Tema 2: Funciones reales de una variable real

Ejercicios resueltos

1 Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + \dfrac{x}{|x|}$ b) $g(x) = \dfrac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}+1}$

Solución:

a) Utilizando la definición de valor absoluto, podemos expresar $f(x)$ como una función definida a trozos, así

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+1 & si \quad x>0 \\ x-1 & si \quad x<0 \end{cases}$$

En el dominio $\mathbb{R}-\{0\}$ la función $f(x)$ es continua porque está definida mediante polinomios. Tomando los límites laterales en el punto x = 0, analizamos la continuidad en dicho punto

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x-1) = -1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$$

Hay discontinuidad de salto finito en $x=0$, siendo el valor del salto

$$\text{salto } = \lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1-1 = -2$$

En conclusión, $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}$.

b) Debido a que las funciones *sen(x)* y e^x son continuas en todo $\mathbb{R}$, el problema de continuidad de $g(x)$ solo se plantea en el punto $x=0$, ya que la expresión $\dfrac{1}{x}$ no está definida en dicho punto, porque se produce división por cero.

Estudiamos los límites laterales de $g(x)$ en el punto $x=0$ para ver si existe o no el límite en dicho punto.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}+1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{sen\left(\frac{1}{0-\varepsilon}\right)}{e^{1/(0-\varepsilon)}+1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{-sen\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{e^{-1/\varepsilon}+1}$$

El numerador es una función que no se acerca a un valor fijo cuando $\varepsilon \to 0^+$, sino que oscila, tomando todos los valores posibles de la función seno, $-1 \le sen\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \le 1$, al variar el parámetro ε. El límite del denominador tiende hacia 1, porque $\lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{-1/\varepsilon} \to e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$.

En consecuencia, el límite de $g(x)$ por la izquierda de $x=0$ no existe, es oscilante.

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} -sen\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad \text{oscila en el intervalo [-1,1]}$$

Análogamente

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{sen\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{1/x}+1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{sen\left(\frac{1}{0+\varepsilon}\right)}{e^{1/(0+\varepsilon)}+1} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{sen\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{e^{1/\varepsilon}+1}$$

En este caso el denominador no está acotado, pues

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} e^{1/\varepsilon} \to e^{\infty} = \infty$$

En consecuencia, el límite de $g(x)$ por la derecha de $x=0$ existe y vale 0, ya que

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{sen\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{\infty} = \frac{valor\ oscila\ en\ [-1,1]}{\infty} = 0$$

Resumiendo, $g(x)$ tiene una discontinuidad inevitable en el punto $x=0$, porque no existe el límite de la función en dicho punto.

En conclusión, $g(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2

Un punto P se mueve sobre la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/seg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando x=9.

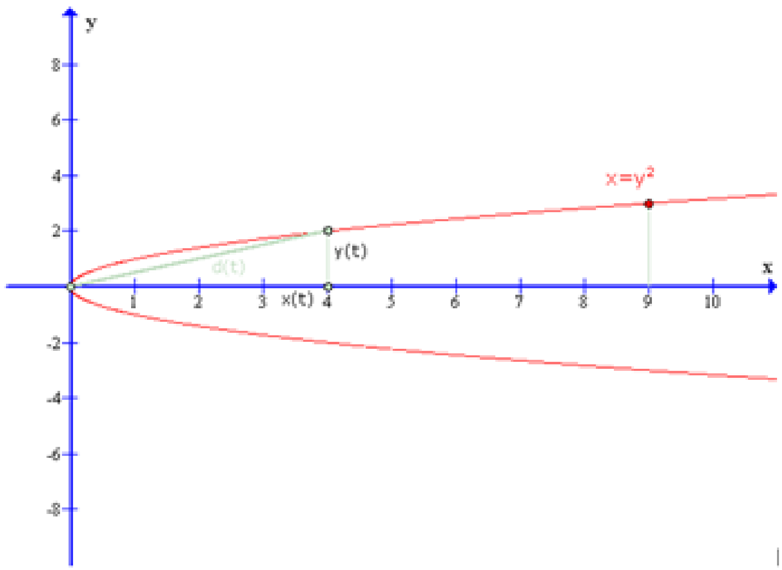
Solución:

Se trata de un problema de razón de cambio relacionadas. La función distancia de un punto situado en las coordenadas (x, y) al origen es:

$$d(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$$

Si el punto (x, y) está en la parábola $x=y^2$ será:

$$d(t)=\sqrt{x^2(t)+x(t)}$$



La velocidad a la que se aleja del origen aplicando la regla de la cadena es:

$$d'(t)=\frac{1}{2}\left(x^2(t)+x(t)\right)^{-1/2}\left(2x(t)\cdot x'(t)+x'(t)\right)$$

En el instante en que x=9 y teniendo en cuenta que $x'(t)=5cm/seg$ se concluye que la velocidad a la que el punto P se aleja del origen es:

$$\frac{1}{2}\left(9^2+9\right)^{-1/2}\left(2\cdot 9\cdot 5+5\right)=\frac{95}{2\sqrt{90}}=\frac{95}{6\sqrt{10}}$$

3

Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

(a) Calcula una estimación del error de la aproximación de $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ por su polinomio de Taylor de grado 2 en el punto $a=0$ cuando x pertenece al intervalo $0 \le x \le \frac{1}{2}$

(b) Calcula para esta función la diferencial en $a = 0$ e $\Delta x = 0.5$. Haz un bosquejo de esta función y representa el valor obtenido.

(c) ¿Puedes dar una cota del error que se comete al aproximar $\sqrt{\frac{2}{3}}$ por 1?

Solución:

(a) Consideramos la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ derivando

$$f(x) = (1+x)^{-1/2} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{-1}{2}(1+x)^{-3/2} \qquad f'(0) = \frac{-1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1\cdot 3}{2^2}(1+x)^{-5/2} \qquad f''(0) = \frac{3}{4}$$

El polinomio de Taylor de grado 2 es:

$$T_2\left(f(x), 0\right) = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$$

Utilizando el resto de Lagrange el error es

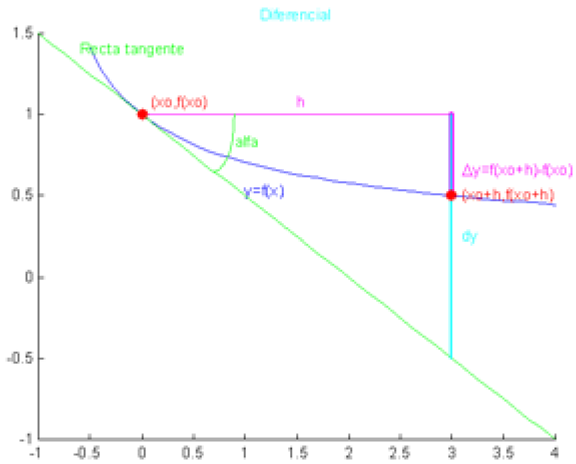
$$\left| f(x) - T_2\left(f(x); 0\right) \right| = \left| \frac{f'''(c)}{3!} x^3 \right| = \left| \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}(1+c)^{-7/2} x^3 \right| \qquad c \text{ } punto \text{ intermedio } a \text{ } 0 \text{ } y \text{ } a \text{ } x$$

Si $0 \le x \le \frac{1}{2}$ una estimación del error es

$$\left| \frac{5}{16}(1+c)^{-7/2} x^3 \right| \underset{\substack{0\le c\le x\le \frac{1}{2} \\ 1\le 1+c\le 1+x \\ (1+x)^{-7/2}\le (1+c)^{-7/2}\le 1}}{\le} \frac{5}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{2^7}$$

(b) La diferencial es:

$$dy = f'(0)\Delta x = \frac{-1}{2}\cdot 0,5 = -0,25$$



Para que se vea mejor la gráfica se ha considerado un incremento de valor 3.

(c) Se está pidiendo calcular una cota del error de sustituir $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ por $f(0)=1$. Es decir acotar Δy que sabemos que para incrementos pequeños se puede aproximar por la diferencial, luego, $\Delta y \approx 0.25$.

Otra forma es utilizar el resto de Lagrange

$$\Delta y = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = \frac{f'(c)}{1!}x \qquad con\ 0<c<\frac{1}{2}$$

es decir,

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \right| = \left| -\frac{1}{2}(1+c)^{-3/2}\, x \right| con\ 0<c<\frac{1}{2}$$

Por el mismo razonamiento que antes

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) \right| = \left| -\frac{1}{2}(1+c)^{-3/2}\, x \right| \le \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = 0,25$$

4

Calcular mediante el polinomio de Taylor con un error menor que una décima el valor de $\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$ Representar de forma aproximada la gráfica de la función y del polinomio de Taylor obtenido.

Solución:

Observamos que $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3}$. Una posibilidad para hacer el ejercicio es tomar como función $f(x) = e^x$. El punto donde desarrollaremos será a=0 y el punto donde aproximaremos la función por el polinomio de Taylor será $x = -\dfrac{2}{3}$

Como

$$f^{(n}(x) = e^x \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow f^{(n}(0) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es sencillo ver que la fórmula de Taylor es

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + R_n(f, x)$$

donde $R_n(f, x) = \dfrac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}$ siendo t un punto intermedio a 0 y a “x”

Haciendo $x = -\dfrac{2}{3}$ se tiene que el error al sustituir $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = e^{-2/3}$ por el polinomio de Taylor de grado n en el punto –2/3 es

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^t\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \text{ siendo } -\frac{2}{3} < t < 0$$

Como

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| = \left|\frac{e^t\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}\right| \underset{\substack{-\frac{2}{3}<t<0 \\ \Rightarrow e^t < e^0 = 1}}{\leq} \frac{1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}$$

Hay que encontrar el valor de n que hace

$$\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 10 \cdot 2^{n+1} < 3^{n+1}(n+1)! \qquad \text{(I)}$$

ya que así se tendrá:

$$\left|R_n\left(f, -\frac{2}{3}\right)\right| \leq \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{10}$$

Dando valores a n en la desigualdad (I)

$$n = 1 \Rightarrow 10 \cdot 2^2 < 3^2 \cdot 2! \quad NO$$

$$n = 2 \Rightarrow 10 \cdot 2^3 < 3^3 \cdot 3! \quad SI$$

Luego el polinomio buscado es el segundo

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e^2}} = e^{-2/3} \cong 1 + \frac{-2}{3} + \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{2!} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

5

Utilizando polinomios de Taylor calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{\cos x \,(\operatorname{sen} 2x)^2} = \frac{1}{8}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \frac{2}{3}$

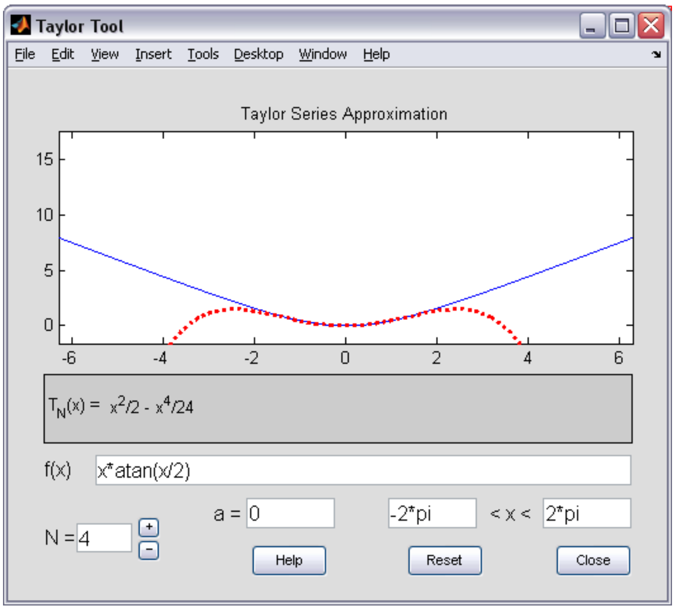
(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x - senx)^2}{(xsenx)^3} = \frac{1}{36}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax} - \cos(ax) - sen(ax)}{x^2} = a^2$ (a es un número real no nulo)

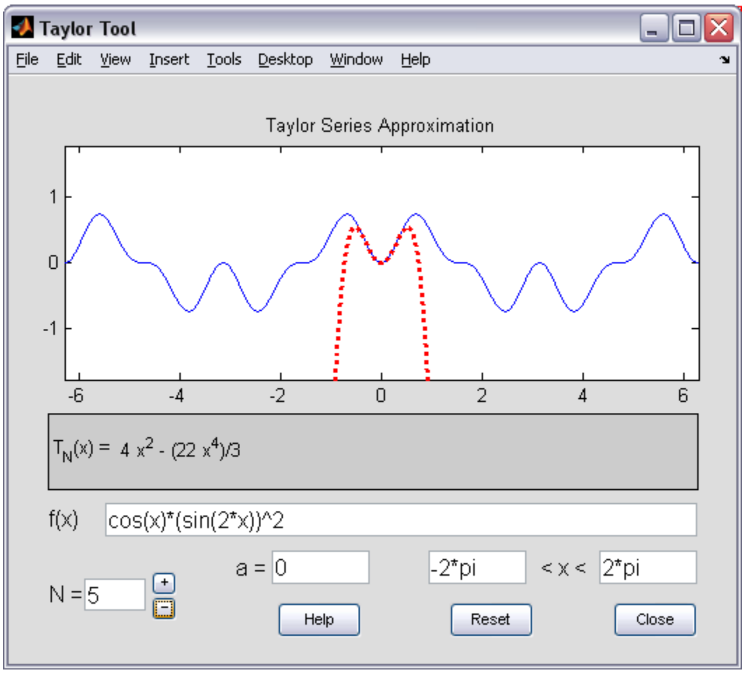
Solución:

(a) La parte principal de las funciones infinitesimales del numerador y del denominador son:

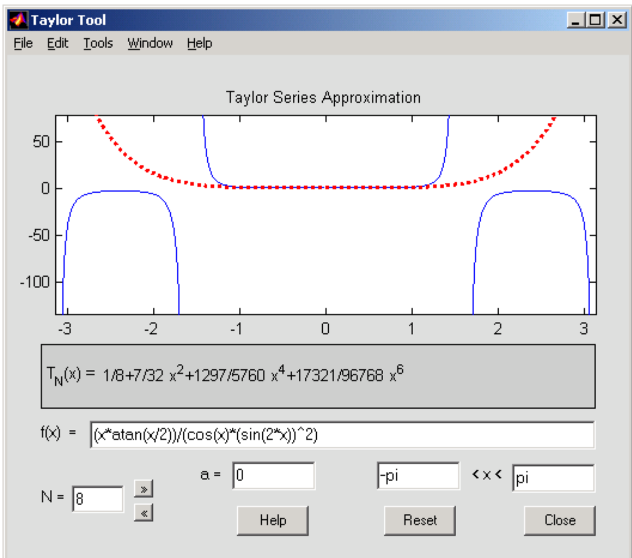
- Función: $f_1(x) = x\,arctg\left(\frac{x}{2}\right)$



- Función: $f_2(x) = \cos(x)\left[sen(2x)\right]^2$



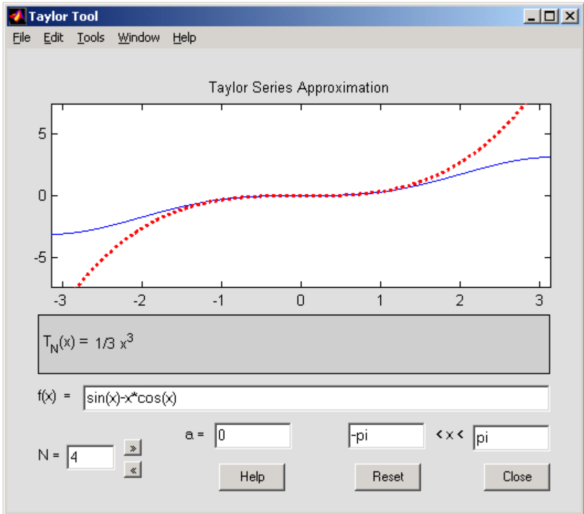
El polinomio de Taylor en x=0 de $f(x)=\dfrac{x\,\text{arctg}\,\dfrac{x}{2}}{\cos x\,(\text{sen}\,2x)^2}$ es:



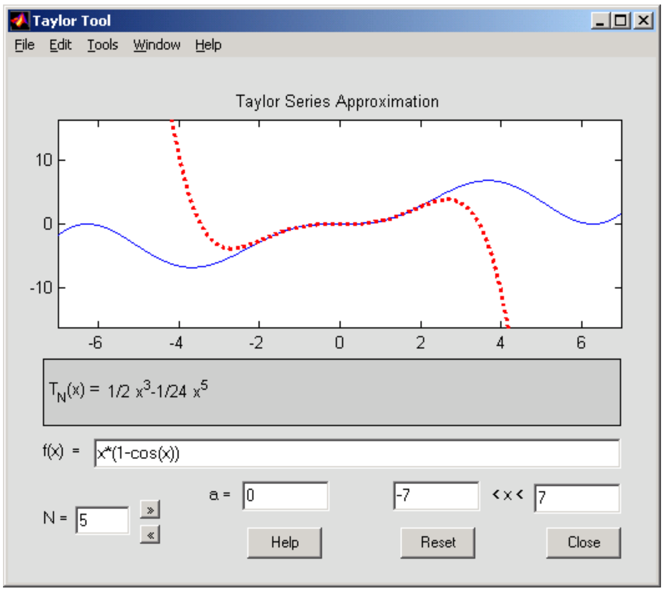
Se cumple entonces, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,arctg\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos x\left(sen2x\right)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{4x^2}=\dfrac{1}{8}$

(b) La parte principal de las funciones infinitesimales del numerador y del denominador son:

- Función: $f_1(x) = senx - x\cos x$



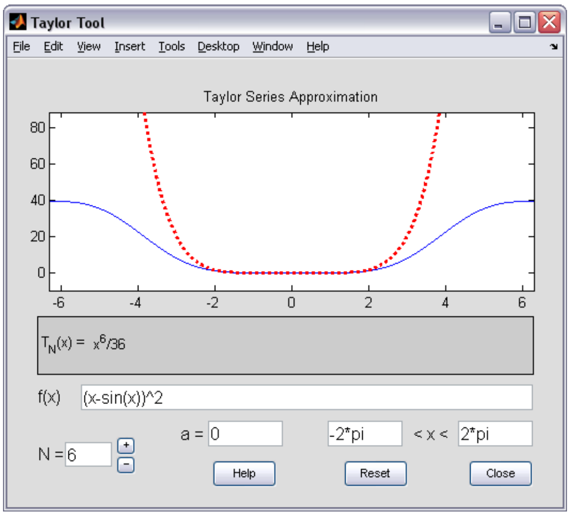
- Función: $f_2(x) = x(1-\cos x)$



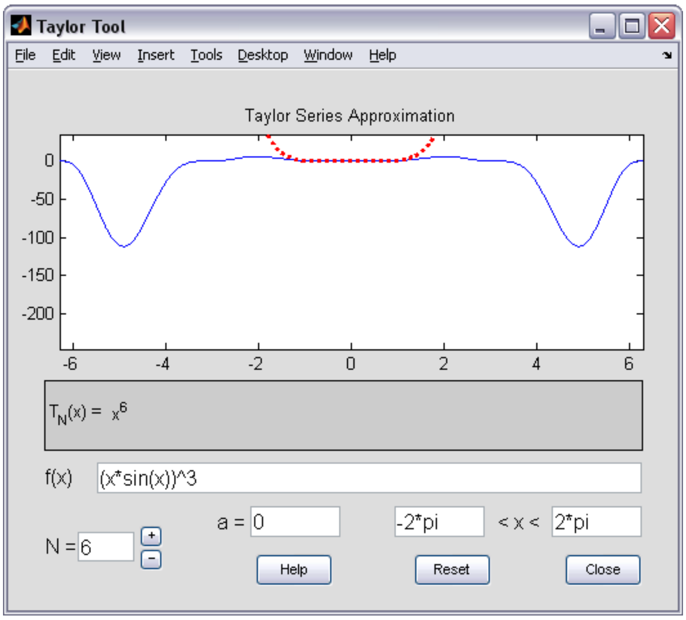
Luego, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{3}x^3}{\frac{1}{2}x^3} = \dfrac{2}{3}$

(c) La parte principal de las funciones infinitesimales del numerador y del denominador son:

- Función: $f_1(x) = (x - senx)^2$



- Función: $f_2(x) = (xsenx)^3$



Luego, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-senx)^2}{(xsenx)^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{36}x^6}{x^6} = \dfrac{1}{36}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-\cos(ax)-sen(ax)}{x^2}$ (a es un número real no nulo)

Llamamos

$$f_1(x)=e^{ax}-\cos(ax)-sen(ax)$$

Entonces

$$f_1'(x)=ae^{ax}+asen(ax)-a\cos(ax) \qquad \Rightarrow f_1'(0)=0$$

$$f_1''(x)=a^2e^{ax}+a^2\cos(ax)+a^2sen(ax) \Rightarrow f_1''(0)=2a^2$$

luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-\cos(ax)-sen(ax)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2}{x^2}=a^2$$

6

Dada la curva $x^2+y^2-2x+6y+6=0$, se pide representarla y calcular la recta tangente y normal a dicha curva en el punto P$\left(2,-3+\sqrt{3}\right)$.

Solución:

Completando cuadrados

$$x^2+y^2-2x+6y+6=\boxed{x^2-2x}+\boxed{y^2+6y}+6=\boxed{(x-1)^2-1}+\boxed{(y+3)^2-9}+6$$

Se tiene que

$$x^2+y^2-2x+6y+6=0\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=4$$

luego la curva es una circunferencia centrada en el punto (1, -3) y de radio 2. Para calcular la pendiente de la recta tangente calculamos la derivada en el punto P. Derivando implícitamente:

$$2x+2yy'-2+6y'=0\Leftrightarrow y'=-\frac{2x-2}{2y+6}$$

en el punto P

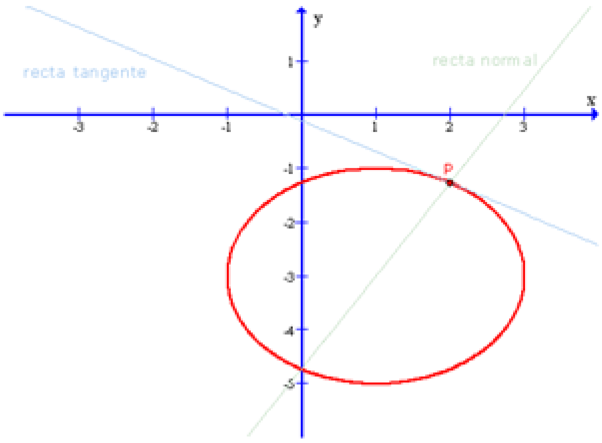
$$y'_P=-\frac{2\cdot 2-2}{2\left(-3+\sqrt{3}\right)+6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

la ecuación de la recta tangente es:

$$y=\left(-3+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$$

y la de la recta normal

$$y = \left(-3+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}\left(x-2\right)$$



7 Encuentra un infinitésimo equivalente a la función $f\left(x\right)=e^{x}-e^{\operatorname{sen}x}$ en x=0

Solución:

Utilizando polinomios de Taylor analizamos el orden de la primera derivada no nula en x=0. Se tiene que:

$$f'\left(x\right)=e^{x}-e^{senx}\cos x \quad\Rightarrow\quad f'\left(0\right)=0$$

$$f''\left(x\right)=e^{x}-e^{senx}\cos^{2}x+e^{senx}senx \qquad\Rightarrow\quad f''\left(0\right)=0$$

$$f'''\left(x\right)=e^{x}-e^{senx}\cos^{3}x+e^{senx}2\cos x senx+e^{senx}senx\cos x+e^{senx}\cos x$$

$$\Rightarrow\quad f'''\left(1\right)=1\neq 0$$

Aplicando la fórmula de Taylor:

$$f\left(x\right)=f\left(0\right)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+R_{3}=\frac{1}{6}x^{3}+R_{3}$$

donde el resto es un infinitésimo de orden superior a tres. Por lo tanto f(x) es un infinitésimo de orden 3.

8 En una empresa la fuerza laboral L se mide en horas-trabajador y es una función del tiempo, $L=f\left(t\right)$. Sea $M=g\left(t\right)$ la producción media por persona. Suponga que la producción Q está dada por el producto LM. En cierto momento la fuerza laboral L está creciendo a un ritmo de 4% anual y la producción media está creciendo a una razón de 5% al año. Encontrar la razón de cambio de la producción total cuando Q=10.

Solución:

Datos del problema:

$$Q = LM = f(t)g(t)$$

$$\frac{dL}{dt} = 0'04 \cdot L$$

$$\frac{dM}{dt} = 0'05 \cdot M$$

Se pide:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dL}{dt} \cdot M + L \cdot \frac{dM}{dt}$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{Q=10} = 0'04 \cdot L \cdot M + L \cdot 0'05M = 0'09 \cdot L \cdot M = 0'09 \cdot Q = 0,9$$

9

Un depósito de agua es cónico, con el vértice hacia arriba, y tiene 40 m. de alto y 20 m. de radio en la base. El depósito se llena a $80\, m^3/\min$. ¿A qué velocidad se eleva el nivel de agua cuando la profundidad del agua es de 12 m.?

Nota: El volumen de un cono de altura h y radio de la base r es: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

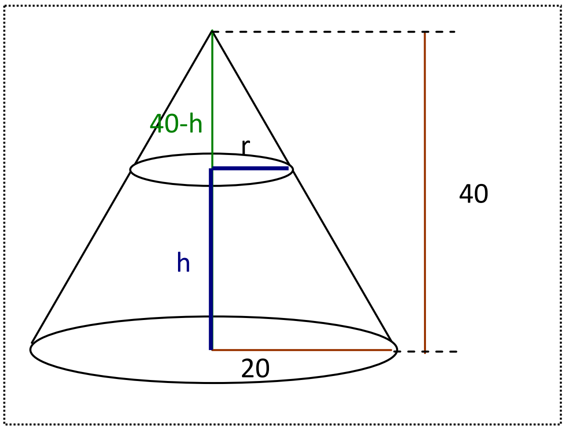
Solución:

En cualquier instante de tiempo el volumen V es

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot (40 - h)$$

donde r y h son funciones del tiempo. Además estás dos funciones están relacionadas de la manera siguiente:

$$\frac{40}{40-h} = \frac{20}{r} \qquad r = \frac{40-h}{2}$$



En consecuencia el volumen en un instante t es:

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \cdot 20^2 \cdot 40 - \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{\left[40 - h(t)\right]^3}{4}$$

Derivando respecto de t en ambos lados de la igualdad

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3}{3 \cdot 4}\pi \cdot \left[40 - h(t)\right]^2 \frac{dh}{dt}$$

En el instante en el que h=12 m el deposito se llena a $80\ m^3/\min$ luego,

$$80 = \frac{\pi}{4} \cdot \left[40 - 12\right]^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{20}{49\pi} \approx 0'13 m/\min$$