Tema 5: Integración de funciones de una variable.

Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase y ponga al día sus conocimientos en los siguientes contenidos:

- Cálculo de integrales inmediatas
- Propiedades de las funciones integrables

Resumen teórico

Integración indefinida

1. FUNCIÓN PRIMITIVA

Definición (*Función primitiva*).**-** Se dice que $F(x)$ es una función primitiva de otra función $f(x)$ si y sólo si se verifica

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

siendo D_f el dominio de la función $f(x)$.

Obsérvese que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ también se verificará

$$dF(x) = f(x)dx$$

PROPOSICIÓN.**-** Si $F(x)$ es un primitiva de $f(x)$, también serán primitivas de $f(x)$ todas aquellas funciones $G(x)$ que verifiquen $G(x) = F(x) + C$ y sólo esas.

TEOREMA (*Existencia de primitiva).-* La condición necesaria y suficiente para que $f(x)$ tenga función primitiva en un intervalo *I*, es que sea continua en I.

2. INTEGRAL INDEFINIDA

El proceso de cálculo de primitivas se denomina *integración* y se denota por el símbolo ∫, llamado signo integral.

Definición (*Integral indefinida*).- Dada una función, $f(x)$ continua en un intervalo I, se llama integral indefinida de $f(x)$ y se representa por

$$\int f(x)dx$$

al conjunto de funciones que tienen por diferencial $f(x)dx$ (tienen por derivada $f(x)$). Es decir,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

donde $f(x)$ se llama *integrando* o *función subintegral* y C *constante de integración*. Debiendo verificarse

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)+C\right] = f(x)$$

Propiedades de la Integral indefinida.- Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto I. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

Propiedad P1.- $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, siendo k una constante

Propoiedad P2.- $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Las propiedades P1 y P2 confieren al operador $\int$ carácter lineal.

Una forma coloquial de expresar que dos operadores son inversos, consiste en decir que cada uno anula o destruye el efecto producido por el otro. Resulta inmediato comprobar que la integración es la operación inversa de la diferenciación.

TEOREMA.- Los operadores ∫ (integración) y d (diferenciación), son inversos, si bien cuando se aplican en el orden ∫ d debe añadirse una constante arbitraria.

3. INTEGRALES INMEDIATAS

A continuación se incluye una tabla con algunas de las integrales inmediatas más frecuentes. Convendremos en llamar integrales inmediatas a todas aquellas cuya solución puede escribirse sin más recursos que el recuerdo de las reglas de derivación.

Tabla de integrales inmediatas frecuentes

1. $\int a\,dx = ax + C$

2. $\int (x+a)^m\,dx = \dfrac{(x+a)^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$

3. $\int \dfrac{dx}{x+a} = \log|x+a| + C$

4. $\int e^{ax}dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + C \quad (a \neq 0)$

5. $\int k^{ax}\,dx = \dfrac{k^{ax}}{a\log k} + C \quad (k > 0,\ a \neq 0)$

6. $\int \cos ax\,dx = \dfrac{\operatorname{sen} ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$

7. $\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\dfrac{\cos ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$

8. $\int \operatorname{tg} ax\,dx = -\dfrac{1}{a}\log|\cos ax| + C \quad (a \neq 0)$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0)$

10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{|a|}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0)$

11. $\int \operatorname{Sh} ax\,dx = \dfrac{\operatorname{Ch} ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$

12. $\int \operatorname{Ch} ax\,dx = \dfrac{\operatorname{Sh} ax}{a} + C \quad (a \neq 0)$

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Arg\,Sh}\dfrac{x}{a} + C = \log\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{Arg\,Ch}\dfrac{x}{a} + C = \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$

15. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{Arg\,Th}\dfrac{x}{a} + C = \dfrac{1}{2a}\log\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

Tabla.- Integrales inmediatas.

4. MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

El cálculo de primitivas interesa sobre todo como auxiliar del cálculo de integrales definidas, por lo que los métodos que se presentan son de tipo práctico pero también de alcance limitado.

Es importante señalar que todos los métodos de integración están inspirados en la misma idea: *reducir la integral planteada a una integral inmediata*.

Integración por cambio de variable

El cambio de variable es una de las técnicas más utilizadas para obtener la primitiva de una función

TEOREMA.- Se considera la integral $\int f(x)dx$ y el cambio de variable $x = g(t)$.
Si *f* y *g* verifican:

(a) *f* es continua en el intervalo I_1.
(b) g tiene derivada continua en el intervalo I_2.
(c) $g(I_2) \subseteq I_1$

Entonces:

$$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right]g'(t)dt \quad \text{con} \quad x \in I_1,\ t \in I_2$$

De esta forma se obtiene una nueva integral en la variable t que debe ser más sencilla de resolver que la integral de partida. La primitiva que se obtenga debe expresarse en la variable inicial, por lo que se deshará el cambio de variable una vez realizada la integración.

Integración por partes

Este método es eficiente para integrandos en los que aparezcan productos de funciones trascendentes.

TEOREMA.- Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones con derivadas continuas en un cierto intervalo *I*. Entonces:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Integración de funciones racionales

Recordemos que se llama función racional $R(x)$, a toda función en la que sólo se efectúan con x las cuatro operaciones racionales. Cualquier función racional puede expresarse como cociente de polinomios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Este apartado está dedicado al cálculo de integrales de funciones de este tipo. Es decir, integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Distinguiremos dos casos:

1. Grado de $P(x) \geq$ Grado $Q(x)$

En este caso se divide $P(x)$ entre $Q(x)$, obteniéndose

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int c(x) dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$$

siendo $\int c(x) dx$ la integral de un polinomio (por tanto inmediata) y $\int \frac{r(x)}{Q(x)} dx$ una integral racional en la que el grado del numerador es inferior al del denominador que se estudia en el caso siguiente.

2. Grado de $P(x) <$ Grado $Q(x)$

Estas integrales se resuelven por *descomposición en fracciones simples*. Para ello se descompone Q(x) en factores irreducibles,

$$Q(x) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_q)^{m_q} \cdot \left[a_1 x^2 + b_1 x + c_1 \right] \cdots \left[a_j x^2 + b_j x + c_j \right],$$

donde los últimos factores tienen raíces complejas (se cumple $b_k^2 - 4 a_k c_k < 0$).

Supondremos en este curso que Q no tiene raíces complejas múltiples.

La descomposición en fracciones simples es la siguiente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{B_{m_2}}{(x-x_2)^{m_2}} + \cdots +$$

$$+ \frac{\alpha_1 x + \beta_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \cdots + \frac{\alpha_j x + \beta_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j}$$

Las integrales que resultan son todas de los tipos siguientes:

$$\int \frac{A_1}{(x-x_1)} \cdot dx = A_1 \log|x-x_1| + C$$

$$\int \frac{A_{m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} \cdot dx = \frac{-A_{m_1}}{(m_1-1)(x-x_1)^{m_1-1}} + C;$$

$$\int \frac{\alpha_j x + \beta_j}{a_j x^2 + b_j x + c_j} \cdot dx = \quad \text{logaritmo} \quad + \quad \text{arco tangente}$$

OBSERVACIÓN**:** Es interesante darse cuenta de que la primitiva de una función racional, en el caso más general, está compuesta por una parte racional y otra parte trascendente y que, además, la componente racional procede únicamente de la integración de raíces múltiples.

Integración de funciones trigonométricas

Son integrales de la forma $\int R(senx, \cos x)dx$ donde R indica una función racional.

Estas integrales se resuelven mediante un cambio de variable que depende de la forma de la función $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Los más frecuentes son:

1. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es par en $(\operatorname{sen} x, \cos x)$, el cambio es $\operatorname{tg} x = t$

con lo que:

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

2. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en cos x, el cambio es $senx = t$.

3. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ es impar en sen x, el cambio es $\cos x = t$.

4. Si $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ no tiene ninguna de las paridades anteriores, entonces el cambio general aplicable es $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

En este caso: $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\quad \cos x = \frac{1-t}{1+t^2}$ $\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

Expresiones básicas de las funciones trigonométricas

$$sen^2\, x + \cos^2\, x = 1$$

$$\cos 2x = \cos^2\, x - sen^2\, x \qquad sen\, 2x = 2 \cdot sen\, x \cdot \cos\, x$$

$$\cos^2\, x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad sen^2\, x = \frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\cos\, x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} \qquad sen\, x = \frac{tg\, x}{\sqrt{1+tg^2 x}}$$

Integración de productos de senos y cosenos

Son integrales de la forma

$$I = \int \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} mx \\ \cos mx \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \operatorname{sen} nx \\ \cos nx \end{Bmatrix} dx \qquad \text{con} \qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

Las distintas integrales que surgen al combinar de todas las formas posibles estos productos se resuelven recordando las fórmulas de trigonometría que enseñan a transformar productos de senos y cosenos en sumas o diferencias. Estas fórmulas son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)] \\ \cos a \operatorname{sen} b = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b)] \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\cos a\cos b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\\ \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b=\frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]\end{array}\right.$$

Aplicando estas fórmulas, las integrales se convierten en inmediatas.

Integración de funciones irracionales

En los casos en los que una función irracional es integrable, la integración se basa en la racionalización de la integral mediante cambio de variable. Algunos de estos cambios de variable se verán en los ejemplos.

También es habitual la integración de algunas funciones irracionales cuadráticas mediante un cambio de variable trigonométrico o hiperbólico que conduzca a una integral de uno de estos tipos. Los casos más frecuentes y el cambio adecuado para cada uno de ellos son los siguientes:

$\int f\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)\cdot dx$, donde f es una función racional de las variables del integrando, con $a\neq 0$. Se aplican tres posibles cambios de variable, según sea la expresión siguiente:

1.- $ax^2+bx+c=p^2-\left(qx+r\right)^2\rightarrow$ cambio de variable, $qx+r=p\cdot sen\,t$

2.- $ax^2+bx+c=p^2+\left(qx+r\right)^2\rightarrow$ cambio de variable, $qx+r=p\cdot Sh\,t$

3.- $ax^2+bx+c=-p^2+\left(qx+r\right)^2\rightarrow$ cambio de variable, $qx+r=p\cdot Ch\,t$

RELACIONES BÁSICAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\mathrm{Ch}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\qquad \mathrm{Sh}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\qquad \mathrm{Ch}^2\,x-\mathrm{Sh}^2\,x=1$$

$$\mathrm{Ch}\,2x = \mathrm{Ch}^2\,x + \mathrm{Sh}^2\,x \qquad \mathrm{Sh}\,2x = 2\,\mathrm{Sh}\,x\,\mathrm{Ch}\,x \qquad \mathrm{ArgSh}\,x = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\mathrm{ArgCh}\,x = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad \mathrm{ArgTh}\,x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Integral de Riemann

1. LA INTEGRAL DEFINIDA O INTEGRAL DE RIEMANN

Definición (*Partición*).- Dados dos números reales tales que $a<b$, recibe el nombre de partición del intervalo cerrado $[a,b]$ todo conjunto finito de puntos de $[a,b]$, de los cuales uno es "a" y otro es "b":

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \,/\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$$

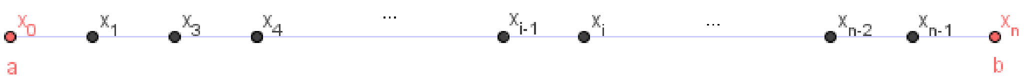


Figura 1.- Ejemplo de una partición de [a, b].

Definición (*Norma de una partición*).- Llamaremos norma de la partición P, y la designaremos por $\|P\|$ a la longitud del subintervalo más largo, es decir,

$$\|P\| = \max_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}|$$

Si todos los puntos de la partición son equidistantes, se habla de *partición regular*. En este caso se cumple $\|P\| = \Delta x$.

Definición.- Una partición P' del intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ es más fina que otra partición P del mismo intervalo $[a,b]$, si todo punto x_i de P pertenece a P'.

Definición (*Integrabilidad*).- Dada una función $y = f(x)$ acotada en un intervalo cerrado $[a,b]$, se dice que es integrable en este intervalo $[a,b]$ si para cualquier partición P, existe el límite

$$\lim_{\substack{\|P\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right) \quad \text{con} \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

En este caso, el valor del límite recibe el nombre de *integral definida o integral de Riemann* de f sobre $[a,b]$ y se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

En esta expresión, los números a y b se llaman respectivamente límite inferior y límite superior de integración.

Si P es regular, se verifica $\lim_{\substack{\|P\|\to 0 \\ (n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \right) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0 \\ (n\to\infty)}} \left(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x \right)$

La expresión $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$ se llama *Suma de Riemann* de $f(x)$ en $[a,b]$, correspondiente a una partición regular con *n* subintervalos iguales, de tamaño $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Definición (Suma *inferior y superior de Riemann*).- Se definen las sumas inferior y superior de Riemann de la función f(x) correspondientes a la partición P, y las designaremos por s(f,P) y S(f,P) respectivamente, como

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \text{ siendo } m_i = \min\{ f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1}), \text{ siendo } M_i = \sup\{ f(x) / x \in [x_{i-1}, x_i] \}$$

OBSERVACIÓN.- Si *f* es creciente en $[a,b]$, las sumas superior e inferior de Riemann para una partición regular son, respectivamente:

$$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n} \right)$$

$$s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n} \right)$$

Si *f* es decreciente las sumas son justo las contrarias.

Si la función es integrable, el valor de la integral de Riemann se puede calcular como límite de cualquier suma de Riemann correspondiente a una partición regular *P*.

TEOREMA.- Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ entonces, se verifica:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \quad \text{con} \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

para cualquier partición P_n, cumpliendo $\|P_n\| \to 0$.

Nótese que $m_i \le f(c_i) \le M_i$.

OBSERVACIÓN.- Si f es integrable en $[a,b]$, la aplicación de este teorema permite calcular $\int_a^b f(x)dx$ como el límite de una sucesión de sumas cualesquiera, pudiendo elegir las sumas superiores, las inferiores o cualquier otra según convenga. Concretamente, si se elige c_i, en el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, la suma de Riemann correspondiente, para una partición regular, sería:

$$\sigma(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + (i - \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}\right)$$

2. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

El valor de la integral de Riemann de una función $f(x)$, acotada y positiva en $[a,b]$, se puede interpretar como:

> "el área de la región limitada por el eje horizontal, las rectas verticales $x = a$ e $y = b$ y la gráfica de $f(x)$ en $[a,b]$"

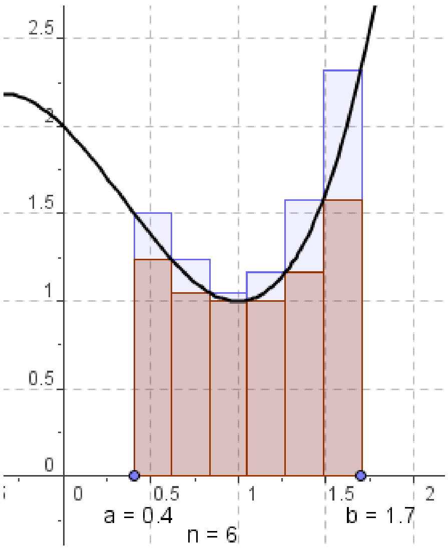


Figura 2.- Interpretación geométrica de la integral de Riemann

3. CONDICIONES DE INTEGRABILIDAD

TEOREMA.- Toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ es integrable en él.

IMPORTANTE.-También es integrable en $[a,b]$ toda función acotada que tenga en este intervalo un número finito de puntos de discontinuidad.

TEOREMA.- Toda función monónona en un intervalo cerrado $[a,b]$ es integrable en él.

IMPORTANTE.-También es integrable en $[a,b]$ toda función no monótona y acotada que pueda descomponerse en un número finito de intervalos donde sea monótona.

TEOREMA.- Es condición necesaria para que $f(x)$ sea integrable en el intervalo $[a,b]$, que esté acotada en él.

4. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DE RIEMANN

PROPIEDAD 1 (*Carácter lineal de la integral definida*).- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones integrables en [a, b] también son integrables las funciones $f(x) \pm g(x)$ y $k f(x)$ con $k \in \mathbb{R}$, cumpliéndose:

(i) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

(ii) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

PROPIEDAD 2 (*Inversión de los límites de integración*).- Si se invierten los límites de una integral ésta cambia de signo, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

PROPIEDAD 3.- Para todo número real *a* se tiene

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

PROPIEDAD 4 (Propiedad aditiva del intervalo de integración).- Si *f* es integrable en los intervalos $[a,b]$ y $[b,c]$ con $a < b < c$ entonces *f* es integrable en $[a,c]$ siendo,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

PROPIEDAD 5 (Positividad).- Si *f* es integrable y no negativa en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

PROPIEDAD 6 (*Propiedad de monotonía*).- Si *f* y *g* son integrables en $[a,b]$ y además $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

PROPIEDAD 7 (*Acotación modular*).- Se verifica

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

5. TEOREMA DEL VALOR MEDIO

TEOREMA DEL VALOR MEDIO.- Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ entonces existe un número *c* comprendido entre *a* y *b* tal que

$$\int_a^b f(x) = f(c)(b-a)$$

Este teorema tiene una *interpretación geométrica* sencilla (ver figura):

"El área limitada por la curva en el intervalo [a, b] es igual a la de un rectángulo de base igual a la amplitud del intervalo y de altura igual a la ordenada de la curva en un punto de dicho intervalo".

Definición (*Valor medio*).- Si *f* es una función continua en $[a,b]$, entonces el valor medio de *f* en este intervalo se define como:

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

El valor medio verifica $\mu = f(c)$, es decir que se trata de un valor que toma la función en algún punto de $[a,b]$. El valor medio de una función de variable continua, constituye una generalización de la media aritmética de n números.

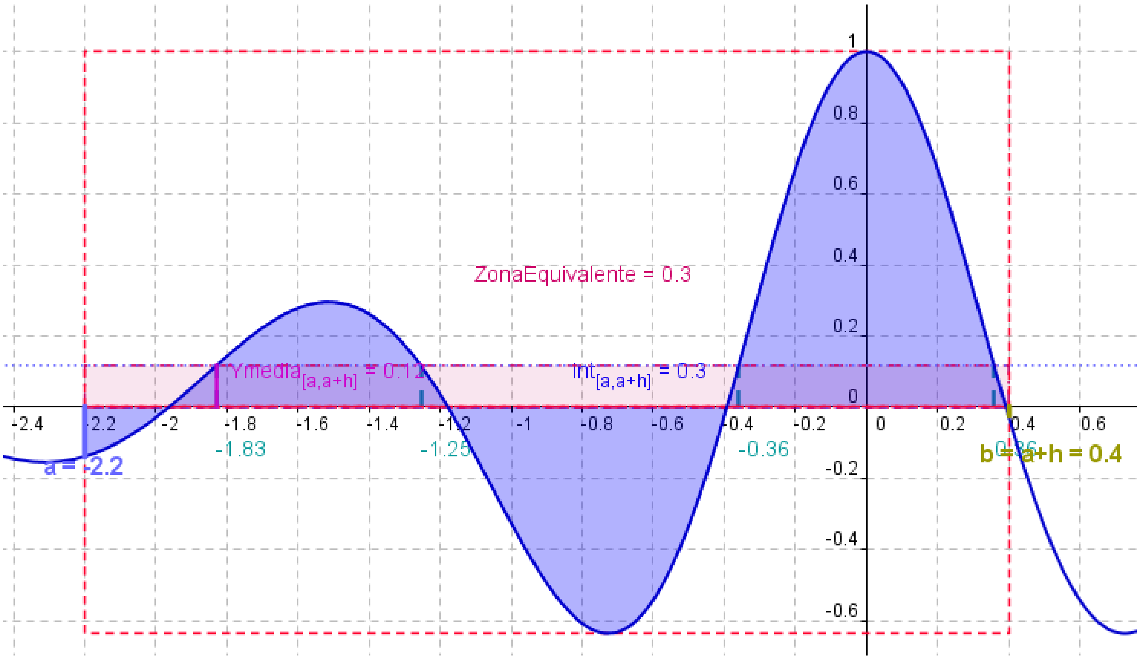


Figura 3.- Interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales.

6. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Este teorema relaciona estrechamente conceptos aparentemente tan dispares como el de primitiva e integral definida de una función continua y, a partir de él se obtiene un procedimiento sencillo para calcular integrales definidas sin usar límites de sumas.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL.- Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces, la función $F(x)$ definida por

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{con} \quad x\in[a,b]$$

es derivable en dicho intervalo verificándose $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

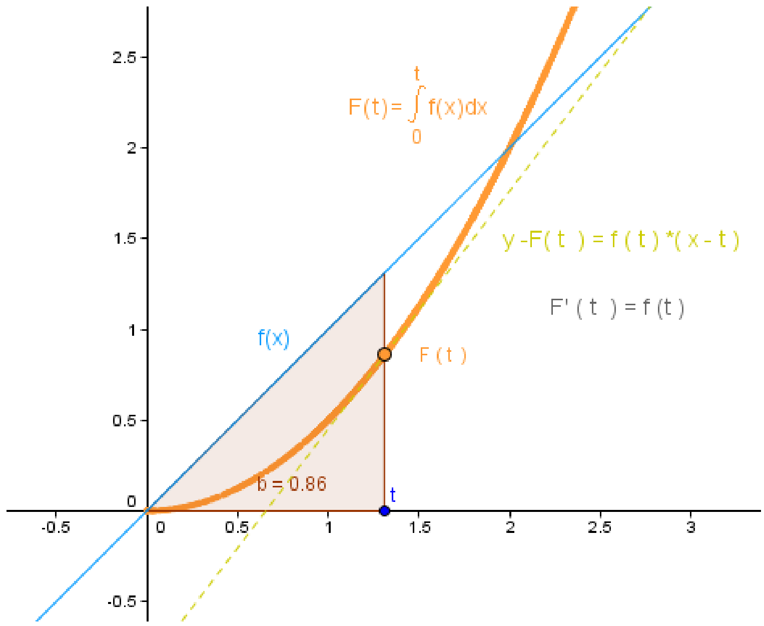


Figura 4.- Representación gráfica para ilustrar el Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

A partir de este teorema se puede probar la Regla de Barrow, que es la regla práctica para calcular integrales definidas . Pero además, el teorema fundamental, es una nueva forma de definir funciones no elementales.

7. LA REGLA DE BARROW

Esta regla, explica cómo utilizar las primitivas en el cálculo de integrales definidas de funciones continuas en el intervalo de integración.

REGLA DE BARROW.- Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

donde $G(x)$ es cualquier primitiva de $f(x)$.

8. CÁLCULO DE INTEGRALES DEFINIDAS

En general, las integrales definidas se calculan mediante la regla de Barrow. En el caso de que se utilice un cambio de variable para obtener la primitiva, los límites de integración de la integral en la nueva variable, se ven modificados de la forma indicada por el siguiente teorema.

TEOREMA (*Cambio de variable en integrales definidas*).- Si la función $u = g(x)$ tiene derivada continua en $[a,b]$ y f es continua en el rango de g, entonces

$$\int_a^b f\left[g(x)\right]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Si la integral indefinida se resuelve por partes, los límites de integración afectarán naturalmente tanto a la nueva integral que se debe calcular como a la parte ya calculada de la primitiva. Es decir,

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

En el caso de que las funciones del integrando tengan la propiedad de ser pares, impares o periódicas, las integrales pueden simplificarse de la forma que indica el siguiente teorema.

TEOREMA (*Integración de funciones pares, impares y periódicas*).- Sea f integrable en el intervalo [a, b].

(1) Si f es una función par, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) Si f es una función impar, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(3) Si f es una función periódica con periodo T, entonces

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

9. INTERPRETACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Hemos visto que la integral definida puede representar un área, pero también es la respuesta a muchos otros problemas planteados por la física y la técnica. En la tabla se recogen algunas interpretaciones de la integral definida, dependiendo del significado físico de f(x).

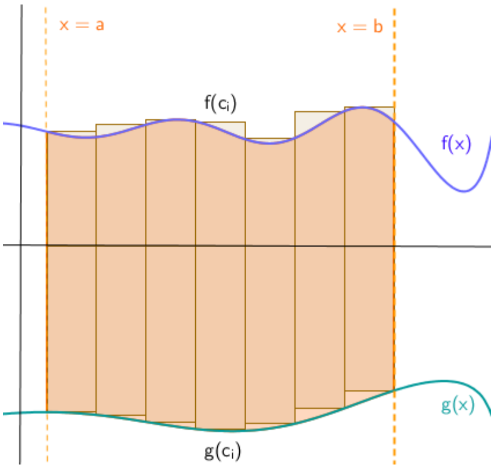
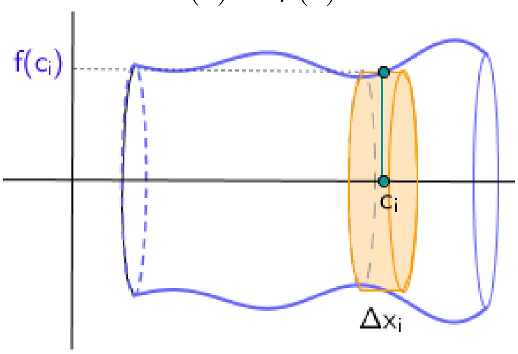
Función $h(x)$	Interpretación del rectángulo aproximante $h(c_i)(u_i - u_{i-1})$	Significado de la integral definida $\int_a^b h(u)\,du$
Densidad lineal $\delta(x)$	Estimación de la masa en $[x_{i-1}, x_i]$	Masa $\int_a^b \delta(x)\,dx$
Altura de una región plana limitada por dos curvas $h(x) = f(x) - g(x)$ 	Área de un rectángulo aproximante $[f(c_i) - g(c_i)](x_i - x_{i-1})$	Área de una región plana comprendida entre dos curvas $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$
Área de una sección plana del cuerpo de revolución obtenido al girar la curva $f(x)$ $$h(x) = \pi f(x)^2$$ 	Volumen de una rebanada del sólido $\pi[f(c_i)]^2(x_i - x_{i-1})$	Volumen de la superficie de revolución $\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$
Velocidad $v(t)$	Estimación de la distancia recorrida entre los tiempos t_{i-1} y t_i	Distancia $\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$

Tabla 1.- Interpretaciones de la integral definida.