección es de números reales se dirá que la sucesión es de números reales.

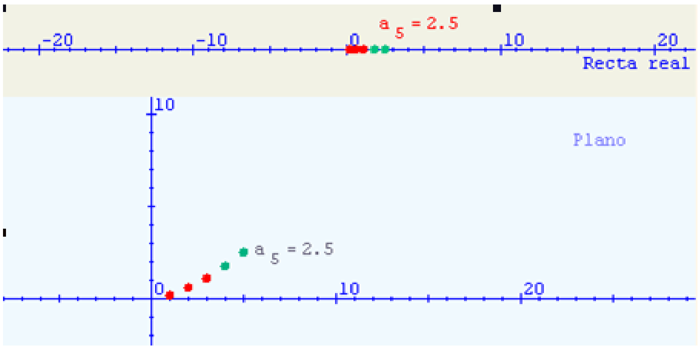
Se puede considerar una sucesión real como una función que asigna a cada número natural un número real

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow f(n) = a_n \end{aligned}$$

A la imagen de un número natural n lo denotaremos por a_n y lo llamaremos término enésimo de la sucesión. La sucesión se denotará por (a_n).

Dos sucesiones (a_n) y (b_n) son *iguales* si $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión admite una representación en la recta real y en el plano:



Sucesiones monótonas

Definiciones:
a) Una sucesión (a_n) se denomina *monótona creciente* si verifica:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$$

es decir, si se cumple $a_n \le a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si verifica $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se llama *estrictamente creciente*.

b) Análogamente, una sucesión (a_n) se denomina *monótona decreciente* si se cumple $a_n \ge a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si verifica $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se llama *estrictamente decreciente*.

c) Una sucesión se denomina *monótona* si es monótona creciente o monótona decreciente.

Nota práctica:
En algunos casos, para probar que una sucesión es monótona creciente resulta útil probar que $a_{n+1} - a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y para sucesiones de términos positivos también se puede demostrar probando que se cumple:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Análogamente, para las sucesiones monótonas decrecientes se probará que $a_{n+1} - a_n \le 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, o bien, si es de términos positivos, se demostrará que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Teniendo en cuenta que una sucesión es una aplicación de los números naturales en los reales, para ciertas sucesiones, se puede estudiar la monotonía utilizando técnicas de cálculo diferencial. Bastará considerar la función resultado de cambiar n por x en el término general de la sucesión. Si $a_n = f(n)$ y $f'(x) > 0$ (respectivamente $f'(x) < 0$) para $x > n_o$ entonces a_n es creciente (respectivamente decreciente) para $x > n_o$.

Sucesiones acotadas

Definiciones:

a) Decimos que un número real k es *cota superior* de la sucesión (a_n) si verifica

$$a_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Se denomina *supremo* a la menor de las cotas superiores. Si el supremo es un término de la sucesión se denomina *máximo*.

b) Análogamente, dicho número k será *cota inferior* de la sucesión (a_n) si verifica

$$k \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Llamamos *ínfimo* a la mayor de las cotas inferiores. Si el ínfimo es un término de la sucesión se denomina *mínimo*.

d) Una sucesión (a_n) decimos que está *acotada superiormente* si tiene alguna cota superior. De forma análoga, diremos que la sucesión está acotada inferiormente si tiene alguna cota inferior.

e) Una sucesión (a_n) decimos que es *acotada* si está acotada superior e inferiormente.

2. LIMITE DE UNA SUCESIÓN

Sucesiones convergentes

Definición: Decimos que el *límite* de una sucesión (a_n) es L, y lo escribimos así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

o también

$$a_n \to L$$

si es posible conseguir que $\left| a_n - L \right|$ sea tan pequeño como queramos, sin más que asignarle a n valores tan grandes como sea necesario. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;\; existe \; N_o \in \mathbb{N} \; tal \; que \left| a_n - L \right| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$$

La definición anterior significa que si queremos que los términos de la sucesión se alejen de L una distancia menor que ε, lo podemos conseguir para todos los términos posteriores a un cierto número natural N_0. Cuanto más pequeño sea ε más grande habrá que tomar el valor de N_0.

La definición anterior se lee "límite cuando n tiende a infinito de a_n igual a L". También se puede escribir

$$\lim \; a_n = L$$

pues n sólo puede tender a infinito.

Las sucesiones que tienen límite se denominan *convergentes*.

Sucesiones divergentes

Definición: La sucesión (a_n)

- *tiende a infinito* (∞) si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión superen dicho valor sin más que tomar valores de n mayores que un número natural N_0. Simbólicamente esto puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tal\; que \quad a_n > k \quad \forall n > N_0$$

- *tiende a menos infinito* $(-\infty)$ si cualquiera que sea el número real k fijado, por grande que este sea, podemos conseguir que los términos de la sucesión sean menores que –k, sin más que tomar valores de n mayores que un número natural N_0. Simbólicamente esto puede escribirse así

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \exists N_0 \in \mathbb{N} \quad tal\; que \quad a_n < -k \quad \forall n > N_0$$

Propiedad (Unicidad del límite): Si la sucesión (a_n) tiene límite, finito o no, este es único.

Sucesiones oscilantes

Existen otras sucesiones que no tienen límite, pero tampoco tienden a infinito ni a menos infinito. Estas sucesiones se denominan *oscilantes*.

Resumen: Las sucesiones se clasifican según la existencia o no de límite en los siguientes tipos:

Convergentes	tienden a un número finito L	
No convergentes	**Divergentes**	$\begin{cases} \text{tienden a } \infty \\ \text{tienden a } -\infty \end{cases}$
	Oscilantes	

Propiedades de los límites: Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ con $a,b \in \mathbb{R}$ se cumplen las siguientes propiedades:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $si\ b \neq 0$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b$ siempre que $a^b \neq 0^0$.

Indeterminaciones: $\infty - \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 0∞ , 1^∞ , 0^0 , ∞^0

Teorema (Acotación): Toda sucesión (a_n) convergente es acotada.

Observación: El recíproco del teorema anterior no es cierto: la sucesión 1, 2, 1, 2, 1, 2,... es acotada y, sin embargo, no es convergente.

Teorema (Weierstrass): Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Toda sucesión monótona y no acotada es divergente.

Convergente $\Rightarrow$ Acotada	Convergente $\Leftarrow$ Acotada y Monótona
Divergente $\Rightarrow$ No acotada	Divergente $\Leftarrow$ No acotada y Monótona
(No son ciertos los recíprocos)	(No son ciertos los recíprocos)

Número e

El número **e** es un número irracional de gran importancia en matemáticas superiores. Podemos definirlo como el límite de la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Puede probarse que esta sucesión es monótona y acotada por lo que aplicando el teorema de Weierstrass se concluye que es convergente. El valor al que converge es el número **e**.

Se trata de un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son: 2'7182818284...

3. CÁLCULO DE LÍMITES

Criterios de comparación

Teorema del encaje: Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes al mismo número real L. Si se tiene otra sucesión (x_n) verificando $a_n \le x_n \le b_n$ para todo índice n salvo un número finito (es decir para todo n a partir de un cierto índice N_o) entonces la sucesión (x_n) también converge a L.

Teorema: Si (a_n) es una sucesión divergente a infinito y para todo índice n salvo un número finito se verifica $a_n \le b_n$ entonces (b_n) también es divergente a infinito.

Infinitésimos e infinitos equivalentes

Definiciones:

- *Infinitésimo*: Se dice que a_n es un infinitésimo si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
- *Infinito*: Se dice que a_n es un infinito si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$

PROPIEDADES DE LOS INFINITÉSIMOS

La suma de un número finito de infinitésimos es un infinitésimo.

Se verifica $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Si (a_n) es un infinitésimo y (b_n) es una sucesión acotada superiormente en valor absoluto, entonces, la sucesión producto de ambas $(a_n \cdot b_n)$ es convergente y se cumple

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$$

Definición (*Sucesiones del mismo orden y asintóticamente equivalentes*).-
Se dice que dos sucesiones (a_n) y (b_n) infinitésimos (respectivamente infinitos) son del mismo orden si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ con $k \in \mathbb{R} - \{0\}$.

En el caso particular de que k=1 se dicen asintóticamente equivalentes.

Notación.- Cuando a_n y b_n infinitésimos (respectivamente infinitos) son del mismo orden se escribe $a_n = \mathrm{O}(b_n)$.

PRINCIPIO DE SUSTITUCIÓN.- El límite de una sucesión convergente o divergente no se altera al sustituir uno de sus factores o divisores por otro asintóticamente equivalente.

INFINITESIMOS EQUIVALENTES	INFINITOS EQUIVALENTES: Si $n \to \infty$
$a_n \to 1$ *entonces* $\log(a_n) \approx a_n - 1$	$n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$ (Fórmula de Stirling)
$a_n \to 0$ *entonces* $\log(1 + a_n) \approx a_n$	$a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_o \approx a_p n^p$
$a > 0$ *entonces* $\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) \approx \dfrac{\log a}{n}$	$\log\left(a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \ldots + a_1 n + a_o\right) \approx \log\left(a_p n^p\right)$
$a_n \to 0$ *entonces* $sen\ a_n \approx a_n \approx tg\ a_n$	$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k \approx \dfrac{n^{k+1}}{k+1}$
$a_n \to 0$ *entonces* $a_n \approx arcsen\, a_n \approx arctg\ a_n$	
$a_n \to 0$ *entonces* $1 - \cos a_n \approx \dfrac{a_n^2}{2}$	

Definición (Infinitésimos e infinitos de orden superior).-

- Sean a_n y b_n dos infinitésimos. Se dice que a_n es un infinitésimo de orden superior respecto de b_n si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$
- Sean a_n y b_n dos infinitos. Se dice que b_n es un infinito de orden superior respecto de a_n si $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$.

Potencial-exponencial	Factorial	Exponencial	Potencial	Logaritmo
$n^{a \cdot n}$ $(a > 0)$	$n!$	b^n $(b > 1)$	n^c $(c > 0)$	$(\log_q n)^p$ $(q > 1, p > 0)$

Tabla.- El orden de los infinitos disminuye de izquierda a derecha

Límites de expresiones racionales

Si se trata de una sucesión cociente de dos expresiones polinómicas, así

$$a_n = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \ldots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \ldots + b_q}$$

se resuelve dividiendo numerador y denominador por n^k , siendo k el grado del polinomio de menor grado. En resumen, se cumple que:

Si $p > q$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (depende de los signos de a_o y b_o)

Si $p = q$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \dfrac{a_0}{b_0}$

Si $p < q$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Esta regla dice que el valor del límite lo marca el término de mayor grado de ambos polinomios; lo cual significa que cada uno de los polinomios puede sustituirse, en el cálculo de límites, por su término de mayor grado (infinitos equivalentes).

Límites de expresiones irracionales

Se resuelven multiplicando y dividiendo por la expresión radical “conjugada”.

Límites de la forma $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

Para calcular este tipo de límites se pueden tomar logaritmos, de tal forma que:

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = \lim_{n\to\infty} e^{b_n \log a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n}$$

Observación: En el caso particular de la indeterminación del tipo 1^∞ se cumple que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ luego,

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n \log a_n} = e^{\lim_{n\to\infty} b_n (a_n - 1)}$$

Sumas infinitas: Series

1. DEFINICIONES

Dada una sucesión infinita de números reales (a_n) se denomina serie numérica a la suma de sus infinitos términos, se denota:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

La *suma parcial enésima* de la serie es

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Dependiendo del carácter de la sucesión de sumas parciales se definirá el carácter de la serie. Así, si la sucesión (S_n) es

- convergente entonces se dirá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *convergente*.

  Además
  $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$
  En este caso S es la suma de la serie.
- divergente entonces se dirá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *divergente*.
- oscilante entonces se dirá que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *oscilante*.

El *resto enésimo* de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es:

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

Es fácil ver que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_n + R_n$$

2. PROPIEDADES DE LAS SERIES

Propiedad 1: Si a una serie la suprimimos o añadimos un número finito de términos su carácter no se ve alterado.

Propiedad 2: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son convergentes y convergen respectivamente a los números reales A y B entonces:

- $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = A \cdot B$ observar que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n) \neq \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right)$
- $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda A$

Propiedad 3 (Condición necesaria de convergencia): Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

IMPORTANTE.- Se trata de una condición necesaria pero no suficiente. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ cumple la condición necesaria de convergencia y, sin embargo, es divergente.

2. SERIES NOTABLES

Series geométricas: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad a \neq 0$.

Se cumple:

- Si $|r| < 1$ la serie converge y además $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. En general $\sum_{n=k}^{\infty} ar^n = \frac{a\,r^k}{1-r}$.
- Si $r > 1$ la serie diverge.

Series armónicas generalizadas: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad p > 0$.

Se cumple:

Si $0 < p \leq 1$ la serie diverge

Si $p > 1$ la serie converge.

3. CONVERGENCIA DE SERIES DE TÉRMINOS NO NEGATIVOS

Una serie de términos no negativos o bien converge o bien diverge ya que la sucesión de sus sumas parciales es monótona.

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\text{no negativo}} \geq S_n$$

Criterios

Criterios de comparación por paso al límite

Se consideran las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Entonces

- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ ambas series tienen el mismo carácter
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Criterio del cociente: Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L \text{ ó } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Entonces

- Si $L<1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $L>1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

Criterio de la raíz: Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cumpliendo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$ entonces

- Si $L<1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente
- Si $L>1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

4. SERIES ALTERNADAS

Son de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + ... \qquad (a_n > 0)$$

TEOREMA DE LEIBNIZ: La serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ $(a_n > 0)$ converge si

la sucesión (a_n) es monótona decreciente

se verifica $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Suma aproximada

Supongamos que se tiene la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ $(a_n > 0)$ convergente verificando las hipótesis del Teorema de Leibniz, es decir,

- la sucesión (a_n) es monótona decreciente
- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

El resto enésimo es

$$R_n = S - S_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \ldots = (-1)^n (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots)$$

Al ser (a_n) una sucesión monótona decreciente el valor absoluto del resto enésimo es:

$$|R_n| = a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \ldots = a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} \ldots$$

es decir,

$$|R_n| < a_{n+1}$$

Obsérvese que este error será:

- por exceso si el primer término despreciado es negativo
- por defecto si el primer término despreciado es positivo.

5. SERIES DE TÉRMINOS CUALESQUIERA

Una serie de términos cualesquiera, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, es *absolutamente convergente* si es convergente la serie de sus valores absolutos, es decir, si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente.

> *Teorema*: Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

Si una serie es convergente pero no es absolutamente convergente se denomina *condicionalmente convergente*.

Series de potencias

1. DEFINICION

Una expresión de la forma

$$a_o + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

recibe el nombre de *serie de potencias centrada en el punto a*. Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$$

2. CONVERGENCIA

El dominio de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ será el conjunto de valores de x donde la serie converge y el valor de $f(x)$ será precisamente la suma de la serie.

Nota: Es evidente que la serie converge en el punto a

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-a)^n = a_o$$

TEOREMA DE ABEL.

Se considera la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. Entonces se cumple una y solo una de las afirmaciones siguientes:

a) La serie converge solo en el punto a

b) Existe un número $R > 0$ de forma que la serie converge en $|x-a| < R$ y no converge en $|x-a| > R$

c) La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$

El teorema anterior afirma que la serie converge siempre en un intervalo de la forma $(a-R, a+R)$, considerando que en el caso a) el valor de R es cero y en el caso c) el valor de R es infinito. Al número R se le llama *radio de convergencia* y al intervalo $(a-R, a+R)$ *intervalo de convergencia*. Es importante notar que el teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos de dicho intervalo.

Nota: Para obtener el radio de convergencia de una serie de potencias, R, se toma la serie de los valores absolutos y posteriormente se aplica el criterio del cociente.

TEOREMA.

Si la función f viene definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ con radio de convergencia $R>0$ entonces

- f es continua en todo punto interior al intervalo de convergencia.
- f es derivable en el intervalo de convergencia y su derivada $f'(x)$ puede obtenerse mediante la derivación término a término:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

siendo el radio de convergencia de la serie derivada también R.

- f es integrable en el intervalo de convergencia y, además, se puede integrar término a término:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int a_n (x-a)^n dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} + k$$

siendo el radio de convergencia de esta serie también R. El valor de la constante de integración, k, se obtiene sustituyendo x=a en la función y en la serie integradas.

3. DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS

Ahora estudiamos el problema de hallar el desarrollo en serie de potencias de una función $f(x)$ analizando qué condiciones debe cumplir $f(x)$ para que pueda encontrarse una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ que converja a $f(x)$.

Recordemos el Teorema de Taylor que permitía expresar el valor de una función mediante su polinomio de Taylor.

FÓRMULA DE TAYLOR: Si la función f es derivable n+1 veces en un intervalo $(a-R, a+R)$ entonces

$$f(x)=T_n(f;a)+R_n(x)$$

siendo $T_n(f;a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$ el polinomio de Taylor de grado n de f en el punto a y $R_n(x)$ el resto del polinomio que cumple:

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0$$

Considerando la expresión de Lagrange del resto se tendrá:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

con t un punto intermedio entre a y x.

TEOREMA: Si la función f es infinitamente derivable en un intervalo I abierto centrado en a y si $R_n(x)$ es el resto de la fórmula de Taylor entonces:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$ se llama *Serie de Taylor de la función* $f(x)$.

Propiedad: Puede probarse que si existe una constante $k>0$ de forma que

$$\left|f^{(n}(x)\right|\le k \text{ para todo } n\ge 0,\ x\in I$$

entonces

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ejemplos: Recogemos en esta tabla los desarrollos en serie de Taylor de algunas funciones elementales y también los valores de x para los que converge la serie.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots \qquad |x| < \infty$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad |x| < \infty$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad |x| < \infty$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - \ldots \qquad |x| < 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!} x^2 + \ldots \qquad |x| < 1$$

Con frecuencia, resulta difícil encontrar la derivada enésima para muchas funciones, así como probar que el resto enésimo tiende a cero cuando n tiende a infinito. En consecuencia, para encontrar el desarrollo de una función en serie de potencias, es frecuente utilizar funciones de las que ya se conoce su desarrollo y luego integrar, derivar o realizar operaciones algebraicas como se indican en el siguiente resultado:

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ en $(-R, R)$ entonces

- $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$ en $(-R, R)$
- $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$ en $\left(-\frac{R}{|k|}, \frac{R}{|k|}\right)$
- $f(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nk}$ en $\left(-\sqrt[k]{R}, \sqrt[k]{R}\right)$ siendo k>0