Tema 4: Cálculo diferencial de funciones de varias variables.

Ejercicios propuestos

1 Calcular el dominio y rango de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=\dfrac{x.y}{x^2-y^2}$, b) $f(x,y)=\cos(x.y)$ c) $f(x,y)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$,

d) $f(x,y,z)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$ e) $f(x,y)=\log x+arc\ sen\dfrac{y}{x+y}$

Solución: a) $Domf=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\neq x \quad e \quad y\neq -x\}$, $\operatorname{Im} f=\mathbb{R}$;

b) $Domf=\mathbb{R}^2$, $\operatorname{Im} f=[-1,1]$; c) $Domf=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\leq 1\right\}$, $\operatorname{Im} f=[0,1]$;

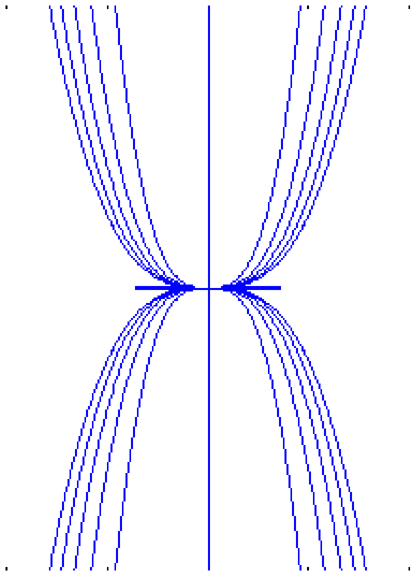
d) $Domf=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (x,y,z)\neq(0,0,0)\}$, $\operatorname{Im} f=[0,1]$;

2 Hallar las curvas de nivel de las superficie $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y}$

Solución: $Domf=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\neq 0\}$. Si $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y}$, obtenemos x^3 = C.y, teniendo los casos siguientes:

Si es C = 0, x^3= 0, es decir, es el eje OY, salvo el punto (0, 0).

Si es C≠0, las curvas de nivel son de la forma $y=\dfrac{1}{C}.x^3$ con y≠0.



Representación de las curvas de nivel de la superficie $f(x,y)=\dfrac{x^3}{y}$.

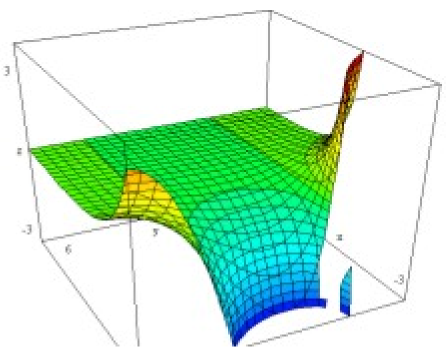
3

(a) Calcula $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} \frac{e^{-x}\cos y}{\sqrt{x+y+1}}$

(b) Comprobar la existencia o no del límite y, en el caso de que exista, hallar su valor:

b.1) $f(x,y)=\dfrac{arc\ tg\ (3xy-6)}{xy-2}$, en el punto (1, 2)

b.2) $f\left(x,y\right)=\dfrac{L\ (1+x^2+y^2)}{e^{-(x^2+y^2)}-1}$, en el punto (0,0)



Solución: a) El límite existe y vale $\dfrac{-1}{\sqrt{\pi+1}}$;

b.1) Límite = 3; b.2) Límite = -1.

4

El volumen de un tronco de cono viene dado por la fórmula $V=\frac{1}{3}\pi h\left(R^2+Rr+r^2\right)$ (h es la altura, r el radio de la base menor y R el radio de la base mayor). Estudiar la variación de dicho volumen (razón de cambio) cuando se produce un incremento arbitrario (no simultáneo) de cada una de las variables. Analizar cuál es la forma más ventajosa de aumentar el volumen de un tronco de cono de dimensiones R=10, r=4 y h=6.

Solución: La variable que produce un incremento más rápido del volumen, para los valores dados, es h por lo que la mejor opción será aumentar la altura del tronco del cono

5

Calcular la pendiente de la recta que es paralela al plano ZX y tangente a la superficie $z=x^2+3xy+y^2$ en el punto $P(1,1,5)$.

Solución: La pendiente de la recta es 5.

6

Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y)=x^3y+xy$ (b) $f(x,y)=x\sqrt{x+y}$ (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{y}$

(d) $f(x,y)=e^{x^2}+y$ (e) $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (f) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

Solución: a) $f_x=3x^2y+y$; $f_y=x^3+x$; b) $f_x=\sqrt{x+y}+\dfrac{x}{2\sqrt{x+y}}$; $f_y=\dfrac{x}{2\sqrt{x+y}}$;

c) $f_x=\dfrac{2x}{y}$; $f_y=-\dfrac{x^2}{y^2}$; d) $f_x=2x\cdot e^{x^2}$; $f_y=1$; e) $f_x=\dfrac{-x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; $f_y=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$;

f) $f_x=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$; $f_y=\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

7

(a) Se considera la función $f(x,y)=e^{xy}+\dfrac{x}{y}+sen\left(\left(2x+3y\right)\pi\right)$. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, . $f_x(0,1)$., $f_y(2,-1)$, $f_{xx}(0,1)$, $f_{xy}(2,-1)$.

(b) Calcula las derivadas parciales segundas f_{xx} y f_{xy} de las siguientes funciones:

b.1) $f(x,y)=e^{ax+by}$ b.2) $f(x,y)=(x+y)^n$ b.3) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Solución: a) $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{xy}+\frac{1}{y}+2\pi\cos\left(\left(2x+3y\right)\pi\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{xy}-\frac{x}{y^2}+3\pi\cos\left(\left(2x+3y\right)\pi\right)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y^2e^{xy}-\left(2\pi\right)^2 sen\left(\left(2x+3y\right)\pi\right)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}-\frac{1}{y^2}-6\pi^2 sen\left(\left(2x+3y\right)\pi\right)$

$f_x\left(0,1\right)=1+1+2\pi\cos\left(3\pi\right)=2-2\pi$

b.1) $f_{xx}=a^2\cdot e^{ax+by}$; $f_{xy}=f_{yx}=ab\cdot e^{ax+by}$

b.2) $f_{xx}=n\left(n-1\right)\cdot\left(x+y\right)^{n-2}$; $f_{xy}=f_{yx}=n\left(n-1\right)\cdot\left(x+y\right)^{n-2}$

b.3) $f_{xx}=\frac{2x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$; $f_{xy}=f_{yx}=\frac{3xy}{\left(x^2+y^2\right)^{5/2}}$

8

Calcular $df(3,4)$ siendo $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Solución:

9

(a) Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies siguientes:

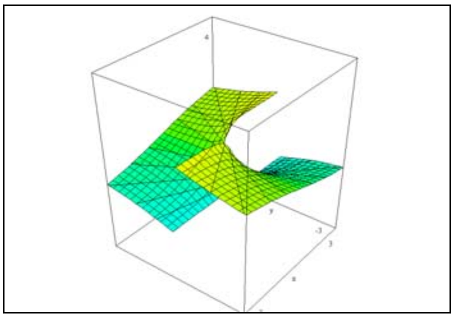
a.1) $z=arctg\left(y/x\right)$ en el punto de coordenadas $P\left(1,\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$

a.2) al paraboloide $z=\frac{x^2+4y^2}{10}$ en el punto (2,-2,2).

(b) Obtener la ecuación de los planos tangentes horizontales a la superficie

$z = 4(x-1)^2 + +3(y+1)^2$

Solución: a) $3\sqrt{3}x - 3y + 12z = 4\pi$



10 Dada la función $f(x,y) = e^x \cdot \cos y + e^y \cdot \cos x$, se pide estudiar en el punto (0,0):

a) La diferenciabilidad.

b) Hallar el valor de la derivada direccional máxima en el punto (0,0), indicando en qué dirección se alcanza mediante el vector unitario correspondiente.

c) Hallar el valor de la derivada direccional mínima en el punto (0,0), indicando en qué dirección se alcanza mediante el vector unitario correspondiente.

d) Obtener la derivada direccional de f en el punto (0,0), según la dirección dada por el vector $\vec{v} = \vec{i} - \sqrt{3} \cdot \vec{j}$.

e) La ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (0,0,f(0,0)), en el caso de que exista.

Solución: a) f(x,y) es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$;

b) $f_{u_{máxima}}(0,0) = \sqrt{2}$, $\vec{u} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{j}$; c) $f_{u_{mínima}}(0,0) = -\sqrt{2}$, $\vec{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{j}$;

d) $f_v(0,0) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$; e) z = 2 + x + y

11 La derivada direccional de una función polinómica dada por $z = f(x,y)$ en el punto $P_0(1,2)$ es $2\sqrt{2}$ en dirección de P_0 hacia $P_1(2,3)$ y -3 en dirección de P_0

hacia $P_2(1,0)$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $P_0(1,2)$, así como la derivada direccional de f en $P_0(1,2)$ en dirección hacia $P_3(4,6)$.

Solución: $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=3$; $f_u\ (1,2)=3$, $\vec{u}=\frac{3}{5}\cdot\vec{i}+\frac{4}{5}\cdot\vec{j}$.

12 La temperatura en el punto (x,y) de una chapa metálica viene dada por $T(x,y)=e^{2x+y}$. ¿En qué dirección a partir del punto $(0,0)$ crece más rápidamente la temperatura?

Solución: La dirección de máximo crecimiento de T a partir del punto (0,0) viene dada por el vector unitario $\vec{u}=\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\vec{j}$

13

(a) Calcular la expresión $E=y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}$ siendo $z=f(u,v)$, $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $v=arctg\left(\frac{y}{x}\right)$.

(b) Dada la función $z=e^{xy^2}$ con $x=t\cos(t)$, $y=tsen(t)$, calcular el valor de $\frac{dz}{dt}$ en el punto $t=\pi/2$.

(c) Sea $w=4x+y^2+z^3$ donde $x=e^{rs^2}$, $y=\log\left(\frac{r+s}{t}\right)$, $z=rst^2$. Calcular $\frac{\partial w}{\partial s}$.

Solución: a) $E=y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial z}{\partial v}$; b) $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi^3}{8}$;

c) $\frac{\partial w}{\partial s}=8rse^{rs^2}+\frac{2}{r+s}\log\left(\frac{r+s}{t}\right)+3r^3s^2t^6$

14 (a) Sean las tres cuádricas que están definidas por las ecuaciones siguientes:

$$z=f(x,y)=x^2+y^2\ ;\qquad z=g(x,y)=1-x^2-y^2\ ;\qquad z=h(x,y)=y^2-x^2$$

Discutir el tipo de punto crítico que tienen cada una de ellas en el punto (0,0) e identificar entre las ecuaciones anteriores la ecuación correspondiente a cada una de las gráficas (figuras adjuntas):

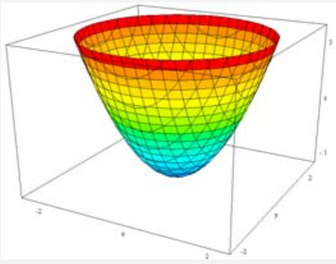


Figura 1. Ecuación:

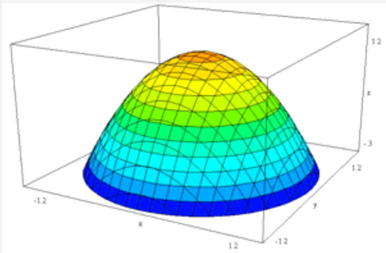


Figura 2. Ecuación:

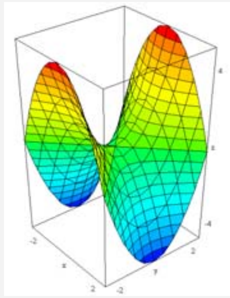


Figura 3. Ecuación:

(b) Dada la función $z = f(x,y) = x^2 y + y^3 - 2xy$, determinar los puntos críticos.

Solución:

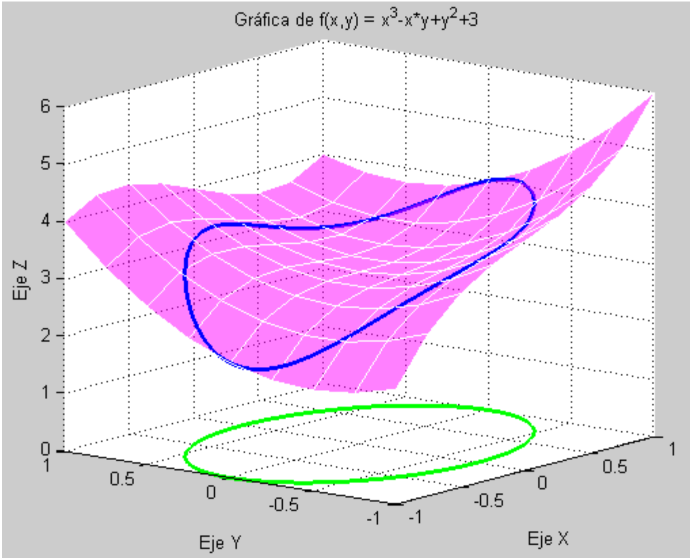
a) fig 1: $z = f(x,y) = x^2 + y^2$; fig 2: $z = g(x,y) = 1 - x^2 - y^2$; fig 3: $z = h(x,y) = y^2 - x^2$;

b) Los puntos críticos son: $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3\left(1,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $P_4\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

15

Calcular los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^3 - xy + y^2 + 3$ sometida a la condición de que los puntos (x,y) satisfagan la ecuación de la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$.

Solución:



16

(a) Calcular los extremos condicionados de f(x, y)=y-x^2 sujetos a la ecuación de condición $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$.

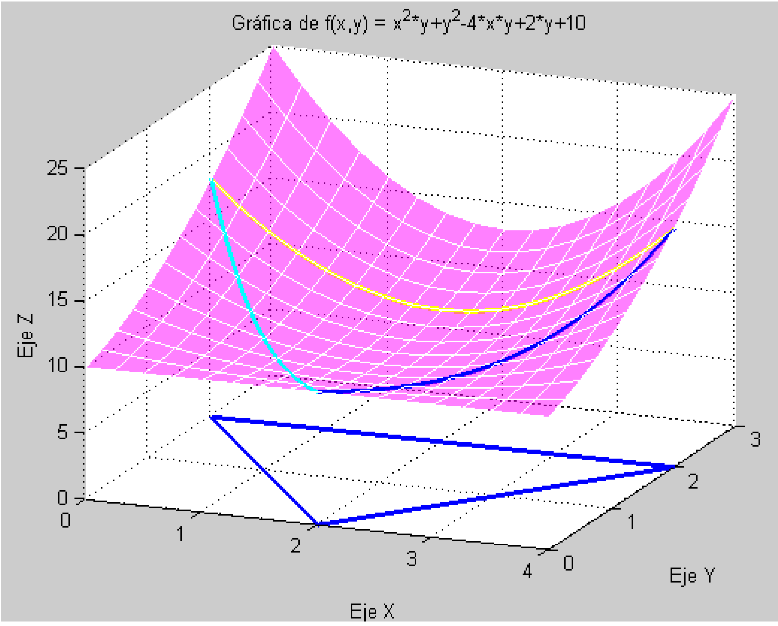
(b) Extremos relativos y absolutos de $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-2\cdot\left(x^2-y^2\right)$ sobre $A\equiv\left\{(x,y)\in\Re^2\ /\ x^2+y^2\leq 4\right\}$

Solución: (b) Solución: $P_1(0,0)$ es punto de silla; $P_2(-1,0)$ *y* $P_3(1,0)$ son puntos de mínimo relativo y absoluto, el valor es -1. El máximo absoluto está en $P_4(0,-2)$ *y* $P_5(0,2)$, el valor es 24.

17

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y)=x^2y+y^2-4xy+2y+5$ en el dominio D dado por el triángulo de vértices A(2,0), B(4,2) y C(0,2)

Solución: La función toma como valor mínimo absoluto 4 (en P(2,1)) y como valor máximo absoluto 13 (en B(4,2) y en C(0,2))


Gráfica de f(x,y) = x2*y+y2-4*x*y+2*y+10
Eje Z
Eje X
Eje Y
25
20
15
10
5
0
0
1
2
3
4
0
1
2
3