Ejercicios resueltos

1 Estudiar la monotonía de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{2n-1}{n} \qquad b_n = \frac{8n}{1+2n} \qquad c_n = \frac{3n}{n+1} \qquad d_n = \frac{1}{n^3}$$

Solución:

a) Vamos a probar que los términos de esta sucesión verifican $a_{n+1} - a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que se trata de una sucesión monótona estrictamente creciente.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot n - (n+1)(2n-1)}{(n+1)\cdot n} = \frac{\cancel{2}n^2 + \cancel{n} - \cancel{2}n^2 - \cancel{n} + 1}{(n+1)\cdot n} = \frac{1}{(n+1)\cdot n} > 0$$

el carácter positivo del anterior cociente está garantizado porque n es un número natural.

b) En este caso vamos a demostrar que $b_n \leq b_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, con lo cual la sucesión será monótona creciente.

$$b_n \leq b_{n+1} \Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \leq \frac{8\cdot(n+1)}{1+2\cdot(n+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8n}{1+2n} \leq \frac{8n+8}{1+2n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{8}n + 1\cancel{6}n^2 + 1\cancel{6}n \leq \cancel{8}n + 8 + 1\cancel{6}n^2 + 1\cancel{6}n \Leftrightarrow 0 \leq 8$$

lo cual es siempre cierto.

c) La sucesión dada es creciente, ya que $c_n \leq c_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, pues

$$c_n \leq c_{n+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3\cdot(n+1)}{(n+1)+1} \Leftrightarrow \frac{3n}{n+1} \leq \frac{3n+3}{n+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{3}n^2 + \cancel{6}n \leq \cancel{3}n^2 + \cancel{3}n + \cancel{3}n + 3 \Leftrightarrow 0 \leq 3$$

la expresión última a la cual hemos llegado es siempre cierta, luego la desigualdad inicial también lo es.

d) En este caso demostraremos que $d_n > d_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$, es decir que la sucesión es monótona estrictamente decreciente.

$$d_n > d_{n+1} \Leftrightarrow \frac{1}{n^3} > \frac{1}{(n+1)^3} \Leftrightarrow (n+1)^3 > n^3$$

esta desigualdad es cierta para cualquier número natural, luego se cumple siempre.

2 Monotonía y acotación de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Solución:

El término general de esta sucesión es una expresión indeterminada del tipo 1^∞, luego no es evidente que sea convergente. Se trata de una sucesión de números reales positivos.

- Comprobamos en primer lugar que la sucesión es creciente.

Por aplicación de la fórmula del binomio de Newton, tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{n\cdot(n-1)}{2!\cdot n^2} + \dots + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!\cdot n^n} = \\ &= 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

la expresión de a_n consta de n sumandos. El término siguiente se expresará así

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 2 &+ \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right) + \\ &+ \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Esta expresión consta de n+1 sumandos. Como los sumandos de a_{n+1} son mayores que sus correspondientes de a_n, salvo el primero que es igual, resulta que

$$a_n < a_{n+1} \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

luego la sucesión (a_n) es creciente.

- Vamos a comprobar ahora que la sucesión está acotada. Consideramos para ello las siguientes expresiones:

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots +$$
$$+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$b_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

$$c_n = 2 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{progresion\ \ geometrica}$$

Comparándolas término a término resulta que, a partir de n = 3, se verifica:

$$2 < a_n < b_n < c_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

es decir, $2 < a_n < 3$,

luego la sucesión a_n está acotada. Se puede asegurar, por tanto, que la sucesión de término general $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es convergente, estando su límite comprendido entre 2 y 3. A este límite se le designa con el nombre de número e. Se trata de un número irracional cuyas diez primeras cifras decimales son:

e ≈ 2’7182818284

3 Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}$$

Solución:

Construimos dos sucesiones para compararlas con la sucesión anterior, cuyos términos generales son

$$b_n = \frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = n\cdot\frac{n}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n}$$

y

$$c_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \ldots + \frac{n}{n^2+1} = n \cdot \frac{n}{n^2+1} = \frac{n^2}{n^2+1}$$

observamos que se verifica $b_n < a_n < c_n$ para todo n, además

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$$

y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1$$

como $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 1$, también será

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \frac{n}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n} = 1$$

4

Hallar el límite de las sucesiones

a) $a_n = \dfrac{8\,n^6 \cdot \log\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \cdot sen^3 \dfrac{1}{n}}{(2n^2+5n)\cdot \cos \dfrac{2\pi n - 2}{6n+3}}$ b) $a_n = \log\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right) \cdot \cos\,(n^2+5)$

Solución:

(a) Aplicando equivalencias, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{8\,n^6 \cdot \log\left(1+\frac{1}{2n}\right) \cdot sen^3 \frac{1}{n}}{(2n^2+5n)\cdot \cos \frac{2\pi n - 2}{6n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\,n^6 \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3}{(2n^2+5n)\cdot \cos \frac{2\pi n}{6n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8\,n^6}{2\,n^4}}{(2n^2)\cdot \cos \frac{\pi}{3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8\,n^6}{(4n^6)\cdot \frac{1}{2}} = 4$$

(b) Tomando el límite

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left[\underbrace{\log\left(\frac{n+3}{n+2}\right)}_{\text{inf } initesimo} \cdot \underbrace{\cos\,(n^2+5)}_{\substack{funcion\ \ a\cot ada \\ dentro\ \ de\ [-1,1]}} \right] = 0$$

5

Calcular la suma de las siguientes series:

a) $4+\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}...+\frac{1}{2^n}+...$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}$

Solución:

(a) Observamos que $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}...+\frac{1}{2^n}+...$ es una serie geométrica de primer término ¼ y razón ½ por lo que

$$4+\pi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}...+\frac{1}{2^n}+...=4+\pi-\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=4+\pi$$

(b) Descomponiendo en fracciones simples

$$\frac{3n+2}{n^3+3n^2+2n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$$

$$S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+...+\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right)-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n+2}\right)=2-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}$$

$$S=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)=2$$

6

a) Determinar el carácter de las siguientes series:

a.1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3e^n}$ a.2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}}$

b) Calcular el valor exacto de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+3}}{9^{n+1}}$

Solución:

a.1) Teniendo en cuenta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3e^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

la serie es geométrica de razón $r=\frac{1}{e}<1$, luego es convergente.

a.2) Para la segunda serie se tiene en cuenta la expresión de Ch(n) en función de la exponencial:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Ch(n)}{Ch(2n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dfrac{e^{n}+e^{-n}}{2}}{\dfrac{e^{2n}+e^{-2n}}{2}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\dfrac{e^{2n}+1}{e^{n}}}{\dfrac{e^{4n}+1}{e^{2n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{n}\left(e^{2n}+1\right)}{e^{4n}+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{3n}+e^{n}}{e^{4n}+1}$$

Comparamos esta serie con $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{n}}$ y como el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{3n}+e^{n}}{e^{4n}+1}:\frac{1}{e^{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{4n}+e^{2n}}{e^{4n}+1}=1$$

es distinto de cero y de infinito ambas series tienen el mismo carácter, es decir, convergentes.

(b) Como la serie es geométrica el valor de la suma es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+3}}{9^{n+1}}=\frac{8}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^{n}=\frac{8}{9}\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{32}{45}$$

7

Determinar el carácter de las siguientes series y estudiar también su convergencia absoluta:

a) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}\log(n)}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$

Solución:

a) La serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{2}\log(n)}$ es una serie alternada convergente por el criterio de Leibnitz:

- $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{2}\log(n)}=0$
- $\{a_n\}$ es monótona decreciente:

$$\frac{1}{(n+1)^2\log(n+1)}<\frac{1}{n^2\log(n)} \underset{\substack{el\ \log aritmo\\ es\ una\ función\\ creciente}}{\Leftrightarrow} n^2\log(n)<(n+1)^2\log(n+1)$$

Estudiamos ahora la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2\log(n)}$. Como $\log(2)n^2\le n^2\log(n)$ se tiene que

$$\frac{1}{n^2\log(n)}\le\frac{1}{\log(2)\cdot n^2}$$

y, por el criterio de comparación es convergente. Luego la serie es absolutamente convergente.

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$ es una serie alternada convergente por el criterio de Leibnitz:

- $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}=0$
- $\{a_n\}$ es monótona decreciente:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\Leftrightarrow\sqrt[3]{n+1}<\sqrt[3]{n+2}$$

Estudiamos ahora la convergencia absoluta, es decir, la convergencia de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$. Como

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\approx\frac{1}{n^{1/3}}$$

por el criterio de comparación es divergente. Luego la serie no converge absolutamente.

8

a) Aproximar la suma de la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ cuando se considera la suma parcial enésima y S_{40} estimar el error en la aproximación.

b) ¿Cuántos términos es necesario sumar para garantizar que la suma parcial enésima de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ aproxima al valor real de S con un error menor que 10^{-10} .

Solución:
(a) $S\approx 0.9470326439$ y el error es menor que $\pm 3.54\cdot 10^{-7}$

(b) $n \geq \sqrt[4]{10^{10}} - 1 \approx 315.2$, es decir, $n \geq 316$

9

Determinar el desarrollo en serie de potencias de las siguientes funciones en los puntos que se indica señalando su campo de convergencia:

a)	$f(x) = \dfrac{5x-1}{x^2-x-2}$	$a=0$	b)	$f(x) = arctg(x)$	$a=0$
c)	$f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$	$a=0$	d)	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$a=1$
e)	$f(x) = \dfrac{2+x}{1+2x+x^2}$	$a=0$	f)	$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$	$a=0$
g)	$f(x) = \log(1+x)$	$a=0$	h)	$f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$	$a=0$

Solución:

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[2(-1)^n - \dfrac{3}{2^{n+1}}\right]x^n \qquad |x|<1$

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|\leq 1$

c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad |x|<1$

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (x-1)^n \qquad |x-1|<1$

e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+2)x^n \qquad |x|<1$

f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad |x|<1$

g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} \qquad |x|<1$

h) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n \qquad |x|<1$

10

Se considera la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ $x \in \mathbb{R}$. Se pide:

a) Estudiar para qué valores de x es convergente dicha serie
b) Calcular su suma para x=1.

Solución:

a) Como x es un número real estudiamos en primer lugar la convergencia absoluta, es decir la convergencia de la serie de los valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n(n+2)} \qquad x \in \mathbb{R}$$

Aplicando a esta última serie el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)(n+3)}}{\dfrac{|x|^n}{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x| n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = |x|$$

- Si $|x|<1$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ converge absolutamente y por lo tanto es convergente
- Si $|x|>1$ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ diverge absolutamente. Además, el término general no tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n(n+2)} = \begin{cases} \infty \text{ si } x>1 \\ \text{No existe si } x<-1 \end{cases}$$

  por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$ no es convergente si $|x|>1$.
- Si x=1 , La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ es convergente por el criterio de comparación por paso al límite sin más que compararla con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
- Si x=-1 , La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+2)}$ es convergente por el criterio de Leibniz (la sucesión $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$ es monótona decreciente y tiende a cero).

Calculamos la suma para x=1, es decir, el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$. Descomponiendo el término general de la serie en fracciones simples:

$$a_n=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}\ \ con\ A=\frac{1}{2},\ B=\frac{-1}{2}$$

La suma parcial enésima es:

$$S_n=a_1+a_2+...+a_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Calculando su límite

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

y entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{3}{4}$$