Prácticas Matlab

Práctica 3

Objetivos

- Repasar, mediante ejemplos, la definición de polinomio de Taylor.
- Ayudar a comprender la aproximación local que proporcionan los polinomios de Taylor observando la incidencia que tiene en la aproximación el grado del polinomio de Taylor y la cercanía al punto en el que se hace el desarrollo.

Comandos de Matlab

taylor

taylor(f,n,a)
Calcula el polinomio de Taylor de la función f en el punto a de grado n-1.

Ejemplo
```
syms x
f=x*sin(x+1);
taylor(f,5,0)
%Devuelve el polinomio de Taylor de f en el punto 0 de grado 4.
```

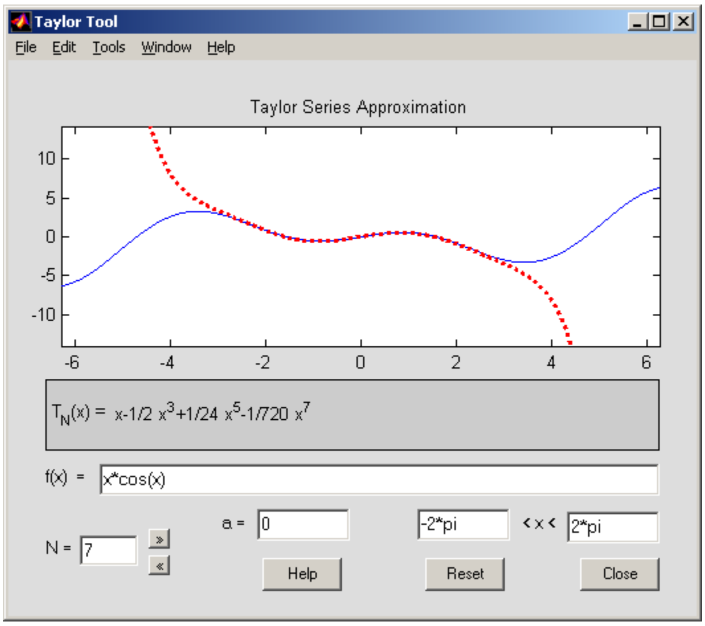
Herramienta taylortool

En esta práctica utilizaremos una herramienta de Matlab que permite obtener el polinomio de Taylor de una función y su representación gráfica junto con la función.

Ejecuta en la ventana de comandos la orden:

```
>> taylortool
```

Se abrirá una ventana (ver figura) en la que puedes introducir la función, el grado del polinomio y el intervalo en el que quieres representar la función y el correspondiente polinomio.



En el ejemplo de la figura se trata del polinomio de Taylor centrado en el punto $a = 0$ de grado 7 para la función $f(x) = x \cos x$ en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Con los botones en forma de flecha puedes incrementar y/o disminuir el grado del polinomio.

Observa que a medida que el grado del polinomio aumenta el polinomio de Taylor aproxima mejor a la función y en un intervalo más grande.

Ejemplos resueltos

1

Considera el polinomio $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 1$.

(a) Calcula con Matlab el polinomio de Taylor de grado 1 en el punto $a = 0$. Observa que se trata de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $a = 0$.

(b) Con ayuda de la herramienta "taylortool" considera la misma función y el mismo punto y obtén sucesivamente el polinomio de Taylor de grado 2, de grado 3, de grado 4 y de grado 5

Solución:

(a) Polinomio de Taylor de grado 1

(b) Rellena la siguiente tabla con los resultados que has obtenido con la herramienta taylortool

Polinomio de Taylor de grado 2	
Polinomio de Taylor de grado 3	
Polinomio de Taylor de grado 4	
Polinomio de Taylor de grado 5	
¿Qué ocurre con los polinomios de grado mayor o igual que 4?	

2

En este ejercicio vamos a ver cómo influye

A.- El grado del polinomio de Taylor cuando se desea aproximar el valor de la función en un punto.

B.- La distancia al centro del punto donde se desarrolla.

Supongamos, por ejemplo, que queremos calcular $\sqrt{1.1}$, $\sqrt{1.5}$ ó $\sqrt{2}$. Vamos a obtener su valor aproximado considerando diferentes polinomios de Taylor centrados en el 0.

Se pide:

1. Calcula el polinomio de Taylor de órdenes 1, 3, 5 y observa la representación de la función con cada uno de los polinomios. Puedes utilizar la herramienta "taylortool" con $f(x)=\sqrt{1+x}$ y el valor $a=0$.

2. Para cada uno de los polinomios, obtén el valor aproximado de $f(x)=\sqrt{1+x}$, evaluándolos en x=1.0, en x=0.5 y en el punto 0.1. Ayúdate para ello del fichero "evaluar.m

Solución:

1.

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	Observa que es la recta tangente a la función $y=\sqrt{1+x}$ en el punto a=0.

Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	
Polinomio de Taylor de grado 5 en a=0	

Órdenes Matlab (fichero evaluar.m)

```
syms x
f=sqrt(1+x);
a=0;
orden=5;
poli=taylor(f,orden+1,a);
puntos=[1.0 0.5 0.1];
valorPolinomio=subs(poli,puntos);
valorFuncion=subs(f,puntos);
error=valorPolinomio-valorFuncion;
disp('----------------------------------------------')
disp(['     x         f(x)        T(x)       Error'])
disp([puntos'  valorFuncion'  valorPolinomio'    error'])
```

Considerar la función $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 1$

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x) =$	$T_1(1) =$	$f(1) - T_1(1) =$
Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	$T_3(x) =$	$T_3(1) =$	$f(1) - T_3(1) =$
Polinomio de Taylor de grado 5 en a=0	$T_5(x) =$	$T_5(1) =$	$f(1) - T_5(1) =$

Considerar la función $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 0.5$

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x) =$	$T_1(0.5) =$	$f(0.5) - T_1(0.5) =$
Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	$T_3(x) =$	$T_3(0.5) =$	$f(0.5) - T_3(0.5) =$
Polinomio de Taylor de grado 5 en a=0	$T_5(x) =$	$T_5(0.5) =$	$f(0.5) - T_1(0.5) =$

Considerar la función $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x = 0.1$

Polinomio de Taylor de grado 1 en a=0	$T_1(x) =$	$T_1(0.1) =$	$f(0.1) - T_1(0.1) =$

Polinomio de Taylor de grado 3 en a=0	$T_3(x) =$	$T_3(0.1) =$	$f(0.1) - T_3(0.1) =$
Polinomio de Taylor de grado 5 en a=0	$T_5(x) =$	$T_5(0.1) =$	$f(0.1) - T_1(0.1) =$

3

Realiza un gráfico en el que se muestren para los puntos x desde -0.9 a 3 los errores cometidos al sustituir $f(x) = \sqrt{1+x}$ por los polinomios de grado 1, 3 y 5.

Órdenes Matlab

```
syms x
f=sqrt(1+x);
a=0;
poli1=taylor(f,2,a);
poli3=taylor(f,4,a);
poli5=taylor(f,6,a);
puntos=-0.9:0.1:3;
plot(puntos, subs(f,puntos), '*g',puntos,subs(poli1,puntos),'*r',
puntos,subs(poli3,puntos), '*m', puntos,subs(poli5,puntos), '*b')
legend('Función','Grado 1','Grado 3','Grado 5')
```

A la vista de lo realizado en los ejercicios 2 y 3 ¿puedes extraer alguna conclusión respecto a la aproximación de $f(x) = \sqrt{1+x}$ por los diferentes polinomios de Taylor?

Observa cómo:

- cuanto más grande es el valor del grado del polinomio, n, la aproximación de $f(x)$ por su polinomio de Taylor es mejor.
- cuánto más cerca esté x del punto en el que se desarrolla el polinomio de Taylor, a, la aproximación de $f(x)$ por su polinomio de Taylor es mejor.
- La aproximación del polinomio de Taylor es local. En puntos alejados del punto en el que se desarrolla el polinomio el valor de éste y la función pueden no ser próximos.

Ejemplos propuestos

1

Realizar los ejercicios 2 y 3 anteriores para la función $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ considerando a=1 y los puntos -1.5, -1.1, 1.1, 1.5, 4.

Escribe un comentario indicando lo que observes de los valores que hayas obtenido.

2

Considerar la función y=log(x). Dibujar sobre una misma ventana gráfica las seis subgráficas correspondientes a los polinomios de Taylor de grado 0, 1, 3, 5, 7 y 9 de esta función en el intervalo (0,3] en torno al punto $a = 1$. Sobre cada una indicar el error relativo cometido al aproximar la función logaritmo por el polinomio correspondiente en el punto $x = \dfrac{3}{2}$.

Escribe un comentario indicando lo que observes de los valores que hayas obtenido.

3

Encontrar el polinomio de Taylor de $e^x sen x$ centrado en el punto $a = 0$ para distintos grados (n=8, 20, 30) de dos formas distintas

- Directamente considerando como función $e^x sen x$
- Multiplicando los polinomios de Taylor de e^x por el de $sen x$ del grado que se considere y quedándose con los términos del polinomio resultante hasta el grado n.