Prácticas Matlab

Práctica 4

Objetivos

- Analizar cómo incide en la aproximación mediante polinomios de Taylor el considerar distintas funciones.
- Mostrar cómo acotar el error que se comente al aproximar el valor de una función en un punto por su polinomio de Taylor utilizando la expresión del resto de Lagrange.

Comandos

Los comandos que se utilizarán ya se han visto en prácticas anteriores.

Ejemplos resueltos

1

Consideremos $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=(1.5)^x$ y supongamos que deseamos obtener de forma aproximada el valor de $\sqrt{1.5}$ utilizando polinomios de Taylor. Observamos que $f(1.5)=g(0.5)=\sqrt{1.5}$

Se pide:

(a) Obtener los polinomios de Taylor de órdenes 2, 3, 4 en a=1 de la función f(x) y de g(x).

(b) Rellenar la siguiente tabla sustituyendo los polinomios en los puntos que se indican

Polinomios de $f(x)=\sqrt{x}\quad a=1$	T_2	T_3	T_4
$x=1.5$			
Polinomios de $g(x)=(1.5)^x\quad a=1$	T_2	T_3	T_4
$x=0.5$			

¿Qué polinomio de Taylor aproxima mejor al valor $\sqrt{1.5}$?

Una aproximación de $\sqrt{1.5}$ con 20 cifras decimales es: 1.2247448713915890491. Puedes utilizar Matlab para calcular este valor tecleando:

```
>>vpa(sqrt(1.5),20)
```

Solución:

(a) Código Matlab

```
syms x
% Funciones a utilizar
f=sqrt(x);
g=(1.5)^x;
% Punto en el que se desarrolla el polinomio
a=1.0;
% Polinomios de Taylor de grados 3, 4 y 5
polinomiosf=[taylor(f,3,a) taylor(f,4,a)  taylor(f,5,a)]
polinomiosg=[taylor(g,3,a) taylor(g,4,a)  taylor(g,5,a)]
```

(b) *Código Matlab*

Al código del apartado anterior habrá que añadir:

```
% Puntos a analizar
punf=1.5;
pung=0.5;
% Sustitución de los polinomios de Taylor de f en puntf
valorPolinomiof=subs(polinomiosf,x,punf);
% Sustitución de los polinomos de Taylor de f en puntg
valorPolinomiog=subs(polinomiosg,x,pung);
% Mostramos los valores de las funciones y de los polinomios
disp('----------------Valores funciones--------------------')
disp('    x                   f(x)')
disp([punf    subs(f,x,punf)])
disp('    x                   g(x)')
disp([pung    subs(g,x,pung)])
disp('----------------Valores polinomios--------------------')
disp('    grado              Taylor_f                 Taylor_g')
disp([[2 3 4]' valorPolinomiof' valorPolinomiog'])
```

2

Se considera la función $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(a) Calcula para esta función Δy y la diferencial en $a=0$ para distintos valores de Δx (considera $\Delta x = 0.5$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.01$)

	$\Delta y = f(0+\Delta x) - f(0)$	$dy = f'(0)\Delta x$	$\Delta y - dy$
$\Delta x = 0.5$			
$\Delta x = 0.1$			
$\Delta x = 0.01$			

Nota: Como puedes observar en la tabla anterior se tiene que $\Delta y \approx dy$ para valores pequeños de Δx .

(b) ¿Podrías obtener un valor aproximado de $f(0+\Delta x)$ realizando únicamente operaciones aritméticas elementales y conociendo el valor de $f(0)$ y el de $f'(0)$? ¿Podrías estimar el error de esta aproximación?

(c) Aplica el apartado (b) al caso en el que $\Delta x = 0.5$ y escribe una cota del error que se comente al aproximar $f(0.5) = \sqrt{\frac{2}{3}}$ por $f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot \frac{1}{2}$. Da un intervalo en el que puedas asegurar que está el valor exacto de $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solución:

(a) Código Matlab

```
syms x
f=1/sqrt(1+x);
a=0;
n=1;
%Cálculo a+incremento
incrementox=[0.5  0.1   0.01];
x=a+incrementox;
% Calculo del incremento y de la diferencial para los valores de h
incrementoy=subs(f,x)-subs(f,a);
derivada=diff(f,1);
der=subs(derivada,a);
diferencialy=der*incrementox;
%Escribimos en forma de tabla
disp([incrementox' incrementoy' diferencialy'])
```

(b) Sí, el valor de $f\left(0+\Delta x\right)$ se podría obtener de forma aproximada como $f\left(0\right)+f'\left(0\right)\Delta x$.

La diferencia entre estos dos valores es el resto de orden 1:

$$R_1 = \frac{f''\left(t\right)}{2!}\left(\Delta x\right)^2$$

siendo t un punto intermedio a 0 y Δx.

Si calculamos un valor M de manera que

$$\left|f''\left(t\right)\right| \le M \qquad para\ t\ comprendido\ entre\ 0\ y\ \Delta x$$

se tendría que una cota del error de la aproximación sería:

$$\left|error\right| = \left|R_1\right| = \left|\frac{f''\left(t\right)}{2!}\left(\Delta x\right)^2\right| \le \frac{M}{2!}\left(\Delta x\right)^2$$

En el caso particular de que $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ la derivada segunda es $f''\left(x\right)=\dfrac{3}{4}\left(1+x\right)^{-5/2}$ que al ser una función decreciente y positiva toma su valor más grande en valor absoluto en el punto 0, por lo que bastaría tomar $M=\left|f''\left(0\right)\right|$

(c) Observamos que $\sqrt{\dfrac{2}{3}} = f\left(0.5\right)$ y que $T_1\left(0.5\right) = f\left(0\right) + \dfrac{f'\left(0\right)}{1!}\cdot 0.5 = 0.75$.

Calculamos una cota del error que se comete al decir que $\sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0.75$.

Código Matlab

```
syms x
f=1/sqrt(1+x);
a=0;
n=1;
puntox=0.5;
%Para acotar el resto de Lagrange dibujamos la derivada
%de orden n+1 y vemos donde alcanza su valor máximo
dominio=a:0.01:puntox;
figure(1)
plot(dominio,subs(diff(f,n+1),dominio))
legend('Derivada n+1')
%Acotamos la expresión del resto acotando la
%derivada n+1 en t por M. Para este ejemplo
%la derivada n+1 toma el valor mayor, en valor
%absoluto, en el punto 0
M=abs(subs(diff(f,n+1),0));
%Escribimos una cota del Resto de Lagrange en valor absoluto
cotaResto=M/factorial(n+1)*(puntox-a).^(n+1);
```

```
%Calculamos el valor de la función y de su polinomio en el punto
%para ver la bondad de la cota del error calculada
valorFuncion=subs(f,puntox);
valorPolinomio=subs(taylor(f,n+1),puntox);
error=abs(valorFuncion-valorPolinomio);
disp('--------------------------------------------------')
disp([ '    x          f(x)      T(x)       error      cotaResto'])
disp([puntox'  valorFuncion'   valorPolinomio'  error'   cotaResto'])
```

Una cota del error sería 0.0938. El intervalo en el que se encuentra el valor exacto de $\sqrt{2/3}$ es el siguiente:

$$\left[0.75-0.0938,\ 0.75+0.0938\right]=\left[0.6562,\ 0.8438\right].$$

4

(a) De forma análoga al apartado anterior, ¿podrías realizar una estimación del error de la aproximación de $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a=0$ cuando x pertenece al intervalo $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$?

(b) ¿Cuál sería el grado del polinomio de Taylor que se necesitaría utilizar para aproximar $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ con un error menor que 10^{-8}?

(a) Bastaría sustituir en el código del apartado (c) del ejercicio anterior puntox por un vector con valores $0\leq x\leq\dfrac{1}{2}$. Por ejemplo: `puntox=0:0.1:0.5;`

Observa que como la derivada tercera es creciente pero tomando valores negativos el valor más grande en valor absoluto se encuentra en el punto 0. Es decir, $M=\left|f'''\left(0\right)\right|$

Si además incluyes el siguiente código puedes representar el error en valor absoluto entre el valor de la función y su polinomio que da el ordenador y el valor que hemos calculado como cota de dicho error.

```
figure(2)
plot(puntox,error,'b-',puntox,cotaResto,'ro-')
legend('|f(x)-T(x)|','Cota del resto')
```

(d) El grado del polinomio es 23. Basta ir aumentando el valor de n hasta comprobar que `cotaResto` es menor que 10^{-8}.

Código Matlab

```
syms x
f=1/sqrt(1+x);
a=0;
punto=0.5;
n=23;
polinomio=taylor(f,n+1,a);
derivadaN1=diff(f,n+1);
M=abs(subs(derivadaN1,x,0));
cotaResto=M/factorial(n+1)*(punto-a)^(n+1);
format long
disp([n cotaResto])
```

Importante: Observa que la cota de la derivada n+1 que se considera en la acotación del resto de Lagrange siempre es la derivada n+1 en el 0 ya que

$$f^{(n+1}\left(t\right)=\frac{\left(-1\right)^{n}\left(2n-1\right)!!}{2^{n}}\left(1+t\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \qquad \text{con} \quad 0\le t\le 0.5$$

$$\left|f^{(n+1}\left(t\right)\right|\le\left|f^{(n+1}\left(0\right)\right|=M$$

Otra forma:

```
syms x
f=1/sqrt(1+x);
a=0;
punto=0.5;
n=0;
cotaResto=1;
while cotaResto>(10^(-8))
    n=n+1;
    polinomio=taylor(f,n+1,a);
    derivadaN1=diff(f,n+1);
    M=abs(subs(derivadaN1,x,0));
    cotaResto=M/factorial(n+1)*(punto-a)^(n+1);
end
disp('--------------------------------------------------')
disp(['El grado del polinomio es '  num2str(n)])
```

Ejercicios propuestos

1

(1) Dibujar las gráficas de las siguientes funciones en $[0,1]$

$$(a) \qquad f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$$

$$(b) \qquad f(x) = \cos\log\left|x - \frac{3}{2}\right|$$

(2) Determinar el error que se comete al aproximar el valor de $f(1)$ al considerar el polinomio de Taylor de grado 3 en el punto $a = 0.5$ para las dos funciones anteriores.

2

Determinar el grado mínimo del polinomio de Taylor alrededor del punto $a = 0.5$ para cada una de las siguientes funciones de tal manera que el error que se cometa en la aproximación de $f(1)$ sea de 4 cifras significativas

$$(a) \qquad f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$$

$$(b) \qquad f(x) = \cos\log\left|x - \frac{3}{2}\right|$$