Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo de derivadas
- Propiedades de las funciones derivables
- Análisis de extremos en funciones de una variable

Resumen teórico

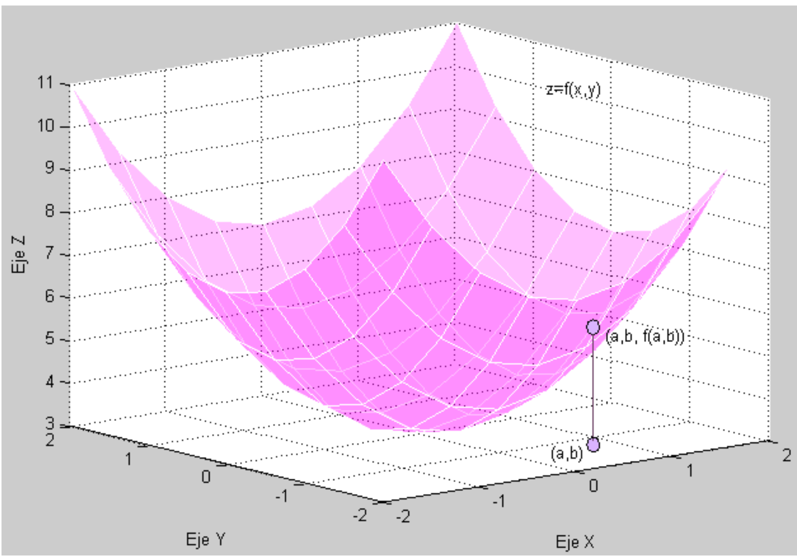
1. SUPERFICIES Y CURVAS DE NIVEL

Definición (*Función*).- Una función real de dos variables, f, no es más que una correspondencia que asigna a cada pareja (x,y) de números reales otro número real único $f(x,y)$.

Definición (*Dominio, rango*).- Se define el *dominio* de la función f como el conjunto de pares reales en los que la función está definida. El *rango* es el conjunto de números reales dado por

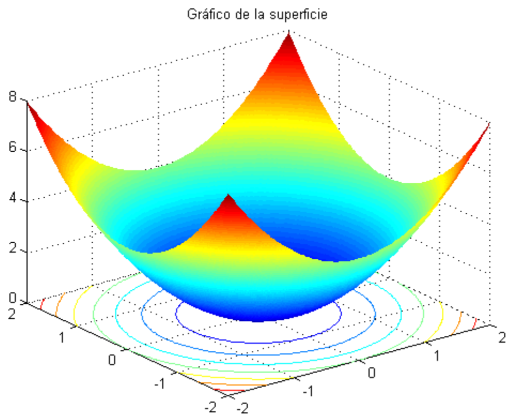
$$\operatorname{Im} f = \{z \in \mathbb{R} / (x,y) \in D\}$$

La gráfica de una función de dos variables $z = f(x,y)$ es la representación en el espacio $\mathbb{R}^3$ de todas las combinaciones posibles de valores (x, y, z) siendo z la imagen de (x, y) por la función f.



Curvas de nivel

Para una función de dos variables, $z = f(x,y)$, la curva de nivel de valor k es el conjunto de todos los pares de valores (x, y) tales que su imagen es el valor k.



2. DERIVADAS PARCIALES

Definición (*Derivadas parciales*).- Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables se define la derivada parcial de f en el punto (a,b)

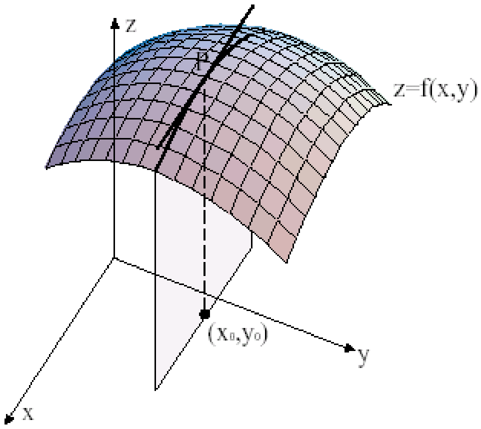
- con respecto a x como: $$f'_x(a,b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$$

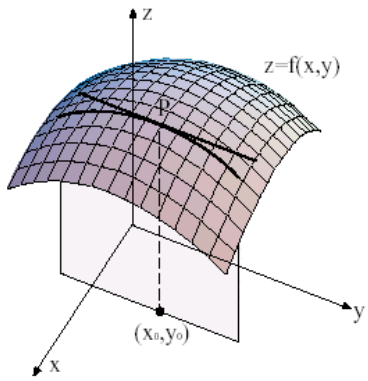
- con respecto a y como: $$f'_y(a,b) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

siempre que los límites anteriores existan.

Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA.- Las derivadas parciales no son más que derivadas de una función de una variable: la función cuya gráfica se obtiene como intersección de la superficie con los planos verticales $x=a$, $y=b$ en los casos de derivada parcial en la dirección de y y en la dirección de x, respectivamente.





NOTACIÓN: Para hacer referencia a la derivada parcial de la función $z=f(x,y)$ respecto a la variable x e y se suelen utilizar las siguientes notaciones:

$$f_x^{'}(a,b)=\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=z_x^{'}(a,b) \qquad f_y^{'}(a,b)=\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=z_y^{'}(a,b)$$

DERIVADAS PARCIALES de segundo orden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z_{xx}^{''}(x,y)=f_{xx}^{'}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z_x^{'}(x+\Delta x,y)-z_x^{'}(x,y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z_{xy}^{''}(x,y)=f_{xy}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z_x^{'}(x,y+\Delta y)-z_x^{'}(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z_{yy}^{''}(x,y)=f_{yy}(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{z_y^{'}(x,y+\Delta y)-z_y^{'}(x,y)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z_{yx}^{''}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{z_y^{'}(x+\Delta x,y)-z_y^{'}(x,y)}{\Delta x}$$

TEOREMA DE SCHWARZ.- Sea $z=f(x,y)$ es una función de dos variables. Si se verifica que existen $f, f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$ y además f_{xy} es continua en una región abierta D entonces se cumple que en dicha región se da la igualdad de las derivadas cruzadas de segundo orden.

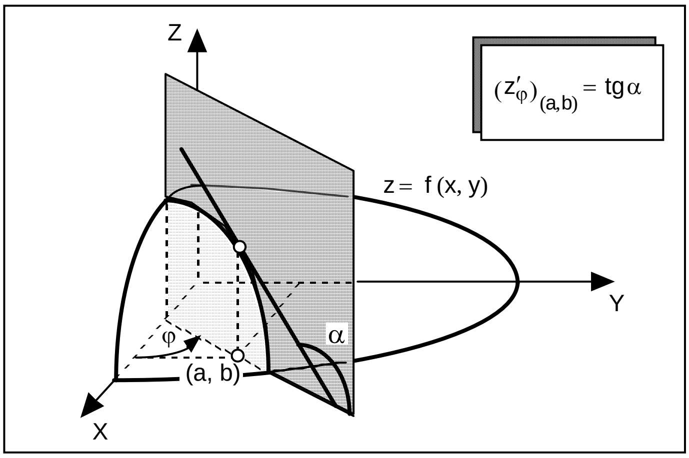
3. DERIVADAS DIRECCIONALES

Definición (*Dirección*).- Una dirección en $\mathbb{R}^2$ es cualquier vector de norma 1.

Si $\overline{u}$ es una dirección en el plano entonces se puede expresar como $\overline{u}=(\cos\varphi, sen\varphi)$ siendo φ el ángulo que forma el vector con el eje positivo de las X.

Definición (*Derivada direccional en un punto*): Sea f una función de dos variables y $\overline{u}$ una dirección. Se define la derivada direccional de f en el punto $\overline{x_o}(a,b)$ en la dirección de $\overline{u}$ como el valor del siguiente límite en el caso de que exista:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\overline{x_o}+t\overline{u}\right)-f\left(\overline{x_o}\right)}{t}=D_u f\left(\overline{x_o}\right)=f_u^{'}\left(\overline{x_o}\right)$$



En el caso de que $\overline{u}=(\cos\varphi, sen\varphi)$ la derivada direccional se puede expresar como:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(a+t\cos\varphi, b+tsen\varphi\right)-f\left(a,b\right)}{t}=D_u f\left(\overline{x_o}\right)=f_u^{'}\left(\overline{x_o}\right)$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA: es la pendiente de la recta tangente a la curva intersección de la superficie con el plano vertical que contiene a la dirección dada.

4. FUNCIONES DIFERENCIABLES

Definición (*Diferenciable y diferencial*).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida y acotada en un dominio D al cual pertenece $\overline{x_o} = (a,b)$ y que tiene derivadas parciales en dicho punto. Se dice que es diferenciable en $\overline{x_o}$ si el incremento total:

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b)$$

correspondiente a los incrementos arbitrarios de Δx e Δy se puede expresar como

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

cumpliendo que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$$

A la parte lineal en Δx e Δy se le llama *diferencial* de $z = f(x,y)$ en $\overline{x_o} = (a,b)$ y se le denota,

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\,.}$$

TEOREMA (*Condición necesaria de diferenciabilidad*).- Si la función $z = f(x,y)$ es diferenciable en el punto (a,b) entonces es continua en (a,b).

TEOREMA.- Si la función $z = f(x,y)$ y una o las dos derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto (a,b) entonces la función es diferenciable en dicho punto.

TEOREMA: Si una función es diferenciable existe la derivada direccional en cualquier dirección.

TEOREMA.- Si $z=f(x,y)$ es una función diferenciable en (a,b) entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\bar{u}=(\cos\varphi, sen\varphi)$ es

$$D_u f(a,b)=f_x(a,b)\cos\varphi+f_y(a,b)sen\varphi$$

5. PLANOS TANGENTES Y APROXIMACIÓN LINEAL

Sea S una superficie de ecuación $z=f(x,y)$ y $P(a,b,f(a,b))$ un punto de S. Si f es diferenciable en (a,b) se define el plano tangente como el plano que contiene a las rectas tangentes a cualquier curva C que esté sobre la superficie S y que pase por P.

Como la ecuación de un plano es:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-f(a,b))=0 \qquad \text{ó}$$
$$A'(x-a)+B'(y-b)+(z-f(a,b))=0 \;\; si\; C\neq 0$$

se cumplirá que al cortarlo con el plano $x=a$, la recta tangente será:

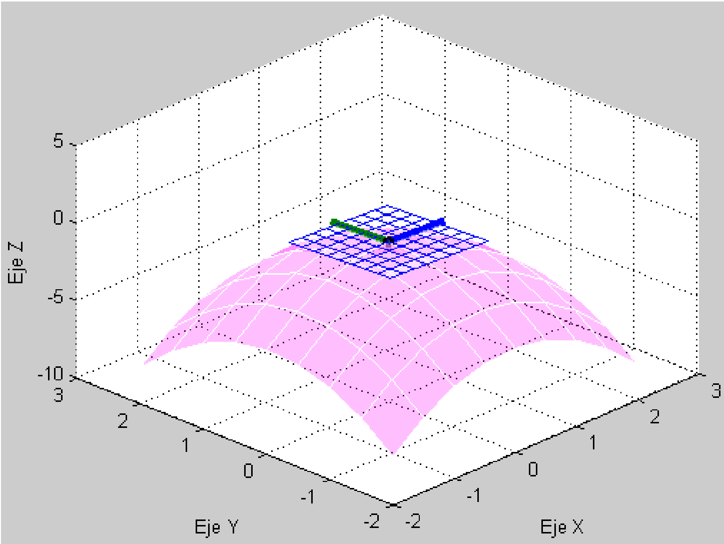
$$\begin{cases} z-f(a,b)=-B'(y-b)\,(si\; C\neq 0) \\ x=a \end{cases}$$

Es claro que esta recta tangente tiene por pendiente la derivada parcial respecto de y en el punto (a,b) ya que es recta tangente a la curva intersección de S con el plano $x=a$. Por lo tanto, $-B'=\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

Análogamente cortando por el plano $y=b$ se tendrá que la recta tangente es:

$$\begin{cases} z-f(a,b)=-A'(x-a) \\ y=b \end{cases}$$

Es claro que esta recta tangente tiene por pendiente la derivada parcial respecto de x en el punto (a,b) ya que es recta tangente a la curva intersección de S con el plano $y=b$. Por lo tanto, $-A'=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$



Por lo tanto un vector normal al plano tangente es:

$$\vec{n} = -\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\vec{j} + \vec{k}$$

La ecuación del plano tangente es entonces:

$$\left\langle (x,y,z)-(a,b,f(a,b)), \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b), -1\right)\right\rangle = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

Si f es diferenciable

$$\Delta z = f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\Delta y$$

para $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$

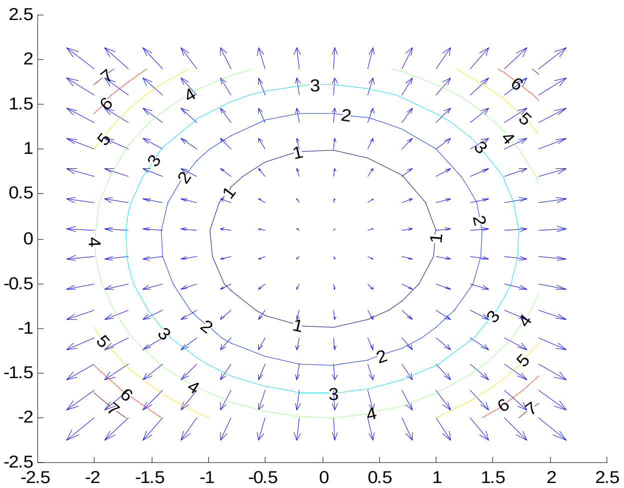
6. GRADIENTE

Definición (*Gradiente*).- Si $z = f(x,y)$ es una función de dos variables se define el gradiente de f en el punto $\overline{x_o} = (a,b)$ como el vector:

$$\nabla f(a,b) = f_x(a,b)\mathbf{i} + f_y(a,b)\mathbf{j}$$

PROPIEDADES DEL GRADIENTE: Sea f una función diferenciable en el punto (a,b). Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si el gradiente de f en (a,b) es el vector nulo entonces la derivada direccional de f en cualquier dirección es cero.
2. La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x,y)$. El valor máximo de la derivada direccional es $\|\nabla f(x,y)\|$.
3. La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x,y)$. El valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(x,y)\|$.
4. El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.



Curvas de nivel de la superficie $z = x^2 + y^2$

Superficies implícitas: Plano tangente:

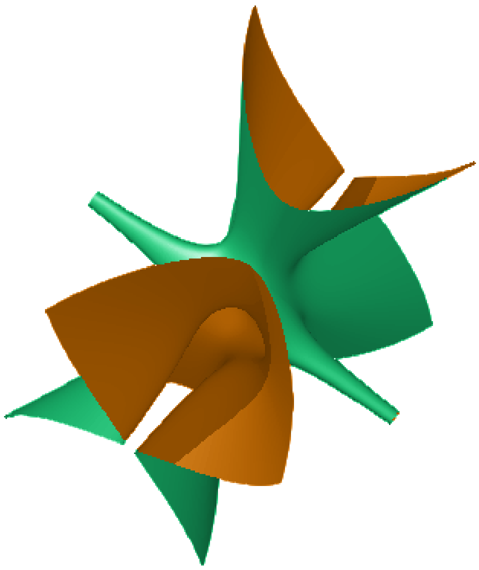
Sea S una superficie de ecuación $F(x,y,z) = C$ y sea $P_o(a,b,c)$ un punto de S donde F es diferenciable. La ecuación del plano tangente a S en P_o es:

$$F_x(a,b,c)(x-a)+F_x(a,b,c)(y-b)+F_z(a,b,c)(z-c)=0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal a S en $P_o(x_o, y_o, z_o)$ son

$$\begin{cases} x = a + F_x(a,b,c)\cdot t \\ y = b + F_y(a,b,c)\cdot t \\ z = c + F_z(a,b,c)\cdot t \end{cases}$$

siempre y cuando no sean simultáneamente cero todas las derivadas parciales en el punto.

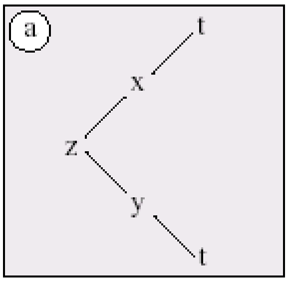


Superficie implícita de ecuación: $\sqrt{xy}-\sqrt{yz}-\sqrt{zx-y}=1$

7. REGLA DE LA CADENA

DERIVACION COMPUESTA DE UNA VARIABLE.- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en un dominio D siendo cada una de las variables x e y una función de la variable t

$$x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ t_o<t<t_1$$



Si en el punto t existen las derivadas

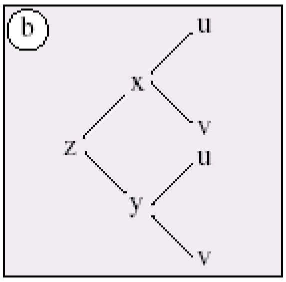
$$\frac{dx}{dt}=\phi'(t) \qquad \frac{dy}{dt}=\psi'(t)$$

y para cada una de las variables $x=\phi(t),\ y=\psi(t)$ la función $z=f(x,y)$ es diferenciable entonces se tiene:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

DERIVACIÓN COMPUESTA DE DOS VARIABLES.- Sea $z=f(x,y)$ una función definida en un dominio D siendo cada una de las variables x e y una función de dos variables u y v

$x=\phi(u,v),\ y=\psi(u,v)$



Si en el punto (u,v) existen las derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial v}$$

y en el punto (x,y) la función es diferenciable entonces se tiene:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

8. MÁXIMOS, MÍNIMOS Y PUNTOS DE SILLA

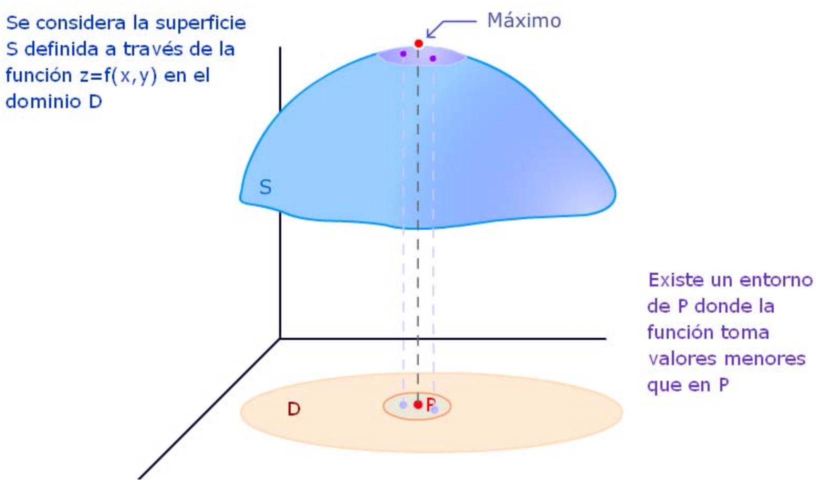
Definición (*Extremos absolutos*).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(a,b) \in D$ se dice que

(a) $f(a,b)$ es un valor máximo absoluto de f en D si

$$f(a,b) \geq f(x,y) \ \forall (x,y) \in D$$

(b) $f(a,b)$ es un valor mínimo absoluto de f en D si

$$f(a,b) \leq f(x,y) \ \forall (x,y) \in D$$



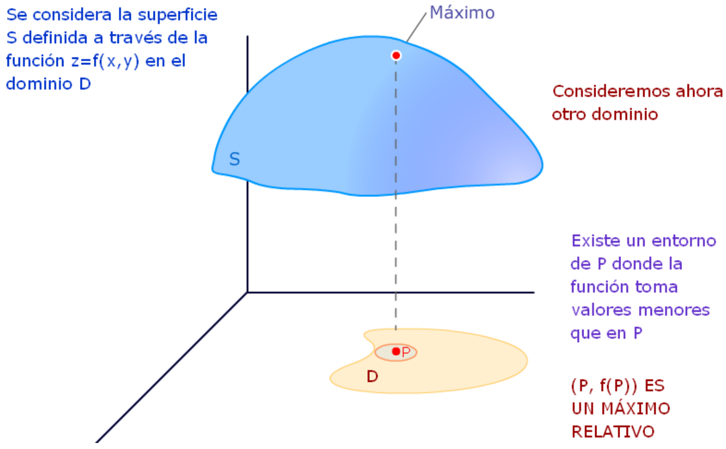
Definición (*Extremos relativos*).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(a,b) \in D$ se dice que

(a) $f(a,b)$ es un valor máximo relativo de f en D si existe un entorno B (a,b) tal que

$$f(a,b) \geq f(x,y) \ \forall (x,y) \in B$$

(b) $f(a,b)$ es un valor mínimo relativo de f en D si existe un entorno B (a,b) tal que

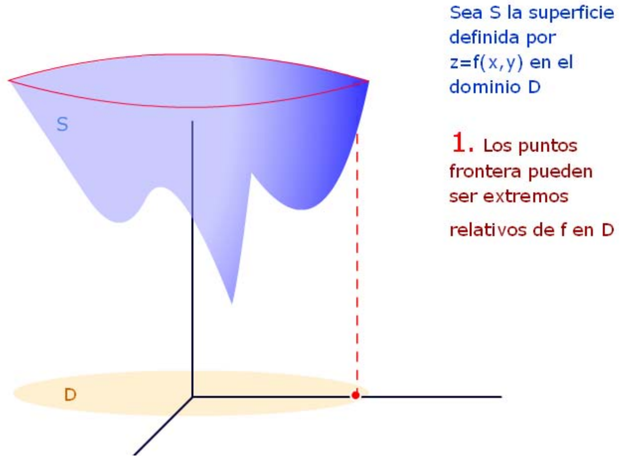
$$f(a,b) \leq f(x,y) \ \forall (x,y) \in B$$



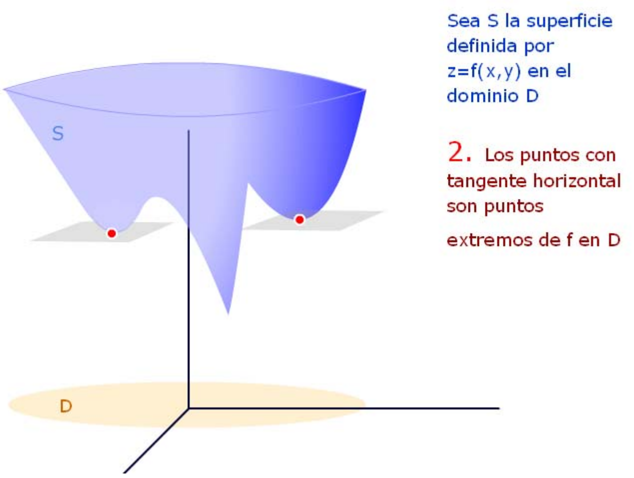
TEOREMA DE WEIERSTRASS.- Si $z = f(x,y)$ una función continua en un subconjunto de D de $\mathbb{R}^2$ acotado y que contiene a su frontera entonces la función f tiene máximo y mínimo en D.

Definición (*Punto crítico*).- Sea $z = f(x,y)$ una función definida en una región D y sea $(a,b) \in D$ se dice que es un punto crítico si se cumple una de las afirmaciones siguientes:

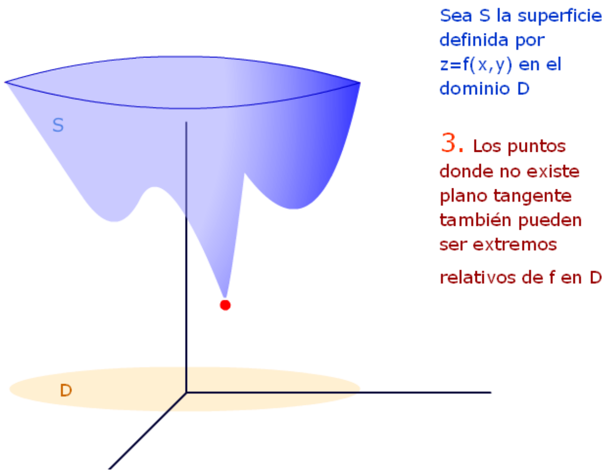
(1) (a,b) está situado en el contorno de D. A estos puntos se les llama puntos *frontera*.



(2) $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$, es decir, $\nabla f(a,b)=0$. A estos puntos se les llama *estacionarios*.



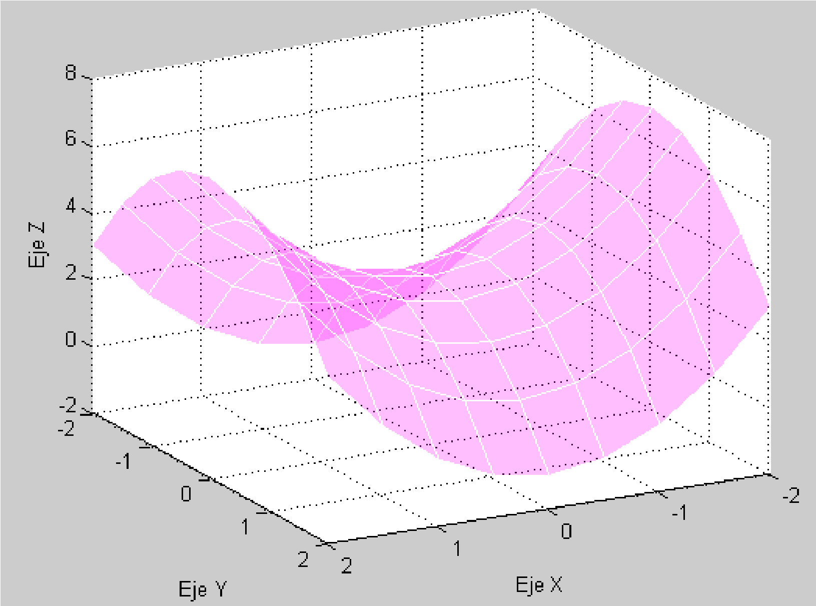
(3) no existe $f_x(a,b)$ ó $f_y(a,b)$. A estos puntos se les llama *singulares*.



TEOREMA.- Si $f(a,b)$ es un extremo relativo de f en una región abierta de D entonces el punto (a,b) es un punto crítico de f.

TEOREMA (*Condición necesaria para la existencia de extremo de funciones diferenciables*).- Sea $z=f(x,y)$ una función diferenciable en D. Es condición necesaria para la existencia de un extremo relativo de f en $(a,b)\in D$ que se verifique $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$

IMPORTANTE.- Es condición necesaria pero no suficiente. Basta tomar como ejemplo la función $f(x,y)=y^2-x^2$ que cumple que $(0,0)$ es un punto estacionario y sin embargo no es extremo relativo (ni máximo ni mínimo).



Cálculo de los extremos relativos: Método práctico

Los pasos a seguir son:

(1) Cálculo de los puntos críticos como solución del sistema

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{array}\right\}$$

(b) Si (a,b) es un punto crítico, el estudio del hessiano

$$H=\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

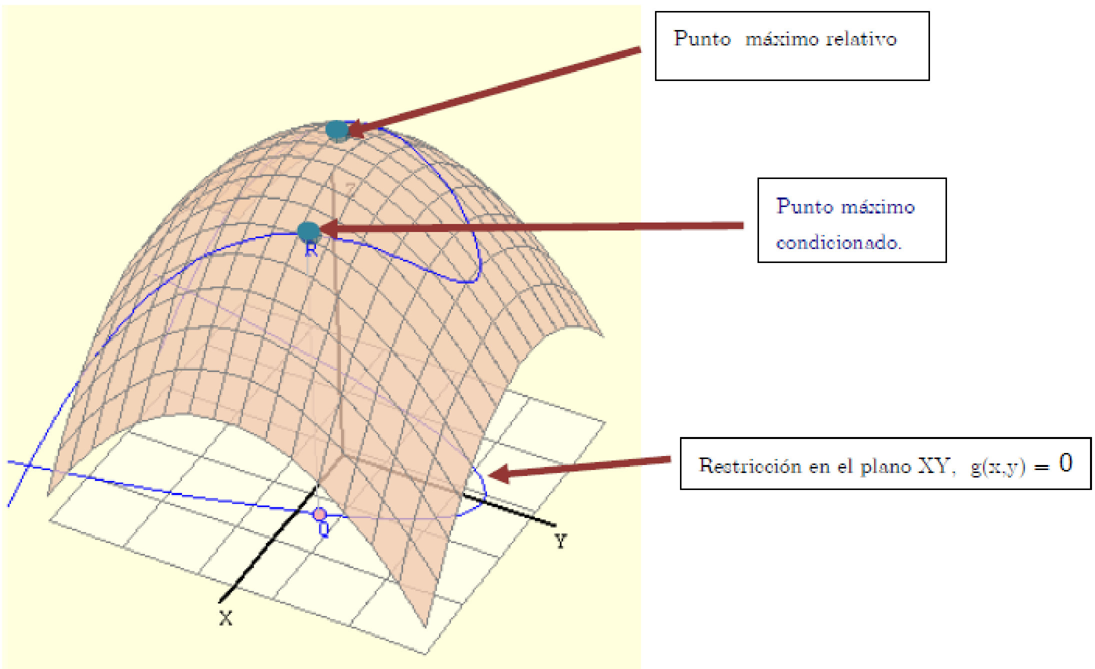
nos permitirá concluir:

$$H>0 \quad f_{xx}(a,b)>0 \ \Rightarrow \ (a,b) \ \textit{mínimo relativo}$$
$$H>0 \quad f_{xx}(a,b)<0 \ \Rightarrow \ (a,b) \ \textit{máximo relativo}$$
$$H<0 \ \Rightarrow \ (a,b) \ \textit{punto de silla}$$

Extremos condicionados

Un extremo (máximo o mínimo) de la función $f(x,y)$ cuando (x,y) está sobre una curva del plano contenida en el dominio de f , cuya ecuación es $g(x,y)=0$, se dice que es un extremo condicionado a la condición o restricción $g(x,y)=0$.

Por ejemplo:



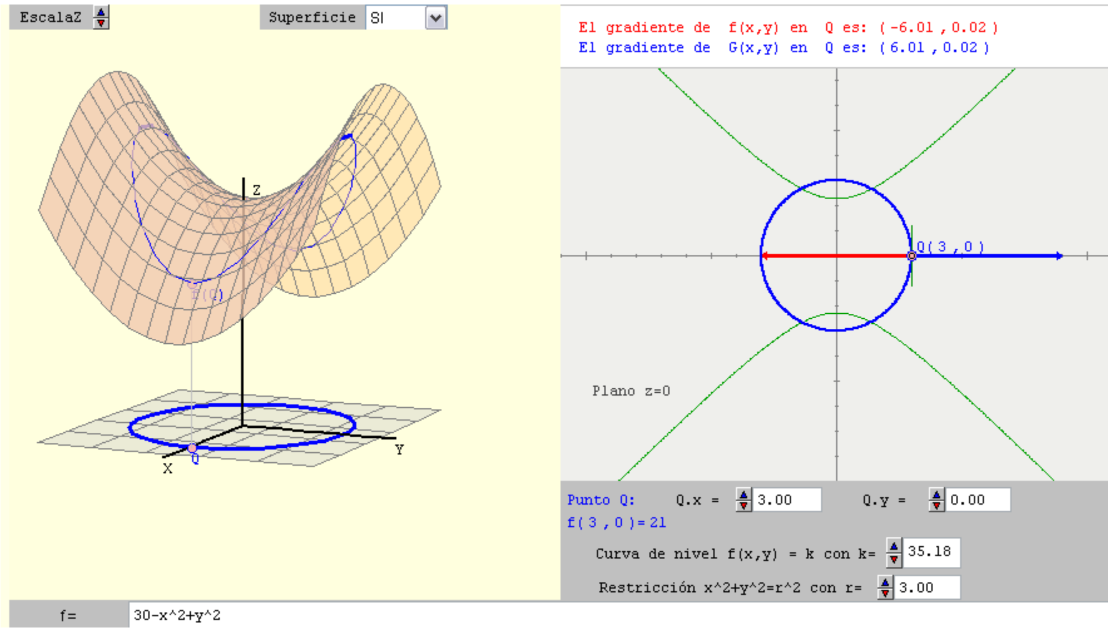
El método de Lagrange[1] permite hallar analíticamente los puntos extremos condicionados de una función suave, es decir, con derivadas parciales continuas.

TEOREMA (*Método de Lagrange para funciones de dos variables y una condición*).- Sean f y g dos funciones con derivadas parciales continuas tal que f tiene un máximo o mínimo sujeto a la restricción dada por $g(x,y)=0$ entonces dicho extremo se producirá en uno de los puntos críticos de la función F dada por

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$$

[1] El método lo realizó uno de los matemáticos más grandes del siglo XVIII, Joseph Lagrange, cuando tenía 19 años.

Al número λ (lambda) se le llama "multiplicador de Lagrange".



OBSERVACIÓN.- Según este teorema, los extremos libres de F coinciden con los extremos condicionados de f .

Para analizar si el punto crítico (a,b,λ_o) obtenido del sistema

$$\left.\begin{matrix} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} f_x + \lambda g_x = 0 \\ f_y + \lambda g_y = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{matrix}\right\}$$

es máximo o mínimo se analiza el signo de la diferencial segunda de F en el punto (a,b)

$$signo\ d^2F = signo\left(F_{xx}dx^2 + F_{yy}dy^2 + 2F_{xy}dxdy\right)_{(a,b)}$$

estando ligadas dx y dy por la condición: $g_x\,dx + g_y dy = 0$