Prácticas Matlab

Práctica 12: Integración

Objetivos

- Calcular integrales definidas de forma aproximada, utilizando sumas de Riemann.
- Profundizar en la comprensión del concepto de integración.
- Manejar los recursos de Matlab para el cálculo de primitivas y para el cálculo aproximado y exacto de integrales definidas.
- Dibujar regiones del plano, como ayuda para el planteamiento de integrales.

Comandos de Matlab

int

Calcula de manera simbólica la integral de la función f

Ejemplo:

```
syms x
int(x^2/(x^6-8))
```

rsums

Aproxima la integral de f mediante sumas de Riemann y realiza una representación gráfica de los rectángulos.

Ejemplo:

```
syms x

rsums exp(-x^2)
```

quad

Utiliza el método de cuadratura adaptativa de Simpson para calcular la integral numérica.

`quad('funcion',a,b)` Utiliza como tolerancia 1.e-6

`quad('funcion',a,b,tol)` aproxima la itnegral de la función entre a y b tomando como tolerancia tol

Ejemplo:

```
f=inline('exp(x.^2)');

quad(f,0,1)
```

trapz(X,Y)

Utiliza la regla trapezoidal para calcular la integral de una función

trapz(X,Y) aproxima el valor de la integral de Y con respecto a X.

Ejemplo:

```
X=0:0.001:1;
Y=exp(X.^2);
trapz(X,Y)
```

Ejercicios resueltos

1

Cálculo de primitivas de una función

Calcular:

(a) $\int sen(ax)\cos(bx)\,dx$

(b) $\int \cos(\log x)\,dx$

(c) $\int e^{-x^2}\,dx$

Solución

(a) Código Matlab

```
syms a b x
f=sin(a*x)*cos(b*x);
integral=diff(f,x);
pretty(integral)
```

Nota: La integral es un proceso difícil y puede suceder que Matlab no encuentre la primitiva de una función. En estos casos devuelve un mensaje del tipo "Explicit integral could not be found" como es el caso de la integral del apartado (b).

2

Definición de integral definida: Sumas de Riemann

TEORÍA.- Si f es creciente en $[a,b]$, las sumas superior e inferior de Riemann para una partición regular son, respectivamente:

$$S(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$s(f,P_n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}f\left(a+(i-1)\frac{b-a}{n}\right)$$

Si f fuera decreciente las sumas son justo las contrarias.

(a) Considerar la función $f(x)=e^{-x^2}$. Dibujar su gráfica en el intervalo [0, 1].

(b) Calcular la expresión de la suma de Riemann superior resultado de dividir el intervalo [0,1] en 10 subintervalos iguales. Escribir después el código matlab para obtener su valor.

(c) Dibujar los rectángulos cuyo área se corresponde con la suma de Riemann del apartado anterior. Crear para ello una función externa que dependa de la función, los extremos del intervalo y el número de rectángulos.

(d) Aproximar el valor de la integral $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ mediante la suma superior de Riemann obtenida dividiendo el intervalo $[0,1]$ en 10 subintervalos iguales.

Solución

(a) Comandos Matlab

```
x=0:.05:1;
y=exp(-x.^2);
plot(x,y,'r','LineWidth',2)
hold on
area(x,y)
```

(b) La suma de Riemann será

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \sum_{i=1}^{10} f(c_i)\Delta x = \left\{ \begin{array}{l} \Delta x = \dfrac{1}{10} \\ c_i = \dfrac{i-1}{10} \end{array} \right\} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} e^{-\left(\frac{i-1}{10}\right)^2}$$

Comandos matlab

```
%De forma simbólica
syms n
S=symsum((1/10)*exp(-(n-1)^2/100),n,1,10);
Suma=double(S);
%De forma numérica
m=1:10;
am=(1/10)*exp(-(m-1).^2/100);
S=sum(am)
```

(c) Para no complicar el código se considerará que la función $f(x)$ es positiva en el intervalo [a, b].

El siguiente código se incluirá en un fichero de nombre dibujorectangulos.m

```
function dibujorectangulos(f,a,b,n)
dx=(b-a)/n;
for i=1:n
   c=a+(i-1)*dx;
   h=subs(f,c);
   %Crea un rectángulo con un vértice en el punto (c,o) de
   %ancho dx y de alto h
   if h>0
     rectangle('position',[c 0 dx h],'FaceColor',[1 0.9 0.8])
   end
end
hold on
ezplot(f,a,b)
end
```

Para ejecutar esta función se escribirá en la ventana de comandos

```
dibujorectangulos('exp(-x^2)',0,1,10)
```

(d) *Código matlab*

```
function area=areaAprox(f,a,b,n)
dx=(b-a)/n;
area=0;
for i=1:n
   c=a+(i-1)*dx;
   h=subs(f,c);
   area=area+dx*h;
end
end
```

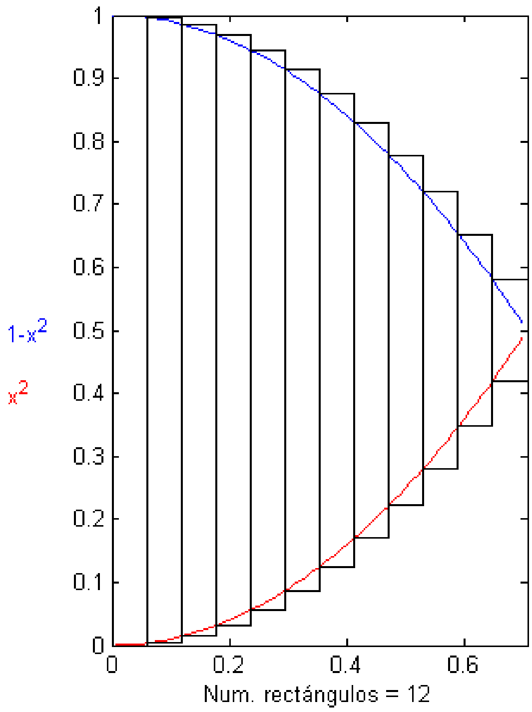
Para ejecutar esta función se escribirá en la ventana de comandos

```
valor=areaAprox('exp(-x^2)',0,1,10)
```

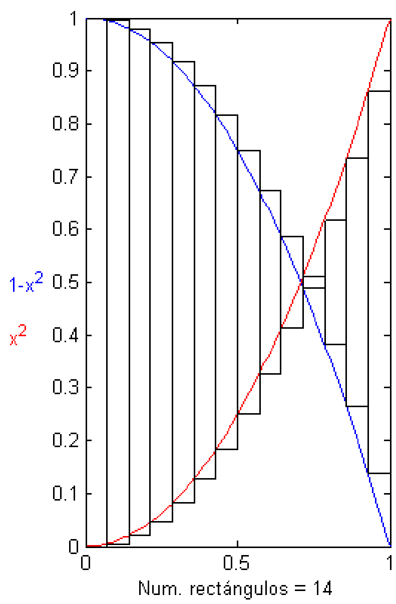
3

Área entre dos curvas como límite de sumas de Riemann

(a) Considerar el área entre las gráficas de $y=x^2$, $y=1-x^2$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Utilizar rectángulos verticales para aproximar el área y realizar la representación de dichos rectángulos junto con las gráficas de las dos funciones.



(c) Aproxima mediante rectángulos verticales el área entre las dos curvas cuando se considera el intervalo $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$



Solución

(a) El área del rectángulo en el i-ésimo subintervalo de $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, es decir en el intervalo $\left[x_{i-1},x_i\right]$, será

$$A_i = \left(f_{\text{superior}}\left(x_{i-1}\right) - f_{\text{inferior}}\left(x_{i-1}\right)\right)\Delta x_i$$

es decir,

$$A_i = \left(f\left(x_{i-1}\right) - g\left(x_{i-1}\right)\right)\Delta x_i$$

Nota: Por simplicidad en el código se considerará que la gráfica de f está por encima de la de g en el intervalo [a,b] y se deberá tener en cuenta a la hora de llamar a la función. Para una versión más completa se puede descargar el fichero areas.m.

```
function area=areaAproximada(f,g,a,b,n)
dx=(b-a)/n;
area=0;
hold on
for i=1:n
   c=a+(i-1)*dx;
   h1=subs(f,c);
   h2=subs(g,c);
   h=h1-h2;
   area=area+dx*h;
   %Crea un rectángulo con un vértice en el punto (c,0) de
   %ancho dx y de alto h
   if h>0
     rectangle('position',[c 0 dx h],'FaceColor',[1 0.9 0.8])
   end
end
xx=a:0.01:b;
y1=subs(f,xx);
y2=subs(g,xx);
plot(xx,y1,'r','LineWidth',3)
plot(xx,y2,'b','LineWidth',3)
end
```

Para llamar a la función se utilizará

```
areaAproximada('1-x^2','x^2',0,1/sqrt(2),40);
```

(b) Podría obtenerse el valor pedido tecleando en la ventana de comandos:

```
areaAproximada('1-x^2','x^2',0,1/sqrt(2),31)+areaAproximada('x^2','1-
x^2',1/sqrt(2),1,9)
```

Ejercicios propuestos

1

Repetir el ejercicio propuesto 2 tomando

a) como altura de cada rectángulo el valor de $f(x)$ en el extremo derecho de cada uno de ellos.

b) tomando como altura de cada rectángulo el valor de $f(x)$ en el punto medio de cada uno de ellos.

2

Utiliza rectángulos horizontales para aproximar el área entre las curvas $x = y$, $x = \sqrt{y}$ en el interval [0,2].

En este caso el área del rectángulo en el i-ésimo subintervalo, es decir en $[y_{i-1}, y_i]$, será

$$A_i = \left(f_{derecha}\left(y_{i-1}\right) - f_{izquierda}\left(y_{i-1}\right)\right) \Delta y_i$$