# Prácticas Matlab

## Práctica 5: Aproximación de la derivada

### Objetivos

- Aproximar numéricamente la derivada de una función a partir de valores conocidos de la función.

### Comandos de Matlab

`eps`

Es el epsilon máquina, su valor es 2^(-52), redondeando `2.22e-16`

### Ejemplos resueltos

**1**

**Diferencia progresiva**: $f'(a) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Para acotar el error que se comete en esta aproximación hay que tener en cuenta la fórmula de Taylor de grado 1,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + R_1$$

Luego

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{R_1}{h}$$

Como $R_1 = O(h^2)$, entonces $Error = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = O(h)$

Una cota del error podría obtenerse considerando que $\dfrac{R_1}{h} = \dfrac{f''(t)}{2!}h$

Si M es una cota de $\left|f''(t)\right|$ en $[a, a+h]$ entonces una cota del error es:

$$Error = \left|\frac{R_1}{h}\right| \leq \frac{M}{2!}h$$

Aplicación: Vamos a elegir una sucesión de puntos $h_n$ de forma que

$h_n \to 0$ y analizar qué ocurre con $D_n = \dfrac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n}$

Tomar $f(x) = e^x$, $a = 1$ y utilizamos $h_n = 10^{-n}$ para n desde 1 hasta 18.

Generar una tabla que muestre los valores de h y los valores de $D_n$. ¿Qué se observa si h es muy pequeño?

Solución:

Si los valores de $f(a+h_n)$ y $f(a)$ son muy próximos el valor que devuelve como aproximación es cero.

Órdenes Matlab

```
n=1:18;
h=10.^(-n);
a=1;
x=a+h;
valorfn=exp(x);
numerador=valorfn-exp(a);
Dn=numerador./h;
format long
disp(['    Incremento              Numerador             Aproximación'])
disp([h'     numerador'     Dn'])
```

2

a) En la tabla se presentan los siguientes datos:

| x | 0 | 0.25 | 0.5 | 0.75 | 1.0 | 1.25 | 1.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1.2 | 1.1035 | 0.9250 | 0.6363 | 0.20 | -0.4309 | -1.3125 |

Se pide calcular una aproximación de la derivada en $x = 0.5$ utilizando diferencia progresiva con h=0.5 y h=0.25.

b) Sabiendo que los datos se tomaron de la función,

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$

se pide comparar estos valores con la expresión que se obtendría derivando directamente la función y sustituyendo x=0.5 ($f'(0.5) = -0.9125$).

Rellenar para ello la siguiente tabla

| | Valor aproximado | $\dfrac{\lvert valor\ aproximado - valor\ real \rvert}{\lvert valor\ real \rvert} \cdot 100$ |
|---|---|---|
| h=0.5 | | |
| h=0.25 | | |

Solución:

(a) Para x=0.5 la solución es -1.45 con h=0.5 y -1.155 con h=0.25.

*Órdenes Matlab*

```
valoresx=[0 0.25 0.5 0.75 1 1.25 1.5];
valoresf=[1.2000    1.1035    0.9250    0.6363    0.2000   -0.4309   -
1.3125]
%Estudiamos la derivada en el elemento num del vector
%para el valor de x 0.5, num=3 (segundo elemento del vector tiempo).
num=3;
num1=num+1;
derivadaAprox=(valoresf(num1)-valoresf(num))/(valoresx(num1)-
valoresx(num))
```

(b)

| | Valor aproximado | $\dfrac{\lvert valor\ aproximado - valor\ real \rvert}{\lvert valor\ real \rvert} \cdot 100$ |
|---|---|---|
| h=0.5 | -1.45 | 58.9% |
| h=0.25 | -1.155 | 26.5% |

3

**Diferencia regresiva**: $f'(a) \approx \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}$

Para acotar el error que se comete en esta aproximación hay que tener en cuenta la fórmula de Taylor de grado 1,

$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + R_1$$

Luego

$$\frac{f(a) - f(a-h)}{h} = f'(a) + \frac{R_1}{h}$$

Como $R_1 = O\left(h^2\right)$, entonces $Error = \dfrac{f\left(a\right) - f\left(a-h\right)}{h} = O\left(h\right)$

Una cota del error podría obtenerse considerando que $\dfrac{R_1}{h} = \dfrac{f''\left(t\right)}{2!}h$

Si M es una cota de $\left|f''\left(t\right)\right|$ en $\left[a-h, a\right]$ entonces una cota del error es:

$$Error = \left|\frac{R_1}{h}\right| \leq \frac{M}{2!}h$$

**Aplicación**: Calcula para los datos del ejercicio 2 la derivada aproximada en x=0.5 con diferencia regresiva considerando h=0.25 y h=0.5. Comparar también con el valor exacto.

Solución.

| | Valor aproximado | $\dfrac{\left\|valor\ aproximado - valor\ real\right\|}{\left\|valor\ real\right\|} \cdot 100$ |
|---|---|---|
| h=0.5 | -0.55 | 39.7% |
| h=0.25 | -0.714 | 21.7 |

4

**Diferencia central**: Si la función puede evaluarse en puntos que están a ambos lados de a entonces se puede utilizar la siguiente fórmula que aproxima a la derivada

$$f'\left(a\right) \approx \frac{f\left(a+h\right) - f\left(a-h\right)}{2h}$$

El error de truncamiento $E = f'\left(a\right) - \dfrac{f\left(a+h\right) - f\left(a-h\right)}{2h}$ es de orden 2, $E = O\left(h^2\right)$. Para demostrar esta afirmación basta ver que

$$f\left(a+h\right) = f\left(a\right) + \frac{f'\left(a\right)}{1!}h + \frac{f''\left(a\right)}{2!}h^2 + O\left(h^3\right)$$

$$f(a-h) = f(a) - \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + O(h^3)$$

Restando

$$f(a+h) - f(a-h) = f'(a)2h + O(h^3)$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{O(h^3)}{2h}$$

Luego, $E = O(h^2)$

**Aplicación**: Calcular para los datos del ejercicio 2 la derivada aproximada en x=0.5 con diferencia central considerando h=0.25 y h=0.5. Comparar también con el valor exacto.

Solución:

| | Valor aproximado | $\frac{\lvert valor\ aproximado - valor\ real \rvert}{\lvert valor\ real \rvert} \cdot 100$ |
|---|---|---|
| h=0.5 | -1.0 | 9.6% |
| h=0.25 | -0.934 | 2.4% |

## Ejercicios propuestos

**1**

(a) La unidad de destello (flash) de una cámara opera por el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina al disparar la unidad. Los datos de la tabla describen la carga Q que queda en el capacitor (medida en microcoulombios) en el tiempo t (medido en segundos). Use los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde t=0.04

| T | Q |
|---|---|
| 0.0 | 100.0 |
| 0.02 | 81.87 |
| 0.04 | 67.03 |
| 0.06 | 54.88 |
| 0.08 | 44.93 |

| | |
|---|---|
| 0.10 | 36.76 |

(b) Un modelo exponencial para la carga es $Q = e^{4.6053-10.0055x}$. La derivada Q'(t) representa la corriente eléctrica que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara del destello. Con el resultado del apartado anterior estime la corriente cuando t=0.04 seg. Comparar el resultado con el obtenido en el apartado (a).

2

Para un circuito con voltaje E(t) e inductancia L, la primera ley de Kirchoff expresa la relación

$$E = L\frac{dI}{dt} + RI$$

donde R es la resistencia del circuito, L la inductancia e I la intensidad de corriente. En un circuito en el cual $R = 0.142\Omega$ y $L = 0.98H$ se ha medido la intensidad cada 0.01 segundos en el minuto 1.00 y el 1.10, obteniéndose los valores

| t | I |
|---|---|
| 1.00 | 3.10 |
| 1.01 | 3.12 |
| 1.02 | 3.14 |
| 1.03 | 3.18 |
| 1.04 | 3.14 |
| 1.05 | 3.18 |
| 1.06 | 3.26 |
| 1.07 | 3.32 |
| 1.08 | 3.18 |
| 1.09 | 3.26 |
| 1.10 | 3.12 |

Determinar numéricamente el valor aproximado de E(t).