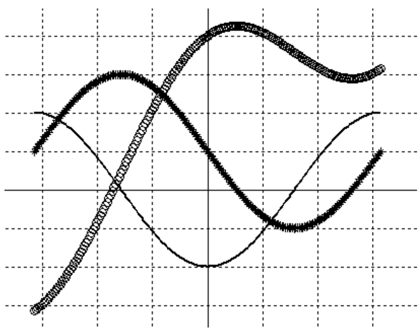
Tema 5: Integración de funciones de una variable.

Ejercicios propuestos

1 Calcular (a) $\int \left[d\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\right]$ (b) $d\left[\int \left(\frac{1}{x^2}+x\right).dx\right]$

Solución: a) $\int \left[d\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\right]=\frac{1}{x^2}+x+C$ b) $d\left[\int \left(\frac{1}{x^2}+x\right).dx\right]=\left(\frac{1}{x^2}+x\right)\cdot dx$

2 Las gráficas de la figura corresponden a las de una función derivable *f*, su función derivada f' y una primitiva *F* de *f*. Identifica cada gráfica con la función justificando la respuesta.



Solución: La gráfica de trazo más grueso corresponde a la función primitiva F, la de trazo intermedio es la de la función *f* y la de trazo más fino es la gráfica de la función derivada *f'*.

3

(a) Hallar la integral indefinida de la función $f(x)=\sqrt[3]{3x+1}$. Obtener la primitiva F(x) de la función anterior que verifica $F(0)=-7/4$.

(b) Hallar la integral indefinida de la función $f(x)=\frac{5}{\sqrt{1-x^2}}$. Obtener la primitiva F(x) de la función anterior que verifica $F(1)=\frac{5\pi}{2}+3$.

Solución: a) $F(x)=\frac{(3x+1)^{4/3}}{4}-2$; b) $F(x)=5\cdot arc\,sen(x)+3$

4

Calcular las siguientes integrales

(a) $\int 3^x \cdot 5^{2x} \cdot dx$ (b) $\int \cos^2 \frac{x}{2}\, d\,x$ (c) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+1} \cdot dx$

(d) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\, d\,x$ (e) $\int \frac{arc\ tg\ \frac{x}{2}}{4+x^2} \cdot dx$ (f) $\int \frac{5}{\sqrt{2x-3}} \cdot dx$

(g) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot dx$ (h) $\int \frac{x^3 \cdot dx}{x^8+1}$ (i) $\int \frac{dx}{16e^x+4e^{-x}}$

Solución:

a) $F(x) = \frac{75^x}{\log(75)} + C$; b) $F(x) = \frac{x}{2} + \frac{sen\,x}{2} + C$; c) $F(x) = \log\left|x^3 - x + 1\right| + C$;

d) $F(x) = \frac{1}{8} \cdot arc\,sen\left(x^8\right) + C$; e) $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \left[arc\,tg\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 + C$;

f) $F(x) = 5 \cdot \sqrt{2x-3} + C$; g) $F(x) = arc\,sen\left(e^x\right) + C$;

h) $F(x) = \frac{1}{4} \cdot arc\,tg\left(x^4\right) + C$; i) $F(x) = \frac{1}{8} \cdot arc\,tg\left(2e^x\right) + C$;

5

Calcular las siguientes integrales indefinidas, aplicando el método de integración por partes:

(a) $\int arc\,sen\,x \cdot dx$ (b) $\int x \cdot arc\ tg\left(\frac{1}{1+x}\right) \cdot dx$ (c) $\int x^3 \cdot e^x \cdot dx$

(d) $\int x \cdot sen\,x \cdot dx$ (e) $\int e^x \cdot \cos x \cdot dx$ (f) $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} \cdot dx$

(g) $\int x^5 \cdot \log x \cdot dx$ (h) $\int sen\,x \cdot e^{-x} \cdot dx$ (i) $\int \sqrt{x}.arc\ tg\ \sqrt{x}.dx$

(j) $\int x^2 arc\ tg\ (x)\, dx$ (k) $\int \log\left(x^2-2x+5\right).dx$ (l) $\int \log(1+x).dx.$

Solución:

a) $F(x) = x \cdot arc\,sen(x) + \sqrt{1-x^2} + C$;

b) $F(x) = \frac{x^2}{2} \cdot arc\,tg\left(\frac{1}{1+x}\right) + \frac{x}{2} - \log\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C$;

c) $F(x)=e^x\cdot\left(x^3-3x^2+6x-6\right)+C$;

d) $F(x)=-x\cdot\cos(x)+sen(x)+C$;

e) $F(x)=\dfrac{e^x}{2}\cdot(sen\,x+\cos x)+C$;

f) $F(x)=2\sqrt{x}\cdot(-2+\log x)+C$;

g) $F(x)=\dfrac{x^6}{6}\cdot\left(-\dfrac{1}{6}+\log(x)\right)+C$;

h) $F(x)=-\dfrac{e^{-x}}{2}\cdot(sen\,x+\cos x)+C$;

i) $F(x)=\dfrac{2}{3}\cdot x^{3/2}\cdot arctg\sqrt{x}-\dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\log(x+1)+C$;

j) $F(x)=\dfrac{x^3}{3}\cdot arctag(x)-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{1}{6}\cdot\log\left(x^2+1\right)+C$;

k) $F(x)=(x-1)\cdot\log\left(x^2-2x+5\right)-2x+4arctg\left(\dfrac{x-1}{2}\right)+C$;

l) $F(x)=(x+1)\cdot\log|1+x|-x+C$

6 Determinar el valor de las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int\frac{2x^2+2x-3}{x^3+2x}.dx$ (b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$ c) $\displaystyle\int\frac{(x^4+2x).dx}{x^3+2x^2-x-2}$

(d) $\displaystyle\int\frac{x+3}{x^3+x^2+2x+2}\cdot dx$ (e) $\displaystyle\int\frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\cdot dx$ (f) $\displaystyle\int\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\cdot dx$

(g) $\displaystyle\int\frac{2x^3+10x+4}{x^4+2x^3+4x^2+6x+3}\cdot dx$ (h) $\displaystyle\int\frac{x^4-3x^3+1}{(x-2)^5}\cdot dx$

Solución:

a) $F(x)=-\dfrac{3}{2}\cdot\log|x|+\dfrac{7}{4}\cdot\log\left(x^2+2\right)+\sqrt{2}\cdot arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$

b) $F(x)=arctg(x+2)+C$;

c) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{1}{2}\cdot\log|x-1|+\dfrac{1}{2}\cdot\log|x+1|+4\log|x+2|+C$;

d) $F(x)=\dfrac{2}{3}\cdot\log|x+1|-\dfrac{1}{3}\cdot\log\left(x^2+2\right)+\dfrac{5}{3\sqrt{2}}\cdot arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)+C$;

e) $F(x)=x+\log(x-4)^4+\log|x+2|+C$;

f) $F(x)=\dfrac{4}{1-x}+\log\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$;

g) $F(x) = -\log\sqrt{x^2+3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot arctg\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + 3\cdot\log|x+1| + \frac{2}{x+1} + C$;

h) $F(x) = \log|x-2| - \frac{5}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{4}{3(x-2)^3} + \frac{7}{4(x-2)^4} + C$

7

Determinar el valor de las siguientes integrales:

(a) $\int \frac{dx}{sen\ x}$ (b) $\int \frac{dx}{\cos x}$ (c) $\int \frac{dx}{3+\cos x}$ (d) $\int sen^3 x\cdot dx$

(e) $\int \frac{tg^4 x}{sen^2 x}\cdot dx$ (f) $\int \cos^3 x\cdot dx$ (g) $\int \frac{2sen\ x+3\cos x}{sen^2 x\cdot\cos x+9\cos^3 x}\cdot dx$

(h) $\int \frac{dx}{2\cos^2 x+3sen\ x.\cos x}$ (i) $\int sen 5x\cdot\cos 4x\cdot dx$

(j) $\int sen 2x\cdot sen 5x\cdot dx$ (k) $\int sen(5x)\cos(6x)\cdot d\,x$

Solución:

a) $F(x) = log\sqrt{\frac{-1+\cos x}{1+\cos x}} + C$; b) $F(x) = log\sqrt{\frac{1+sen\,x}{-1+sen\,x}} + C$;

c) $F(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot arctg\left[\frac{tg\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right] + C$; d) $F(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C$;

e) $F(x) = \frac{tg^3 x}{3} + C$; f) $F(x) = sen\,x - \frac{sen^3 x}{3} + C$;

g) $F(x) = log\left(tg^2 x+9\right) + arctg\left[\frac{tg\,x}{3}\right] + C$; h) $F(x) = \frac{1}{3}\cdot log|2+3\cdot tg\,x| + C$;

i) $F(x) = -\frac{\cos(9x)}{18} - \frac{\cos x}{2} + C$; j) $F(x) = \frac{sen(3x)}{6} - \frac{sen(7x)}{14} + C$;

k) $F(x) = -\frac{\cos(11x)}{22} + \frac{\cos x}{2} + C$

8

Determinar el valor de las siguientes integrales

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x.\sqrt{1-x}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+1}\cdot dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$ (e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2.\sqrt{4-x^2}}$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{9-4x^2}\cdot dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{(x+2).dx}{x.(1+\sqrt{x})}$ (h) $\displaystyle\int \frac{\left(\sqrt{x}-2\ \sqrt[3]{x}\right)^2}{x}\, d\,x$ (i) $\displaystyle\int \frac{(2\sqrt{x}+1).dx}{x\text{-}1}$

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{\text{-}x^2+6x\text{-}8}}$ (k) $\displaystyle\int \frac{d\,x}{\sqrt{-x^2+4x+9}}$ (l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$

Solución:

a) $F(x)=\log\left|\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+C$; b) $F(x)=2\cdot\sqrt{x}+4\cdot\sqrt[4]{x}+4\cdot\log\left|\sqrt[4]{x}-1\right|+C$;

c) $F(x)=\dfrac{6}{7}\cdot(x-2)^{7/6}-\dfrac{6}{5}\cdot(x-2)^{5/6}+2\cdot(x-2)^{1/2}-6\cdot(x-2)^{1/6}+6\cdot arctg\left((x-2)^{1/6}\right)+C$;

d) $F(x)=2\cdot\sqrt{x+1}-3\cdot\sqrt[3]{x+1}+6\cdot\sqrt[6]{x+1}-6\cdot\log\left(1+\sqrt[6]{x+1}\right)+C$;

e) $F(x)=-\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{4x}+C$; f) $F(x)=\dfrac{9}{4}\cdot\left\{arc\,sen\left(\dfrac{2x}{3}\right)+\dfrac{2x}{9}\cdot\sqrt{9-4x^2}\right\}+C$;

g) $F(x)=2\cdot\sqrt{x}+4\cdot\log\sqrt{x}-6\cdot\log\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; h) $F(x)=x-\dfrac{24}{5}\cdot x^{5/6}+6\cdot x^{2/3}+C$;

i) $F(x)=4\cdot\sqrt{x}+3\cdot\log\left|\sqrt{x}-1\right|-\log\left(\sqrt{x}+1\right)+C$; j) $F(x)=arc\,sen(x-3)+C$;

k) $F(x)=arc\,sen\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{13}}\right)+C$; l) $F(x)=arc\,sen(x+2)+C$;

9

Averiguar, sin realizar cálculos cual de las integrales es más grande:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \quad \text{o} \quad \int_0^1 e^{-x}\,dx$$

Solución: $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq \int_0^1 e^{-x}\,dx$

10 Hallar el valor medio de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Solución: valor medio = $2/\pi$.

11 ¿Tiene la función $si(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ algún tipo de simetría? ¿En qué puntos se obtienen los extremos relativos de $si(x)$?

Solución: la función $si(x)$ es impar. La función tiene mínimos relativos en los puntos x = nπ, con n par; mientras que tiene máximos relativos en los puntos x = nπ, con n impar.

12 Dada la función $F(x) = \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

(a) Calcular el valor de $F(x)$ en el origen.

(b) Obtener la ecuación de la tangente a la gráfica de $F(x)$ en el origen.

(c) ¿En qué puntos se obtienen los valores extremos de $F(x)$ en $\mathbb{R}$?

Solución: a) $F(0) = 0$; b) $y = -x$; c) la función $F(x)$ es decreciente $\forall x \in \mathbb{R}$.

13 La tangente a la curva $y = f(x)$ forma un ángulo $\pi/3$ con el eje OX en $x = a$, y de $\pi/4$ en $x = b$. Calcular de forma razonada el valor de la integral $I = \int_a^b f''(x)dx$

Solución: $I = \int_a^b f''(x)dx = 1 - \sqrt{3}$

14 Calcular las siguientes integrales aplicando la regla de Barrow:

(a) $\int_0^1 \left(2x^3-1\right)\sqrt{x^4-2x+1}\cdot dx$ (b) $\int_1^e \frac{\log^2 x}{x}\cdot dx$ (c) $\int_0^\pi \left(\pi-x\right) sen\, x\cdot dx$

Solución: a) -1/3 ; b) 1/3 ; c) π

15

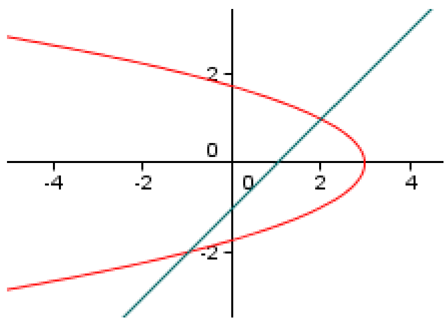
(a) Integrando respecto a la variable y, calcular el área de la región encerrada por las curvas: $y^2+x-3=0$, $x-y-1=0$.

(b) Calcular el área de la región plana S comprendida entre las rectas de ecuaciones: $y=x$, $x=2-2y$. $x=1$, $x=4$

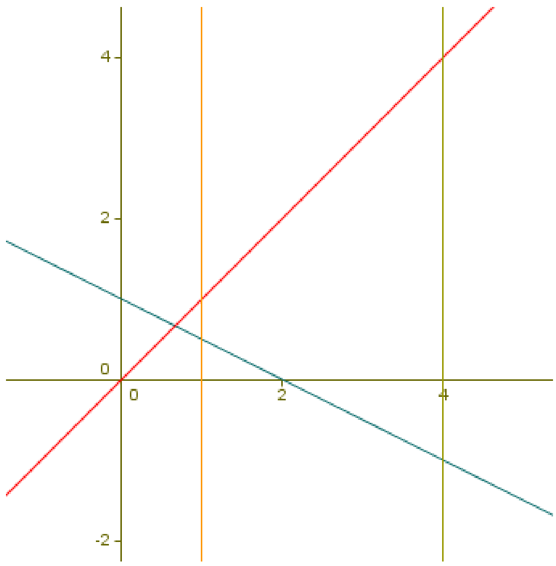
(c) Hallar el área determinada por la curva $y=\left(x-1\right)\left(x+2\right)$; las rectas $x=-3$, $x=2$ y el eje OX.

Solución: a) área = 9/2 u.d.s.; b) área = 33/4 u.d.s.; c) área = 49/6 u.d.s.

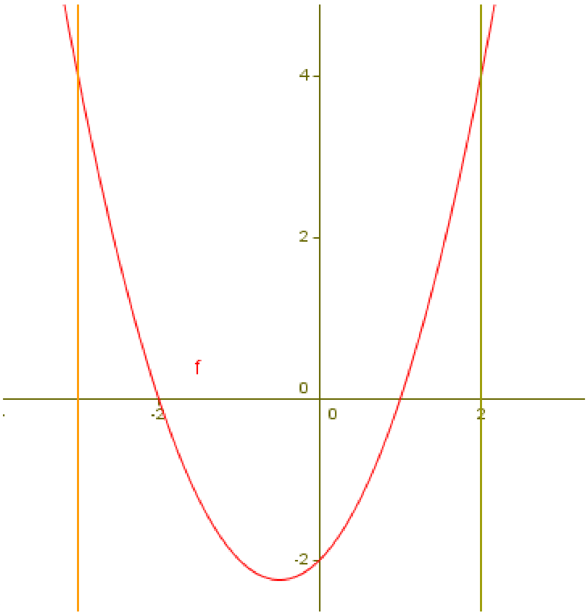
Gráficas



(a)



(b)



(c)

16

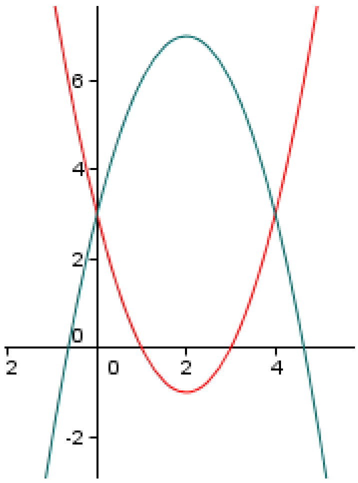
Dadas las funciones $y_1 = x^2 - 4x + 3$, $y_2 = 3 + 4x - x^2$; se pide:

(a) Determinar los puntos de corte de las gráficas de dichas funciones.

(b) Dibujar de forma aproximada el dominio encerrado por dichas curvas.

(c) Calcular el área encerrada por las dos curvas.

Solución: a) los puntos de corte se encuentran en $x = 0$ y $x = 4$; c) área = 64/3 u.d.s.



17

Dada la función $f(x) = a.\log x + b.x^2 + x$. Se pide:

(a) Determinar $a, b \in \mathbb{R}$ con la condición de que los puntos $x = 1$ y $x = 2$ sean críticos.

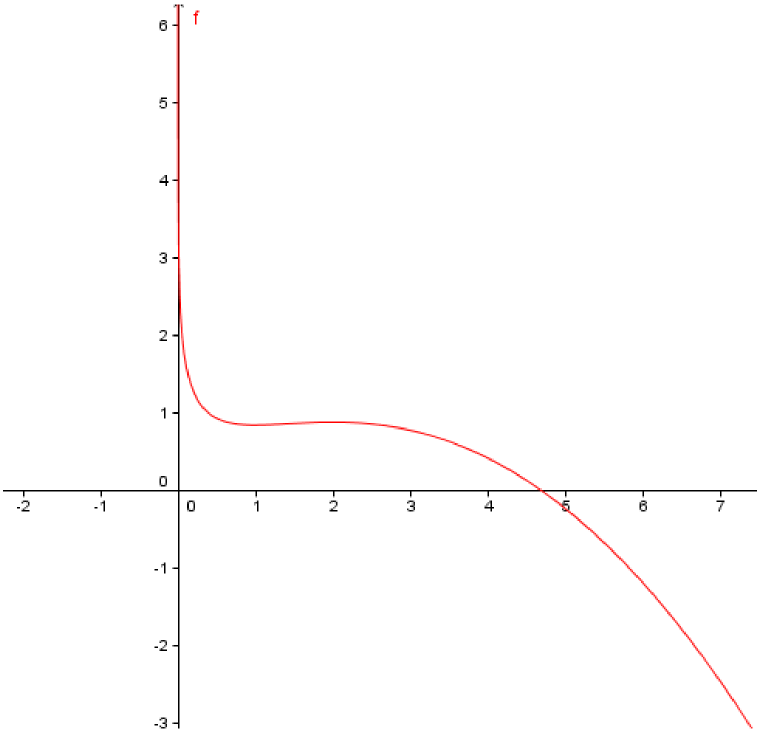
(b) Analizar, para los valores de a y b obtenidos, el tipo de puntos críticos que se producen en x=1 y x=2.

(c) Esbozar el dibujo de y=f(x) calculando los elementos que se consideren necesarios.

(d)Determinar el área limitada por y=f(x), el eje OX, las abscisas x=1 y x=2.

Nota: log 2 ≈ 0,69.

Solución: a) a = -2/3, b = -1/6 ; b) el punto $P_1\left(1,\frac{5}{6}\right)$ es mínimo relativo y el punto $P_2\left(2, 0'87\right)$ es máximo relativo. d) área = 0,85 u.d.s.



18 Calcular el área de la región plana D, encerrada por las curvas de ecuaciones:

$y=\frac{1}{2}x^2$, $x=-\frac{1}{2}y^2$

Solución: área = 4/3 u.d.s.