E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación | Curso 2010-2011

Grados E.T.S.I. Industriales y Telecomunicación | Asignatura: Cálculo I

Tema 1: Números complejos

Ejercicios propuestos

1

Representar gráficamente la región del plano donde se encuentran los afijos de los siguientes conjuntos de números complejos

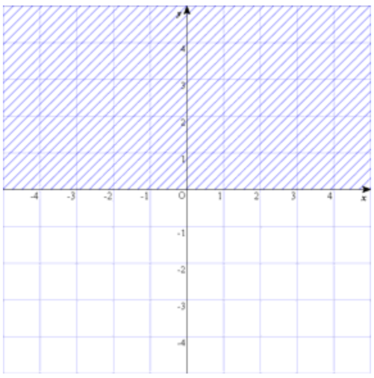
(a) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Im} z > 0\}$ (b) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, 0 \le \operatorname{Im} z \le \operatorname{Re} z\}$ (d) $\{z \in \mathbb{C} \,/\, \operatorname{Re}(\bar{z} - i) = 2\}$

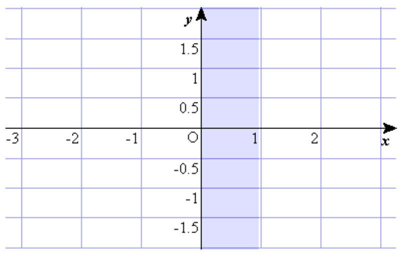
(e) $|z-1| = |z-3|$ (f) $2 \le |z| \le 3$

Solución:

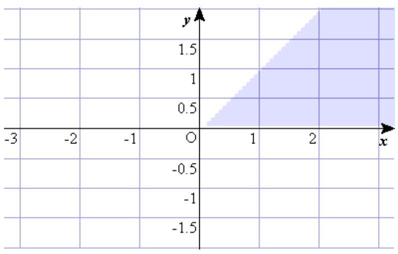
(a) Semiplano superior



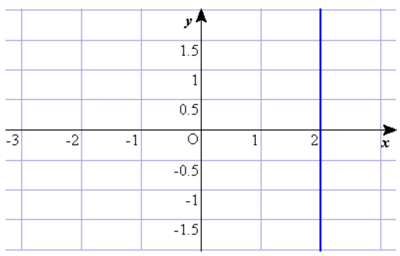
(b)



(c)



(d)



(e) Recta x=2

(f) Puntos interiores a la circunferencia centrada en el punto 0 y radio 3 y exterior a la circunferencia de centro 0 y radio 2.

2

Resolver las siguientes expresiones complejas, expresándolas en forma binómica:

a) i^{271} b) i^{670} c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ d) $\frac{1}{2-\sqrt{5}\cdot i}+\frac{1}{2+\sqrt{5}\cdot i}-\frac{1+2i}{2+i}$

e) $(1+i)^4$ f) $\frac{1}{1+4i}+\frac{1}{4-i}$ g) $\frac{(4-2i)\cdot(1+3i)}{3+2i}$

Solución: (a) $-i$ (b) -1 (c) i (d) $\frac{-7}{15}+\frac{3}{5}i$ (e) -4 (f) $\frac{5}{17}-\frac{5}{17}i$ (g) $\frac{50}{13}+\frac{10}{13}i$

3

Dados los números complejos: $z_1=2\sqrt{3}+2i$, $z_2=2e^{i\pi/3}$. Se pide:

a) Representar gráficamente en el plano complejo los afijos de los números z_1 y z_2.

b) Hallar el producto z_1z_2, expresar el resultado en forma binómica y en forma exponencial.

Solución: (b) $z_1z_2=8i=8e^{i\pi/2}$ $z_1z_2=2\sqrt{4+2^{2\sqrt{3}}}\,e^{arctg\left(\frac{2+2^{\sqrt{3}}\sqrt{3}}{2^{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}}\right)i}$

4

Escribir en las formas binómica, polar, exponencial y trigonométrica los complejos resultantes:

(a) $z_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot sen\frac{2\pi}{3}\right)$ b) $z_2=\frac{(5i)\cdot(2_{\pi/6})^4}{(4_{\pi/12})^3\cdot(10_{5\pi/12})}$ c) $z_3=4\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{\pi}{6}\cdot i}$

Solución: a) $z_1=-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}i=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{2\pi}{3}i}$ (b) $z_2=\frac{1}{8}i$ (c) $z_3=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}\,i$

5

Dado los números complejos $z=-1+2i$, $w=\sqrt{2}+3i$, $s=-i$ realizar las siguientes operaciones:

(a) $\frac{1}{2}z-\frac{3}{5}\overline{w}\,\mathrm{Im}(s)+szw$

(b) $2zw-s^{1023}z$

(c) $s^{1023}+s^{1024}+s^{1025}+s^{1026}$

(d) $s^1 + s^2 + s^3 + \ldots + s^{123}$

(e) $\overline{zw} - \overline{z}\,\overline{w}$

Solución:

(a) $\left(\frac{13}{5}\sqrt{2} - \frac{7}{2}\right) + i\left(\sqrt{2} + \frac{26}{5}\right)$ (b) $\left(-10 - 2\sqrt{2}\right) + i\left(4\sqrt{2} - 5\right)$

(c) 0 (d) -1 (e) 0

6

Escribir en forma binómica: $\left(\frac{10\sqrt{3} + 10i}{5 + 5i}\right)^{-6}$

Solución: $\frac{1}{2^9} i$

7

Calcula en función de $sen(\varphi)$ y $\cos(\varphi)$

(a) $sen(2\varphi)$ (b) $\cos(2\varphi)$ (c) $sen(4\varphi)$ (d) $\cos(4\varphi)$

Solución:

$$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - sen^2\varphi \qquad sen(2\varphi) = 2sen\varphi\cos\varphi$$

$$\cos(4\varphi) = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\ sen^2\varphi + sen^4\varphi$$

$$sen(4\varphi) = 4\cos^3\varphi\ sen\varphi - 4\cos\varphi\ sen^3\varphi$$

8

Calcular: (a) $z = \sqrt[6]{1 - \sqrt{3}i}$ (b) $\sqrt[3]{\frac{(1+i)(1-i)^4}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^3}}$

Escribe en forma binómica y exponencial el resultado.

Solución:

(a) $z_k = \sqrt[6]{2}_{\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{6}} = \sqrt[6]{2} e^{i\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{6}\right)}$ $k = 0,1,2,3,4,5$

(b) $w_o = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\frac{\pi}{4} + 2*0*\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\frac{1}{\sqrt[6]{2}} sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$$w_1 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\frac{9\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cos\left(\frac{9\pi}{12}\right) + i\frac{1}{\sqrt[6]{2}} sen\left(\frac{9\pi}{12}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\frac{17\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\left(\pi+\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\left(-\pi+\frac{5\pi}{12}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[6]{2}} e^{i\left(-\frac{7\pi}{12}\right)} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}} \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\frac{1}{\sqrt[6]{2}} sen\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$$

9

(a) ¿De qué número es raíz cúbica $2+3i$?

(b) ¿De qué número es raíz décima $1-\sqrt{3}i$?

Solución: (a) $-46+9i$ (b) $-512+512\sqrt{3}\,i = 1024e^{\frac{2\pi}{3}i}$

10

Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean 2+2i y 2-2i.

Recuerda: Si x_1, x_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ entonces se cumple: $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$; $x_1x_2=\frac{c}{a}$.

Solución: $x^2-4x+8=0$

11

Resolver $z^4-z^2(1+i)+i=0$.

Solución: $z=1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

12

Encontrar las raíces complejas de la ecuación $x^2+x+1=0$ y expresarlas en todas las formas posibles, así como gráficamente

Solución: $z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$