Tema 2: Funciones reales de una variable real

Cálculo de derivadas

Calcular la derivada primera de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt[5]{3x^2}$

$$y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{-\frac{4}{5}} \cdot (6x) = \frac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}} = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$$

2. $y = 5^{3x-4}$

$$\log y = (3x-4)\log 5 \;\rightarrow\; \frac{1}{y}y' = 3\log 5 \;\rightarrow\; y' = 5^{3x-4}(3\log 5)$$

3. $y = \log(x^2 + 7x)$

$$y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$$

4. $y = x^2 \cos x$

$$y' = 2x\cos x - x^2 \operatorname{sen} x$$

5. $y = \cos 3x^2$

$$y' = -6x \operatorname{sen} 3x^2$$

6. $y = \operatorname{tg} 7x$

$$y' = \frac{7}{\cos^2 7x}$$

También se puede resolver aplicando la derivada del cociente a la función $y = \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{\cos 7x}$.

7. $y = \dfrac{2x^2}{x^3 - 1}$

$$y' = \frac{4x(x^3-1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2} = \frac{-2x^4 - 4x}{(x^3-1)^2}$$

8. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1+\operatorname{sen} 2x}{1-\operatorname{sen} 2x}}$ (Sugerencia: utilizar derivación logarítmica)

Se toman logaritmos, $\log y = \frac{1}{3}\log(1+\operatorname{sen} 2x) - \frac{1}{3}\log(1-\operatorname{sen} 2x)$

Se deriva,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\frac{2\cos 2x}{1+\operatorname{sen}2x}+\frac{1}{3}\frac{2\cos 2x}{1-\operatorname{sen}2x}=\frac{4}{3}\frac{\cos 2x}{1-\operatorname{sen}^2 2x}=\frac{4}{3\cos 2x}$$

$$y'=\frac{4}{3\cos 2x}\sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{sen}2x}{1-\operatorname{sen}2x}}$$

9. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right]=\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$

10. $y=\dfrac{1}{\log\left(x^{1/2}+2x\right)}$

$$y=\left[\log\left(x^{1/2}+2x\right)\right]^{-1}\qquad y'=-\left[\log\left(x^{1/2}+2x\right)\right]^{-2}\frac{1}{x^{1/2}+2x}\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}+2\right)$$

$$y'=-\frac{1+4\sqrt{x}}{2\left(x+2x\sqrt{x}\right)\left[l\log\left(\sqrt{x}+2x\right)\right]^2}$$

Ejercicios propuestos

1

Dadas las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}\quad(x\neq 2)$

(b) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}\quad(x=-1)$

(c) $f(x)=\cos\dfrac{x}{3}+\cos\dfrac{x}{4}$

(d) $f(x)=\cos 10x+\cos(10+\pi)x$

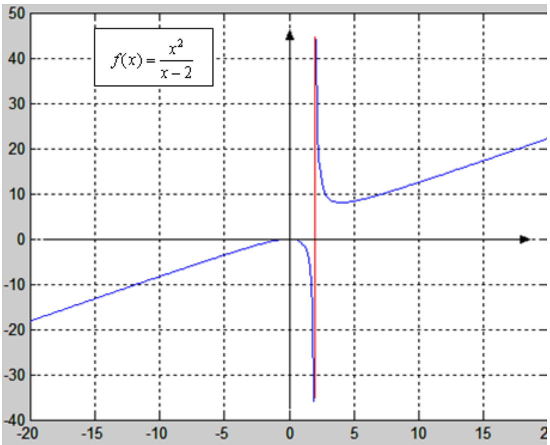
(e) $f(x)=\log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\quad(x=1)$

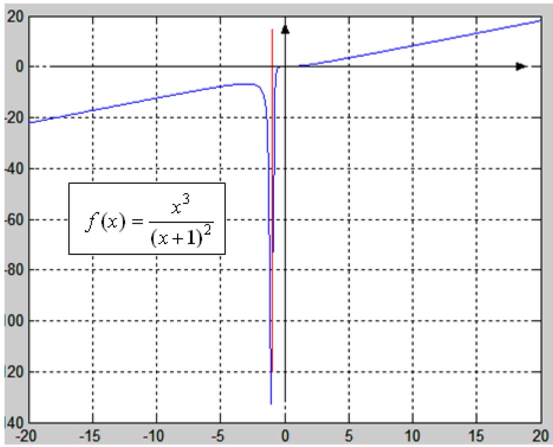
(f) $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\quad(x=-1)$

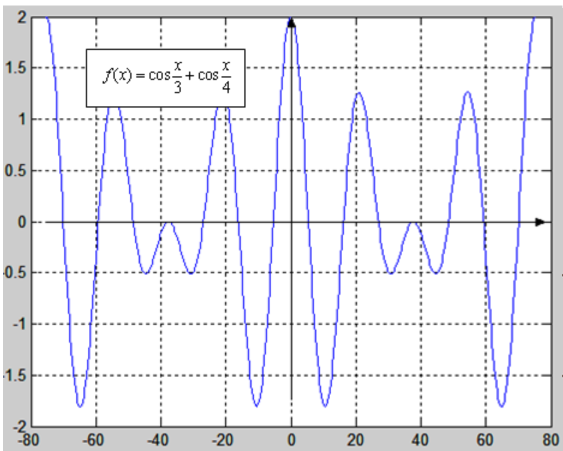
Se pide:

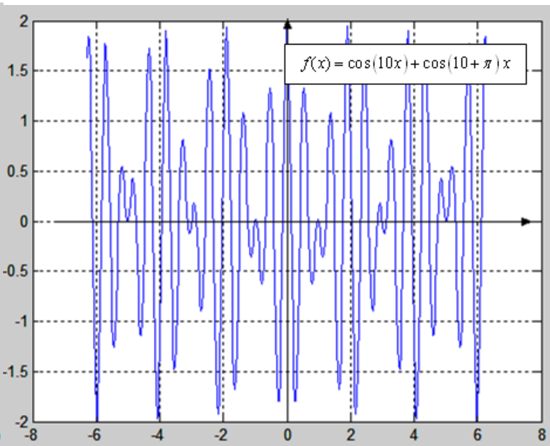
1. Obtener su dominio.
2. Calcular el límite en $x=0$, o en los puntos indicados.
3. Estudiar la continuidad en $\mathbb{R}$.
4. Estudiar las simetrías, y la periodicidad.
5. Sin utilizar la derivada, ¿podrías esbozar la gráfica de alguna de estas funciones?

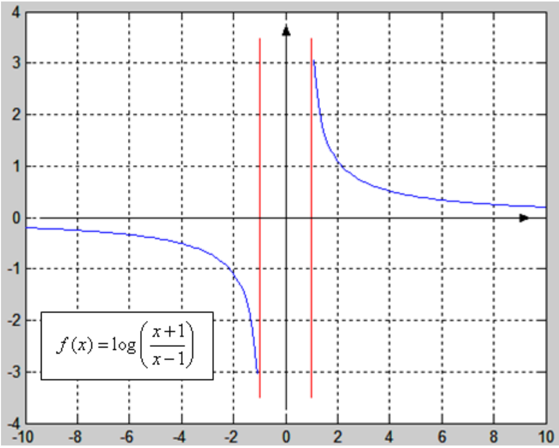
Solución:

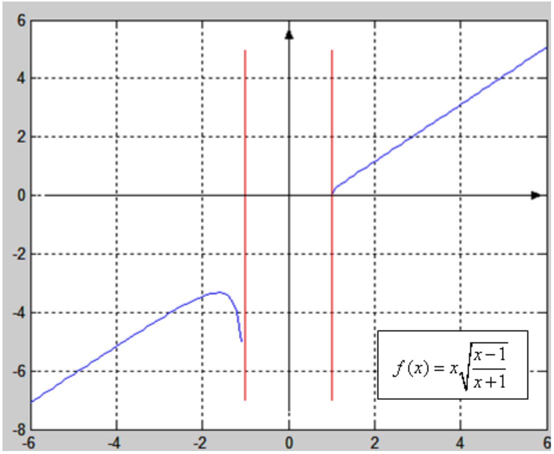












2

Dada la función $f(x)=\dfrac{x(\log x)^2}{(x-1)^2}$. Se pide:

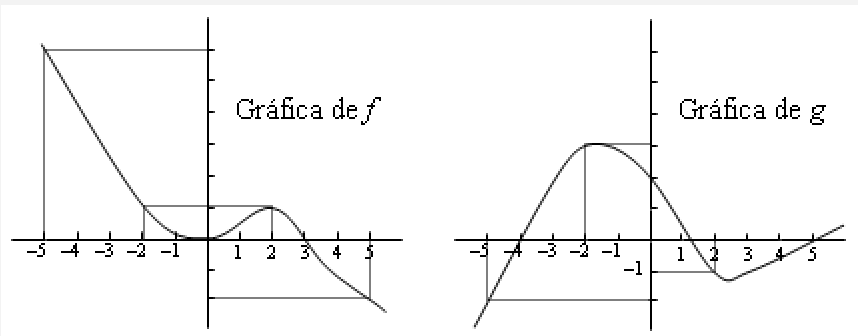
Determinar y representar su dominio. ¿Se podría asignar a f(x) algún valor en los puntos de discontinuidad para que f sea continua en el intervalo $(0,\infty)$?

Solución:

Dom *f* = $(0,\infty)-\{1\}=\mathbb{R}^+-\{1\}$. Se puede redefinir *f(x)* para que sea continua en $(0,\infty)$. Asignando *f(1)* = *1*, se evita la discontinuidad de *f(x)* en el punto x = 1.

3

Considera la función $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, donde las gráficas de *f* y *g* son las que te damos a continuación.



a)

1. Calcula *h*(–2) y *h*(3)
2. Calcula aproximadamente *f* '(–2), *f* '(3), *g*'(–2) y *g*'(3).
3. Calcula aproximadamente *h*'(–2), *h*'(3).

b) Con las mismas gráficas que en el apartado anterior, sea $h(x) = f\,[g(x)]$.
1. Calcula $h(-2)$ y $h(3)$
2. ¿Es $h'(-3)$ positivo, negativo o cero? Explica cómo puedes saberlo.
3. ¿Es $h'(-1)$ positivo, negativo o cero? Explica cómo lo averiguas.

Solución: (a.1) $h(-2) \approx 3$; $h(3) \approx 0$

(a.2) $f'(3) \approx -1$; $f'(-2) \approx -1.25$; $g'(-2) \approx 0.25$; $g'(3) \approx 1/3$

(a.3) $h'(-2) \approx -3.5$; $h'(3) \approx 1$

(b.1) $h(-2) \approx 0$; $h(3) \approx 0$ (b.2) 0 (b.3) Positivo.

4 De una cierta función f conocemos algunos valores, dados en la siguiente tabla:

x	1	1'9	1'97	2	2'02	2'2	3	3'9	3'99	4	4'01	4'1
$f(x)$	2'5	6'6	6'90	7	7'05	7'5	8	8'82	8'98	9	9'2	11

a) Usa esta tabla para aproximar el valor de la derivada de f en 2.

b) A partir de la información que te da esta tabla, ¿crees que $f(x)$ es derivable en $x = 4$? Justifica tu respuesta.

Solución: (a) $f'(2) \approx 3$ (b) No es derivable en el punto 4.

5
a) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \log(x^2+1)$ en el punto cuya abscisa es 2?
b) Encuentra los valores de a y b para que $f(x) = e^x$ y $g(x) = -x^2 + ax + b$ tengan tangente común en el punto de abscisa 0.

Solución: (a) $y = \log(5) + \frac{4}{5}(x-2)$ (b) $a = 1, b = 1$

6

Hallar la derivada n-ésima de:

(a) $f(x)=sen(x)$ en x=0 (b) $f(x)=\cos(x)$ en x=0

(c) $f(x)=e^x$ en x=0 (d) $f(x)=\log(1+x)$ en x=0

(e) $f(x)=\log\left(\dfrac{3+x}{4-x}\right)$ en x=0

Solución:

(a) $f^{(n}(x)=\begin{cases}(-1)^{n/2}\,sen(x) & si\ n\ par\\ (-1)^{(n-1)/2}\cos(x) & si\ n\ impar\end{cases}$ $f^{(n}(0)=\begin{cases}0 & si\ n\ par\\ (-1)^{(n-1)/2} & si\ n\ impar\end{cases}$

También:

$$f^{(n}(x)=sen\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad f^{(n}(0)=sen\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

(b) $f^{(n}(x)=\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ $f^{(n}(0)=\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

(c) $f^{(n}(x)=e^x$ $f^{(n}(0)=1$

(d) $f^{(n}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ $f^{(n}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!$

(e) $f^{(n}(x)=(-1)^{n+1}(n-1)!(3+x)^{-n}+(n-1)!(4-x)^{-n}$ $f^{(n}(0)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n}+\dfrac{(n-1)!}{4^n}$

7

Hallar de forma aproximada los siguientes valores, utilizando la aproximación lineal

(a) $\log(0.9)$ (b) $e^{0.4}$ (c) $\sqrt[3]{70}$ (d) $\sqrt[3]{8'02}$

Solución: (a) $\log(0.9)\approx -0.1$ (b) $e^{0.4}\approx 1.4$

(c) $\sqrt[3]{70}\approx 4.125$ (d) $\sqrt[3]{8'02}\approx 2+\dfrac{0.005}{3}\approx 2'0016667$

8

Calcular, mediante la diferencial, una aproximación de cos(155º) y dar una cota del error cometido.

Solución: $\left|\text{Error}\right| < \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2$

9

(a) Obtener el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $y = \log\left(1 - \frac{x}{2}\right)$ alrededor del punto a= 0.

(b) Obtener, mediante el polinomio anterior, un valor aproximado de log(0.5).

(c) Hallar una cota del error cometido en dicha aproximación.

Solución: $T_2 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{24}x^3$, $\log(0.5) \simeq -0.67$ $\left|error\right| < 0.25$

10

Se considera $f(x) = \log\left(\frac{x+2}{2x-2}\right)$. Se pide:

a) Representa el dominio de la función $f(x)$

b) Calcula el polinomio de Taylor de grado n de $f(x)$ en $a=4$ y determina la expresión del resto enésimo de $f(x)$ en $a=4$

c) Calcula una cota del error cuando queremos aproximar $\log\left(\frac{6'1}{6'2}\right)$ por el polinomio de grado 3

d) ¿Cuántos términos es necesario considerar del polinomio de Taylor de $f(x)$ en $a=4$ para aproximar $\log\left(\frac{6'1}{6'2}\right)$ con un error menor que 10^{-1}?

Solución:

(b) $T_n = \frac{-1}{6}(x-4) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1-2^n}{6^n}\right)(x-4)^n$

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{1}{(t+2)^{n+1}} - \frac{1}{(t-1)^{n+1}}\right)(x-4)^{n+1} \qquad 4 < t < 4.1$$

(c) $\left|R_3\right| < \frac{1}{4\cdot 10^4}\left[\frac{1}{6^4} + \frac{1}{3^4}\right]$ (d) Se necesitan n=1 términos

11

Determinar el orden de los infinitésimos siguientes cuando $x \to 0$

(a) $f(x)=\operatorname{sen}^2 2x+\cos x-1$ (b) $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^3}{\operatorname{sen} x+16x^5}}$

Solución: (a) De orden 2, $f(x)\approx\dfrac{7x^2}{2}$ (b) De orden 1, $f(x)\approx\sqrt{3}\,x$

12

Un estudio del medio ambiente de cierta comunidad suburbana indica que el nivel medio de monóxido de carbono en la atmósfera es de $C(p)=\sqrt{0,5\,p^2+17}$ partes por millón cuando la población es p miles de personas. Se estima que, dentro de t años, la población será de $p(t)=3,1+0,1t^2$ miles de personas. ¿Cuál será la tasa de variación de nivel de monóxido de carbono, $\dfrac{dC}{dt}$, con respecto al tiempo dentro de tres años?

Solución: $0,24$ *partes por millón / año*

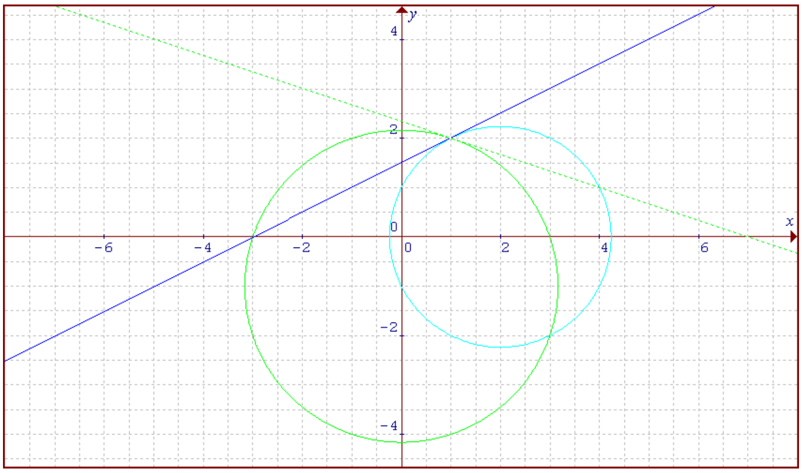
13

Un cohete es lanzado en dirección vertical y rastreado por una estación de observación situada en el suelo a 5km de la plataforma de lanzamiento. Supón que el ángulo de elevación de la visual hacia el cohete aumenta a razón de 3grados/seg cuando $\theta=60^o$. Calcula la velocidad del cohete en ese momento.

Solución: $1200\pi\ km/h$

14

Calcular los ángulos que forman al cortarse las curvas definidas por $x^2+y^2-4x=1$, $x^2+y^2+2y=9$.



Nota: El ángulo que forman dos curvas es el ángulo determinado por sus rectas tangentes. Se puede calcular así $tg\alpha = \left|\dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ donde

Solución: Dos puntos de corte: (1,2) y (3,-2). En el punto (1, 2): $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(-\dfrac{1}{3}\right)$

15

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente y de la normal a la curva de ecuación $x^3 + x^2 \operatorname{sen}(2y) + y^2(x+1) = 9$ en el punto $(0, 3)$.

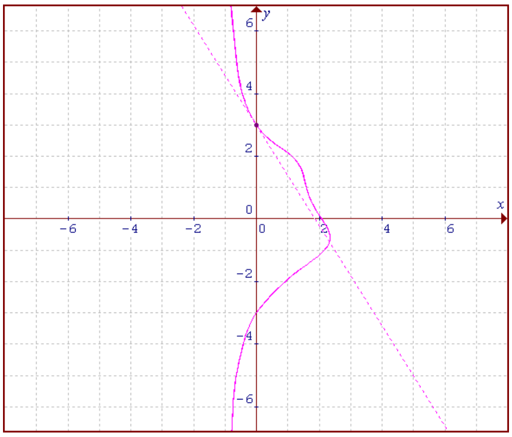
(b) Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva siguiente en el punto (-2, 3)

$$4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$$

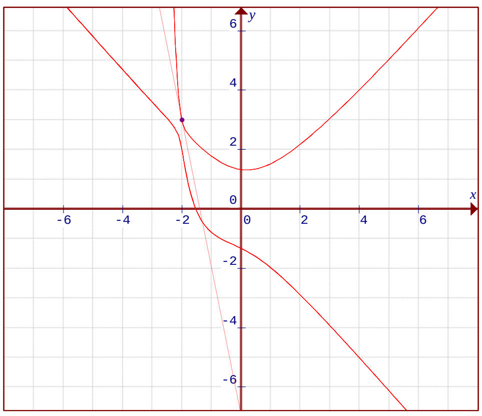
Solución: (a) Recta tangente $2y - 6 = -3x$. Recta normal $3y - 9 = 2x$

(b) Recta tangente : $y - 3 = -\dfrac{9}{2}(x+2)$. Recta normal: $y - 3 = \dfrac{2}{9}(x+2)$

a)



b)



16

Determinar los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuyas distancias al punto $(6,0)$ sean mínimas.

Solución: Punto $(2,4)$ y $(2,-4)$

17

Se quiere fabricar latas cilíndricas para bebidas refrescantes, de 200 cm^3 de capacidad, utilizando la mínima cantidad posible de material. Indica las dimensiones (radio de la base y altura) que garanticen la mínima superficie.

Solución:

El radio de la base y la altura de la lata que hacen mínima la superficie son

radio = $\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}$ cm ; altura = $2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{100}{\pi}}$ cm ; superficie mínima = $6\cdot\sqrt[3]{100^2\pi}$ cm^2.

18

a) Obtener los extremos relativos de la función $f(x) = x^4 \cdot e^{-x^2}$.

b) Hallar los extremos absolutos de la función $f(x) = x^{2/3}\cdot(5-2x)$ en el intervalo [-1, 2].

c) Calcular los máximos y mínimos de la función: $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

d) Demostrar que la función: $f(x) = e^x - x - \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!}$ tiene un mínimo en x=0.

Solución:

a) Como $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$; $f^{(4}(0) = 24 > 0$, la función tiene un mínimo relativo en x = 0, cuyo valor es f(0) = 0. Además tiene dos máximos relativos, que valen lo mismo, $f\left(-\sqrt{2}\right) = f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{4}{e^2}$.

b) Los puntos críticos de la función $f(x)$ en el intervalo [-1, 2] son:

x = 0 (*f* no es derivable en dicho punto); x = 1 (porque $f'(1) = 0$); x = -1 y x = 2 (extremos del intervalo)

Evaluando la función en los puntos críticos y comparando los valores obtenidos, se concluye

Máximo absoluto de $f(x)$ en [-1, 2] es $f(-1) = 7$

Mínimo absoluto de $f(x)$ en [-1, 2] es $f(0) = 0$.

c) $x=-1$ es un mínimo relativo.

d) Se cumple $f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ y $f^{iv}(0)=1>0$