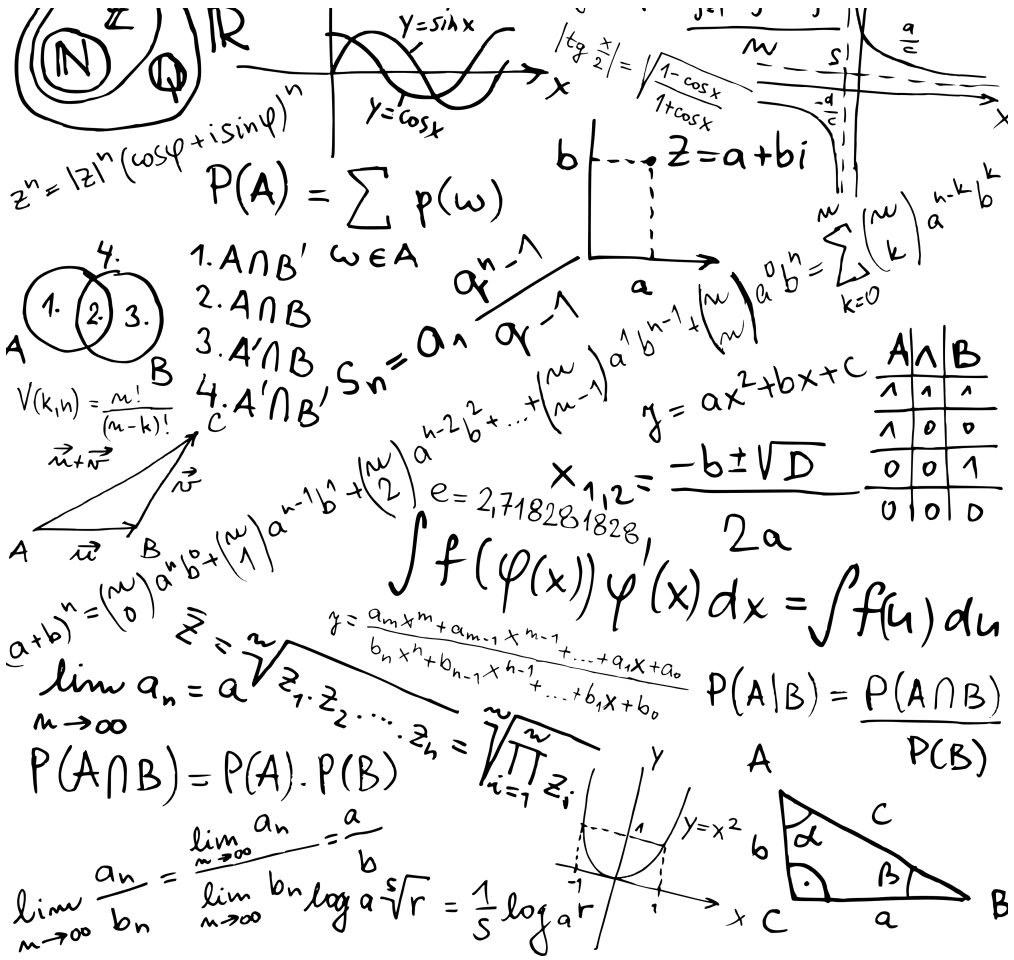
DEPTO. MATEMÁTICA APLICADA Y CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN
E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN
UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CÁLCULO I
Apuntes y problemas



2020

Índice

1 Conjuntos de números **1**
1.1 Números reales . . . 1
1.2 Números complejos . . . 4
1.3 Ejercicios propuestos . . . 8

2 Funciones reales de una variable real **10**
2.1 Clasificación de las funciones . . . 10
2.2 Límites . . . 13
2.3 Continuidad . . . 15
2.4 Derivadas y aplicaciones . . . 16
2.5 Aplicación de la derivada . . . 19
2.6 Ejercicios propuestos . . . 25

3 Series **30**
3.1 Sucesiones . . . 30
3.2 Series y convergencia . . . 32
3.3 Series alternadas . . . 35
3.4 Series de potencias . . . 36
3.5 Ejercicios propuestos . . . 39

4 Integración **44**
4.1 Integración indefinida . . . 44
4.2 Métodos de integración . . . 44
4.2.1 Integración por sustitución . . . 46
4.2.2 Integración por partes . . . 47
4.2.3 Integración de funciones racionales . . . 48
4.2.4 Integrales trigonométricas . . . 49
4.3 Integral definida . . . 51
4.4 Aplicaciones de integración . . . 54
4.4.1 Volumen de revolución . . . 55
4.5 Ejercicios propuestos . . . 58

5 Funciones de dos o más variables **61**
5.1 Límites y continuidad . . . 62
5.2 Derivación parcial . . . 65
5.3 Derivadas de funciones compuestas e implicitas . . . 68
5.4 Derivadas direccionales y gradiente . . . 70

5.5 Aplicaciones de las derivadas parciales 72
5.6 Ejercicios propuestos 76

6 Soluciones **81**

1 Conjuntos de números

1.1 Números reales

Conjuntos de números:

- **Números Naturales** son los números de contar empezando por 1:

  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$

- **Números Enteros** son los números de contar, sus negativos y cero:

  $\mathbb{Z} = \{\ldots, -(n+1), -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$

- **Números Racionales** son cociente de dos números enteros, siendo el denominador distinto de cero:

  $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}$

- **Números Irracionales** $\mathbb{I}$ son los números que NO pueden ser expresado como una fracción $\frac{a}{b},\ a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.

- **Números Reales** son los números racionales y los irracionales: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

  – Entre dos números reales distintos existen infinitos números racionales e infinitos irracionales.

  – El conjunto de los números reales no está acotado ni superior ni inferiormente.

- **Números Complejos** $\mathbb{C} = \left\{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\right\}$

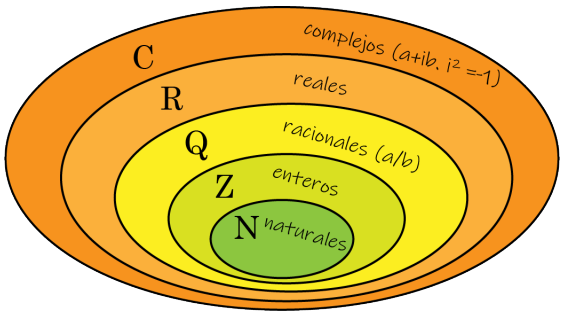


Figure 1.1: Conjuntos de números

Ejemplo

Determinar los números racionales:

$$0.25,\ -3678,\ 3\pi/2,\ 3\sqrt{2}-1,\ 22/7,\ \sqrt[3]{64},\ \sqrt[3]{60},\ 2e.$$

Números racionales son: $0.25,\ -3678,\ 22/7,\ \sqrt[3]{64}$.

Intervalos en $\mathbb{R}$

- **Intervalo cerrado:** $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$
- **Intervalo abierto:** $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$
- **Intervalo semiabierto:** $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$ $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$
- **Intervalos con infinito:**(no acotados) $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x\ge a\}$ $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$ $(-\infty,+\infty)=\{x: x\in\mathbb{R}\}$

Inecuaciones

1. Si $a>b$ y $c>0$, entonces $ac>bc$
2. Si $a>b$ y $c<0$, entonces $ac<bc$
3. Si $a>b$ y $c>d$, entonces $a+c>b+d$
4. Si $a>b>0$, entonces $\{a>b\}\Leftrightarrow\left\{\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\right\}$
5. $a^2+b^2\ge 2ab\quad \forall a,b\in\mathbb{R}$
6. Si $a\ge 0,\ b\ge 0$, entonces $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$

Definición: Valor absoluto

Se define el valor absoluto de un número real x, y se representa $|x|$, al número real no negativo dado por:

$$|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Propiedades:

- $|x|\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Además, $|x|=0\Leftrightarrow x=0$.
- $|x+y|\le|x|+|y|\ \forall x,y\in\mathbb{R}$
- $|xy|=|x|\cdot|y|\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

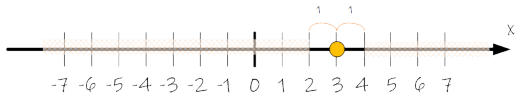
- $||x| - |y|| \leq |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x| - |y| \leq |x + y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $|x| < y, y > 0 \Leftrightarrow -y < x < y$

Ejemplo

Describir explícitamente los siguientes conjuntos:

a) $|x - 3| \geq 1$

La inecuación significa que la distancia entre x y 3 es mayor que 1:



$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3, \\ 3 - x, & x < 3; \end{cases}$$

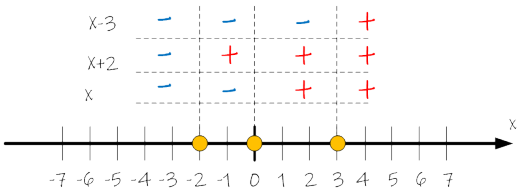
Si $x \geq 3$, entonces $x - 3 \geq 1$, así, $x \geq 4$; si $x < 3$, $3 - x \geq 1$, es decir, $x \leq 2$.

El conjunto solución es $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$.

b) $|x| - 1 + |x + 2| \geq |x - 3| + x$.

Paso 1: definir las raíces de valores absolutos: $x = 0$, $x = -2$, $x = 3$;

Paso 2: definir el signo de las expresiones de valor absoluto en cada intervalo:



Paso 3: resolver las inecuaciones en cada intervalo y después unir los conjuntos soluciones:

- Si $x < -2$: $-x - 1 - (x + 2) \geq -(x - 3) + x$, con la solución $x \leq -3$;
- Si $x \in [-2, 0)$ la inecuación es $-x - 1 + x + 2 \geq -(x - 3) + x$ y no tiene solución;
- Si $x \in [0, 3)$, entonces $x - 1 + x + 2 \geq -(x - 3) + x$, de donde $x \geq 1$. El conjunto solución es $[1, 3)$;
- Si $x \geq 3$, la inecuación se escribe sin barras: $x - 1 + x + 2 \geq x - 3 + x$, que se cumple para todos x del intervalo $[3, \infty)$.

Luego el conjunto solución es $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$.

1.2 Números complejos

Definición: Número complejo

Se define cada **número complejo** z como un par ordenado de números reales: $z = (a, b)$. El primer elemento a se define como **parte real** de z: $a = \mathrm{Re}(z)$; el segundo elemento b se define como **parte imaginaria** de z: $b = \mathrm{Im}(z)$.

Dos números complejos son iguales si y sólo si lo son simultáneamente sus partes reales y sus partes imaginarias.

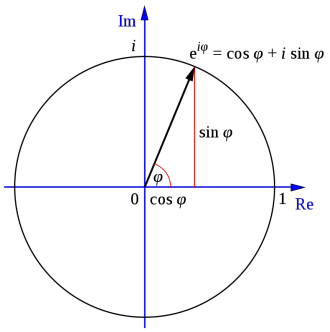


Figure 1.2: Número complejo

Para un número complejo (a, b):

- El conjugado es $\bar{z} = a - bi$
- El módulo es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- El argumento de z es φ siendo $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$, por lo tanto $\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{b}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = |z|\cos\varphi \\ b = |z|\mathrm{sen}\varphi \end{cases}$

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay un único argumento que se encuentra en el intervalo $(-\pi, \pi]$. A dicho argumento se le llama **argumento principal de** z y se representa por $arg(z)$:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(b/a), & \text{si } a > 0; \\ \arctan(b/a) + \pi, & \text{si } a < 0,\ b > 0; \\ \arctan(b/a) - \pi, & \text{si } a < 0,\ b < 0; \\ \pi/2, & \text{si } a = 0,\ b > 0; \\ -\pi/2, & \text{si } a = 0,\ b < 0. \end{cases}$$

Ejemplo

Definir los módulos, argumentos y conjugados de los siguientes números complejos:

a) $z = 2 + 2i$

$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$,

$arg(z) = \arctan(1) = \pi/4$,

$\bar{z} = 2 - 2i$;

b) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$

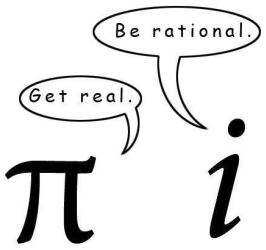
$|z| = \sqrt{4 + 12} = 4$,

$arg(z) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) + \pi = 2\pi/3$,

$\bar{z} = -2 - 2\sqrt{3}i$.

Propiedades del módulo:

- $|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$,
- $|z - w| \geq |z| - |w|$,
- $|z - w| \geq |w| - |z|$,
- $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$.



Formas de representación:

1. **Algebraica**: $z = a + bi$,
   i es **unidad imaginaria**, $i^2 = -1$.
2. **Binómica**: $z = (a, b)$
3. **Trigonométrica**: $z = |z|(\cos\varphi + i\text{sen}\varphi)$
4. **Polar**: $z = |z|_\varphi$
5. **Exponencial**: $z = |z|e^{i\varphi}$

Ejemplo

Escribir los siguientes números complejos en sus distintas formas de representación:

a) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}) = 2_{\pi/3} = 2e^{i\pi/3}$;

b) $z = \sqrt{2}e^{\pi i/4} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\text{sen}\frac{\pi}{4}) = 1 + i$;

c) $z = 3_{\pi/2} = 3(\cos\frac{\pi}{2} + i\text{sen}\frac{\pi}{2}) = 3i$.

Definición: Fórmula de Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\text{sen}\varphi$$

Operaciones con números complejos

- **Suma**:
$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$
- **Producto**:
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$
En forma exponencial: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- **Cociente**:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{a_2^2 + b_2^2}$$
En forma exponencial: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

Ejemplo

Calcular las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2$ y $z_1 \cdot z_2$, si $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

$z_1 + z_2 = 2\sqrt{2} + 0i = 2\sqrt{2}$, $\qquad z_1 \cdot z_2 = (2 + 3) + (\sqrt{6} - \sqrt{6}i) = 5$;

b) $z_1 - z_2$ y z_1/z_2, si $z_1 = \sqrt{5} - 2i$, $z_2 = \sqrt{5} - i$,

$z_1 - z_2 = (\sqrt{5} - \sqrt{5}) + (-2 + 1)i = -i$,

$$z_1/z_2 = \frac{(\sqrt{5} - 2i)(\sqrt{5} + i)}{5 + 1} = \frac{(5 + 2) + (\sqrt{5} - 2\sqrt{5})i}{6} = \frac{7}{6} - \frac{\sqrt{5}}{6}i.$$

Teorema de Moivre:

Si $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\text{sen}(n\varphi))$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\text{sen}\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

donde $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Aplicando la fórmula de De Moivre se puede obtener las raíces n-ésimas de un número complejo. Las **raíces n-ésimas de la unidad** son aquellos números complejos z que verifiquen que $z^n = 1$. En la forma trigonométrica de $z = |z|(\cos\varphi + i\text{sen}\varphi)$ y teniendo en cuenta que el módulo de 1 es 1 y su argumento principal es 0, se obtiene:

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\text{sen}(n\varphi)) = 1(\cos 0 + i\text{sen}0) = 1,$$

de donde $|z|^n$ y $n\varphi = 0$.

Se podría pensar que de aquí se puede obtener únicamente que $\varphi = 0$, pero eso sería si consideráramos solamente argumentos principales. Realmente cualquier múltiplo entero de 2π es un argumento de 1 y entonces $n\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Luego $\varphi = \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$. Obviamente hay más números enteros pero no es difícil ver que cualquier otro entero nos da un ángulo que difiere en un múltiplo entero de 2π de los que hemos obtenido y produce, por tanto, el mismo argumento. Concluyendo, las raíces n-ésimas de 1 son n números complejos distintos, $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ todos con módulo 1 y el argumento (no necesariamente el principal) $\varphi_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Ejemplo

Las raíces cúbicas de la unidad son $z_0 = 1_0$, $z_1 = 1_{2\pi/3}$, $z_2 = 1_{4\pi/3}$.

Definición: Conjugado de un número complejo

ado el complejo $z = a + bi$, se llama **conjugado** de z al complejo

$$\bar{z} = a - bi.$$

Propiedades del conjugado

1. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, $\bar{\bar{z}} = z$
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
4. Si $z_2 \neq 0$, entonces $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$
5. Cociente: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z_2}}{|z_2|^2}$, $\quad z_2 \neq 0$

1.3 Ejercicios propuestos

1.1: Resolver las inecuaciones:

a) $\dfrac{2}{1-|x|} > \dfrac{2}{5}$;

b) $\left|\dfrac{3x-a}{4}\right| < 2b, b > 0$;

c) $|x^2+13| \geq 22$;

d) $|x-1| < 2|x-3|$;

e) $\left|\dfrac{3x+12}{x+2}\right| > 1$;

f) $\dfrac{|x-1|-|2x+3|}{3x-4} \geq 0$.

1.2: Mostrar que para todos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 2$ se verifique

$$\frac{1}{4} \leq \left|\frac{z^2+1}{z^2+8}\right| \leq \frac{5}{4}.$$

1.3: Calcular las siguientes operaciones en $\mathbb{C}$:

a) $(2+i)^3$;

b) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$;

c) $\sqrt[4]{8\sqrt{2}-8\sqrt{2}i}$;

d) $\log(1+i)$;

e) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4}$;

f) $i^{17}+i^{18}+i^{19}+i^{20}$;

g) $\dfrac{1+i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$;

h) $(0.5e^{i\pi/12})^{-3}$;

i) $\dfrac{e^{-\pi i/3}(1+\sqrt{3}i)^7}{i}$.

1.4: Representar gráficamente todos los puntos tales que:

a) $|z-1| = |z+i|$;

b) $1 < |z+2i| < 2$;

c) $|z-i| < |z+i|$;

d) $|z+2i-1| \leq 2$;

e) $|z-2|^2+|z+2|^2 = 26$;

f) $|z|^2+3z+3\bar{z} = 0$.

1.5: Resolver las ecuaciones

a) $z^2+3|z| = 0$;

b) $z^2+2|z| = 1$;

c) $z^2+|z|^2 = 0$;

1.6: Resolver los sistemas de ecuaciones:

a) $|z+1-i| = |3+2i-z| = |z+i|$;

b) $\begin{cases} |z+1-i| = \sqrt{2}, \\ |z| = 3 \end{cases}$;

1.7: Expresar los números complejos en forma binómica y polar:

a) $-\sqrt{3}+i$;

b) $\dfrac{1-i}{1+i}$;

c) $(2-3i)^{-1}$;

d) $\dfrac{(1+i)^0}{(1-i)^7}$;

e) $\left(i/2-\sqrt{3}/2\right)^{12}$;

f) $-\cos\dfrac{\pi}{6}+i\text{sen}\dfrac{\pi}{6}$.

1.8: Hallar $\sqrt{1+i}$. Mostrar que $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$.

1.9: Aplicando la fórmula de Moivre, mostrar que

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2 x,\quad \text{sen}(2x)=2\cos x\text{sen}x.$$

1.10: Hallar $(e^{i\theta}\pm e^{-i\theta})^3$ para mostrar que

$$\cos^3\theta=\frac{1}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta);\qquad \text{sen}^3\theta=\frac{1}{4}(3\text{sen}\theta-\text{sen}3\theta).$$

1.11: Si $z=a+bi$, $w=c+di$, mostrar que

a) $\bar{z}+\bar{w}=\overline{z+w}$;

b) $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$;

c) $\overline{zw}=\bar{z}\cdot\bar{w}$.

1.12: Hallar todas las raíces:

a) $z^5+1=0$;

b) $z^3+4=\sqrt{48}i$;

c) $z^4=-1-\sqrt{3}i$.

1.13: Resolver la ecuación $(1+2i)(z-i)+(4i-3)(1-iz)+1+7i=0$.

1.14: Dado el número complejo $z=e^{i\pi/4}$, hallar el módulo del complejo e^{iz}.

1.15: Hallar los valores de n para que se cumpla

$$(1+i\sqrt{3})^n-(1-i\sqrt{3})^n=0.$$

1.16: Hallar una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $\sqrt{3}_{60^\circ}$ y $\sqrt{3}_{300^\circ}$.

1.17: Calcular el módulo y el argumento de la expresión $Z=(1+i)+(1+i)^2+\ldots+(1+i)^8$.

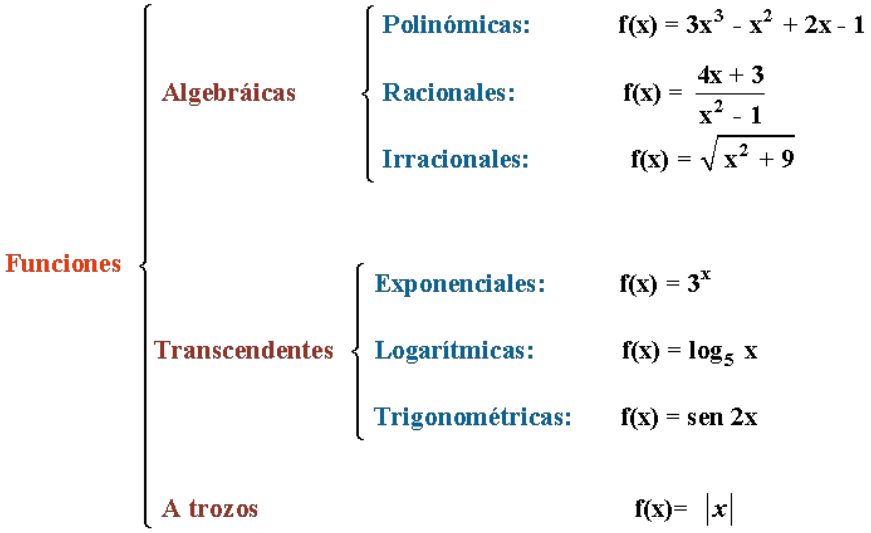
1.18: Expresa en forma binómica $z=\dfrac{1-e^{i\pi/4}}{1+e^{i\pi/2}}$.

1.19: Resolver la ecuación $z+3\bar{z}=5-6i$.

1.20: El número complejo $z=2+4i$ es la raíz de la ecuación $x^2+bx+c=0$. Hallar b y c, escribir la ecuación y hallar la segunda raíz.

2 Funciones reales de una variable real

2.1 Clasificación de las funciones



Definición: Conceptos básicos

- **Dominio** Dom f: Conjunto de valores x donde la función $f(x)$ está definida.
- **Rango o imagen** Im f: Conjunto de valores y que toma la función.
- **Función inversa**: f^{-1} : Im $f \to \mathbb{R}$, tal que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.
- **Monotonía:**
  - Función creciente: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom} f,\ x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$
  - Función decreciente: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom} f,\ x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$
- **Funciones simétricas:**
  - Par: $\forall x \in \text{Dom} f\ f(-x) = f(x)$
  - Impar: $\forall x \in \text{Dom} f\ f(-x) = -f(x)$
- **Funciones periódicas:** $\forall x \in \text{Dom} f\ f(x+T) = f(x)$, T - período.

Función	Dominio
Polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$	$\mathbb{R}$
Racional: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$	$q(x) \neq 0$
Irracional: $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, n es par	$p(x) \geq 0$
Irracional: $f(x) = \sqrt[n]{p(x)}$, n es impar	$\mathbb{R}$
Logarítmica $f(x) = \log_b(p(x))$, $b > 0$	$p(x) > 0$
Exponencial $f(x) = a^x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \text{sen}x$ y $f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera implícita mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función.

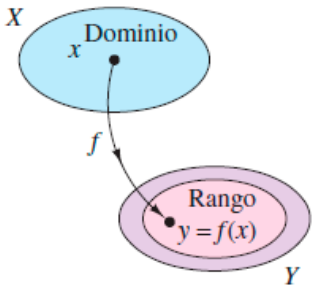
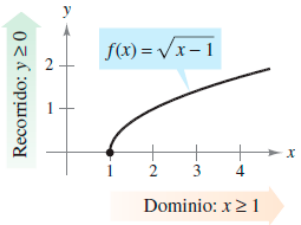


Figure 2.1: Dominio y rango de una función

Ejemplo

La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ está definida para todos $x \geq 1$, es decir, su dominio es el intervalo $[1, \infty)$. Su rango (o recorrido) es el intervalo $[0, \infty)$:



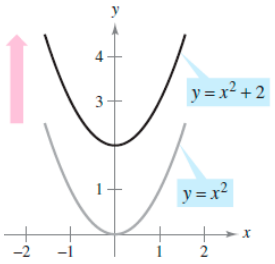
Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x como máximo una vez. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado, llamado **criterio de la recta vertical**, para funciones de x. Es decir, una gráfica en el plano de coordenadas es la gráfica de una función x si y sólo si ninguna recta vertical hace intersección con ella en más de un punto.

Transformaciones de funciones

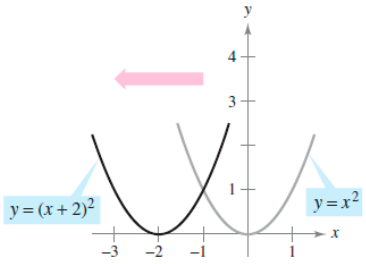
Gráfica original	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la derecha, $c > 0$	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la izquierda, $c > 0$	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades hacia abajo, $c > 0$	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades hacia arriba, $c > 0$	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x)	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y)	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen)	$y = -f(-x)$

Ejemplo

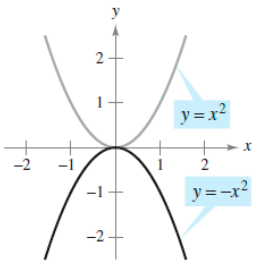
Algunas transformaciones de la función $y = x^2$:



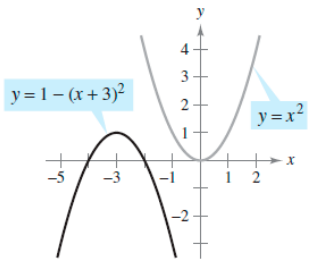
a) Traslación vertical (hacia arriba)



b) Traslación horizontal (a la izquierda)

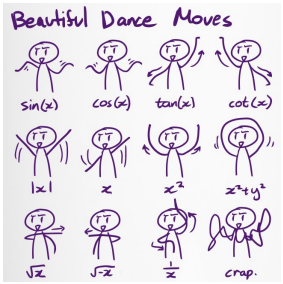


c) Reflexión



d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Representación gráfica de varias funciones:



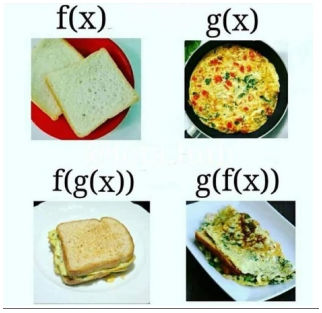
Composición de funciones

Definición: Función compuesta

Sean f y g dos funciones. La función dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama **función compuesta** de f con g. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x del dominio de g tales que $g(x)$ esté en el dominio de f.

Ejemplo

Concepto de la composición de las funciones:



Dadas $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 3x - 2$, las funciones compuestas son:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = (3x - 2)^2 + 1 = 9x^2 - 12x + 5$,

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = 3(x^2 + 1) - 2 = 3x^2 + 1$,

2.2 Límites

Definición: Límite

Se dice que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene límite $\ell \in \mathbb{R}$ en un punto $x = a$ ($\lim_{x \to a} f(x) = \ell$,)

si se cumple que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal quesi $0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Límites laterales:

- a la derecha: $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h),\ h > 0$
- a la izquierda: $\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a - h),\ h > 0$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = \ell$$

Ejemplo

Utilizar la definición de límite para demonstrar que $\lim_{x\to 2}(3x-2)=4$.

En otras palabras, debemos probar que para todo $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que $|(3x-2)-4|<\varepsilon$ siempre que $0<|x-2|<\delta$. Puesto que la elección de δ depende de ε, es necesario establecer una relación entre los valores absolutos $|(3x-2)-4|$ y $|x-2|$:

$|(3x-2)-4|=|3x-6|=3|x-2|$.

Si $\delta=\varepsilon/3$, entonces $0<|x-2|<\delta=\varepsilon/3$ implica que $|(3x-2)-4|=3|x-2|<3\delta=\varepsilon$.

Propiedades de los límites:

Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to a} f(x)=\ell_1$ y $\lim_{x\to a} g(x)=\ell_2$, entonces

1. $\lim_{x\to a}(bf(x))=b\ell_1$, $b\in\mathbb{R}$;
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\ell_1\pm\ell_2$
3. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\ell_1\cdot\ell_2$
4. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$, si el cociente f/g está definido en un entorno de a y $\ell_2\neq 0$;
5. $\lim_{x\to a}(f(x))^n=\ell_1^n$;
6. $\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(\ell_2)$, si $\lim_{x\to \ell_2} f(x)=f(\ell_2)$.

Teorema del encaje

Si $h(x)\le f(x)\le g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a a y $\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a} g(x)=\ell$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)=\ell$.

Indeterminaciones $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 0^∞, 1^∞

Tabla de equivalencias x → 0

$\operatorname{sen}x\sim x$	$e^x-1\sim x$
$\tan x\sim x$	$a^x-1\sim x\ln a$
$\operatorname{arcsen}x\sim x$	$\ln(1+x)\sim x$
$\arctan x\sim x$	$\sqrt{1+x}\sim 1+\dfrac{x}{2}$
$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$	$(1+x^2)\sim 1+2x$

Ejemplo

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] \overset{1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}}{=} \lim_{x\to 0} \dfrac{(2x)^2/2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2}{x^3} = \infty;$

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{1-\sqrt{2x+1}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)(1+\sqrt{2x+1})}{(1-\sqrt{2x+1})(1+\sqrt{2x+1})(\sqrt{x+4}+2)}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{(x+4-4)(1+\sqrt{2x+1})}{(1-2x-1)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}(1+\sqrt{2x+1})}{-2\cancel{x}(\sqrt{x+4}+2)} = \dfrac{1+1}{-2(2+2)} = -\dfrac{1}{4};$

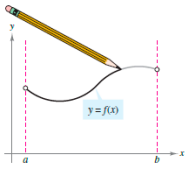
c) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^3-2x^2-3x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{x\cancel{(x-3)}(x+1)} = \dfrac{3+3}{3(3+1)} = \dfrac{1}{2};$

d) $\lim_{x\to 0} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} \overset{n=1/x}{=} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} n}{n} = 0.$

2.3 Continuidad

En matemáticas, el término **continuo** tiene el mismo significado que en su uso cotidiano. Decir, de manera informal, que una función f es continua en $x = a$ significa que no hay interrupción de la gráfica de f en a. Es decir, la gráfica no tiene saltos o huecos en el punto a.

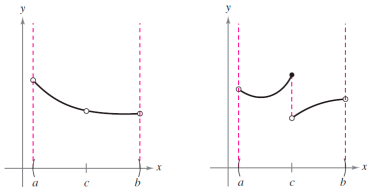
Definición 2.10



Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **continua en un punto** $x = a$ si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Tipos de discontinuidad:



1. Evitable: $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$
2. Discontinua de primera especie: existen los dos límites laterales pero son distintos.
3. Discontinua de segunda especie: al menos uno de los límites laterales no existe.

Ejemplo

a) $f(x) = 1/x$ está definida para todos los números reales distintos de cero. En $x = 0$, tiene una discontinuidad inevitable: no hay modo de definir $f(0)$ para hacer que la nueva función sea continua en $x = 0$.

b) $f(x) = \tan(x)$ es discontinua (de 2 especie) en los puntos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$

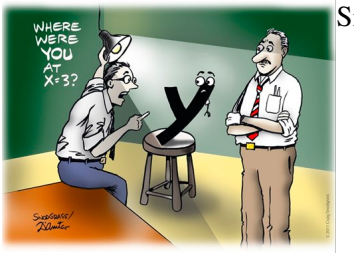
es continua en todos los valores reales distintos de cero. En $x = 0$ no existe el límite.

d) $f(x) = \begin{cases} x\text{sen}(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Por el teorema de encaje, $\lim_{x\to 0} x\text{sen}(1/x) = 0$ $(-|x| < x\text{sen}(1/x) < |x|)$,

entonces $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. La función es continua en toda la recta real.

Propiedades



Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$,

1. **[Teorema de Darboux]:** Si $f(a) < k < f(b)$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.
2. **[Teorema de Bolzano]:** Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
3. **[Teorema de Weierstrass]:** la función alcanza máximo y mínimo sobre dicho intervalo.

2.4 Derivadas y aplicaciones

Definición: Derivada

La derivada de una función $f(x)$ en punto a viene dada por

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

siempre que exista ese límite y sea finito.

Notaciones para la derivada: $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y', $\frac{d}{dx}[f(x)]$

Ejemplo

Calcular la derivada de $f(x) = 5x^2$ mediante el proceso de límite.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x)^2 - 5x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x^2 + 10x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(10x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (10x + \Delta x) = 10x.$$

Definición 2.14

Derivabilidad en un punto $x = a$:

1. $f(x)$ es continua en $x = a$ y
2. $f'(a^-) = f'(a^+) = f'(a)$

Ejemplo: Función $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto $f'(0^-) \neq f'(0^+)$ y la derivada $f'(0)$ no existe.

Reglas de derivación:

1. Múltiplo constante

$$(C \cdot v)' = Cv', \; C = const, \; C' = 0;$$

2. Derivada de la suma (o de la diferencia)

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

3. Derivada del producto

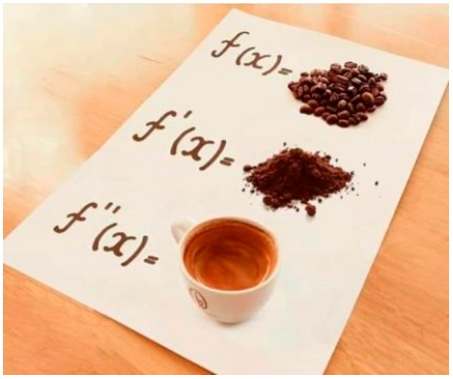
$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

4. Derivada del cociente

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

5. Derivación logarítmica
   $(y = u^v \;\rightarrow\; \ln y = v \ln u)$
   $(u^v)' = u^v \left(\ln u \cdot v' + \frac{v}{u} \cdot u'\right)$
6. **Regla de la cadena:**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$



Ejemplo

1. $(Cf(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} = C \cdot \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = Cf'(x)$;
2. $(f(x) + g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - f(x) - g(x)}{\Delta x}$
   $= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot \dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = f'(x) + g'(x)$;

Tabla de derivadas

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f(x)$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	x^{-1}	$\log_a x$	$x^{-1} \cdot \ln a$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\tan x$	$\cos^{-2} x$	$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Ejemplo

1. $(\tan x)' = \left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x = \sec^2 x$;
2. $\dfrac{d}{dx}\left[(x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)\right] = (x^2 - 2x + 1)' \cdot (x^3 - 1) + (x^2 - 2x + 1) \cdot (x^3 - 1)' =$
   $(2x - 2)(x^3 - 1) + 3x^2(x^2 - 2x + 1) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 2x + 2$;
3. $\left(\cos(4x^2 - 3)\right)' = -\operatorname{sen}(4x^2 - 3) \cdot (4x^2 - 3)' = -8x\operatorname{sen}(4x^2 - 3)$;
4. $\dfrac{d}{dx}\left[\sqrt{1+x^2}\right] = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)' = \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Derivada de la función implícita:

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x;
2. Agrupar todos los términos en que aparezca y' en el lado izquierdo de la ecuación y pasar todos los demás a la derecha;
3. Despejar y'.

Ejemplo

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ dado que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

1. Derivar ambos lados de la ecuación respecto de x: $3y^2y' + 2yy' - 5y' - 2x = 0$
2. Agrupar todos los términos en que aparezca y': $y'\left(3y^2 + 2y - 5\right) = 2x$
3. Despejar y': $y' = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$

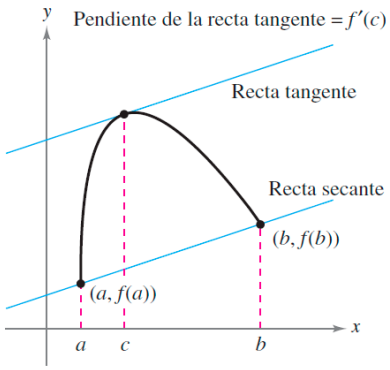
2.5 Aplicación de la derivada

- Recta tangente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

- Recta normal (perpendicular a la recta tangente):

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$



Ejemplo

Hallar la recta tangente a $y = x^2 + 4x + 1$ cuya pendiente sea igual a 2.

Pendiente de la recta tangente en el punto x_0 es $f'(x_0)$:

$y'(x_0) = 2x_0 + 4 = 2$, de donde $x = -1$.

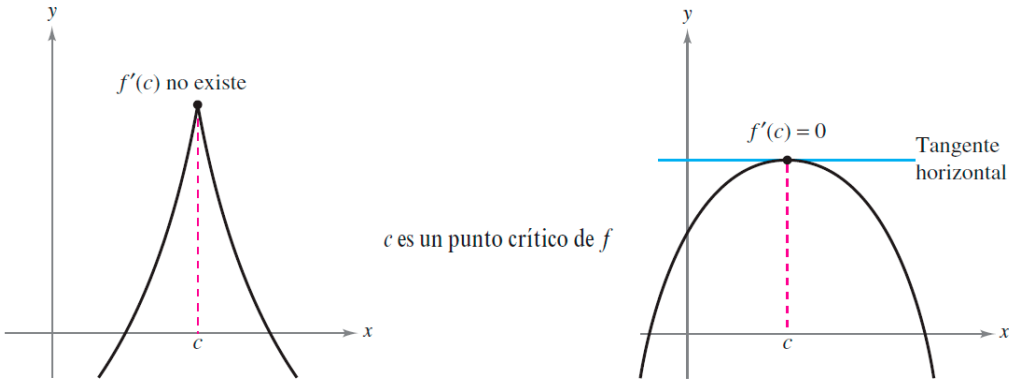
Luego, la ecuación de recta tangente es: $y + 2 = 2(x + 1)$.

- Recta tangente vertical: $f'(c) = \pm\infty$ y f es continua en c;
- Recta tangente horizontal: $f'(c) = 0$;
- Recta tangente es paralela a la recta $y = ax + b$: $f'(c) = a$.

Extremos y monotonía

Definición: Punto crítico

Sea f definida en c, c es un **punto crítico** de f, si $f'(c) = 0$ o no existe $f'(c)$ (no es derivable es ese punto).



Definición: Extremos relativos

1. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un máximo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **máximo relativo de** f, o se podría afirmar que f tiene un **máximo relativo en** $(c, f(c))$.
2. Si hay un intervalo abierto que contiene a c en el cual $f(c)$ es un mínimo, entonces $f(c)$ recibe el nombre de **mínimo relativo de** f, o se podría afirmar que f tiene un **mínimo relativo en** $(c, f(c))$.

Un máximo relativo y un mínimo relativo algunas veces son llamados **máximo local** y **mínimo local**, respectivamente.

Estrategias para la determinación de extremos en un intervalo cerrado

Para determinar los extremos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$ (Teorema de Weierstrass), se siguen estos pasos:

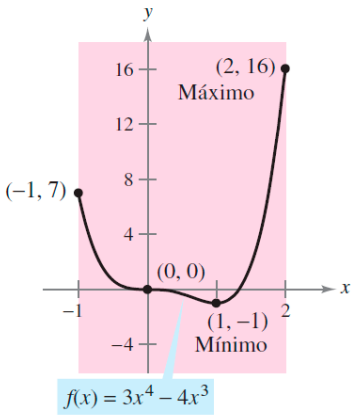
1. Se encuentran los puntos críticos de f en (a, b);
2. Se evalúa f en cada punto crítico en (a, b);
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$;
4. El más pequeño de estos valores es el mínimo. El más grande es el máximo.

Ejemplo

Determinar los extremos de $f(x) = 3x^4 - 4x^3$ en el intervalo $[-1, 2]$.

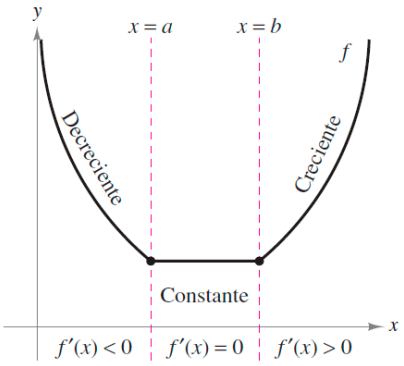
1. Puntos críticos:
   $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 0$, de donde $x = 0,\ 1$.
2. Se evalúa f en cada punto crítico:
   $f(0) = 0$, $f(1) = -1$.
3. Se evalúa f en cada punto extremo de $[a, b]$: $f(-1) = 7$, $f(2) = 16$;
4. Mínimo: $(1, -1)$; Máximo: $(2, 16)$.

¡Los números críticos de una función no necesitan producir extremos relativos!



Definición: Funciones crecientes y decrecientes

- Una función f es **creciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.
- Una función f es **decreciente** sobre un intervalo si para cualesquiera dos números x_1 y x_2 en el intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x1) > f(x_2)$.

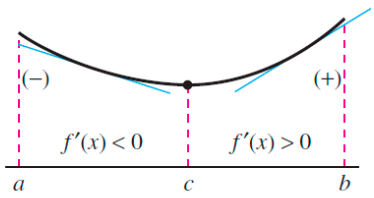


Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

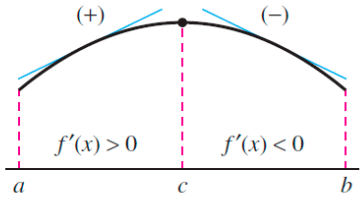
1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b), entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b), entonces f es constante en $[a, b]$.

Criterio de la 1ª derivada: Sea c un punto crítico de f.

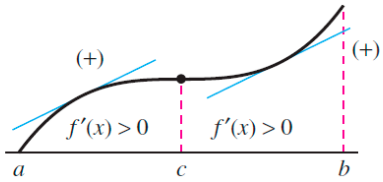
- Si $f'(x) > 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < b \implies f(c)$– un máximo relativo
- Si $f'(x) < 0$ para $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < b \implies f(c)$– un mínimo relativo

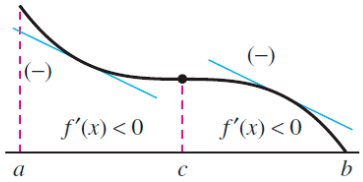


Mínimo relativo



Máximo relativo





Ni mínimo relativo ni máximo relativo

Ejemplo

Encontrar los extremos relativos de $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$.

Empezamos observando que f es continua en toda la recta real.

$f'(x) = \dfrac{4x}{3(x^2 - 4)^{1/3}}$. Los puntos críticos: $x = 0$, $x = \pm 2$.

La tabla resume los valores prueba de cuatro intervalos determinados por estos puntos críticos.

Intervalo	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < \infty$
Valor de prueba	$x = -3$	$x = -1$	$x = 1$	$x = 3$
Signo de $f'(x)$	$f'(-3) < 0$	$f'(-1) > 0$	$f'(1) < 0$	$f'(3) > 0$
Conclusión	Decreciente	Creciente	Decreciente	Creciente

Aplicando el criterio de la primera derivada, se puede concluir que f tiene un mínimo relativo en el punto $(-2, 0)$, un máximo relativo en el punto $(0, \sqrt[3]{16})$, y otro mínimo relativo en el punto $(2, 0)$.

Aplicación de la derivada a los límites

Teorema : Regla de L'Hopital

Sean f y g funciones que son derivables en un intervalo abierto (a, b) conteniendo c, excepto posiblemente el propio c. Asumir que $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a, b)$, excepto posiblemente el propio c. Si el límite de $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

suponiendo que el límite en la derecha existe (o es infinito). Este resultado también aplica a cualquiera de las formas indeterminadas $\frac{\infty}{\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$.

Ejemplo

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1;$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0;$

c) $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0;$

d) $y = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = [1^\infty].$

Tomando logaritmos en esa ecuación se obtiene

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = [\infty \cdot 0]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + (1/x))}{1/x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + 1/x} = 1,$$

Ahora, $\ln y = 1$, entonces $y = e$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

e) $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 1^+} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \left[\frac{0}{0}\right]$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x - 1 + xlnx} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1 + x(1/x) + \ln x} = \frac{1}{2}.$$

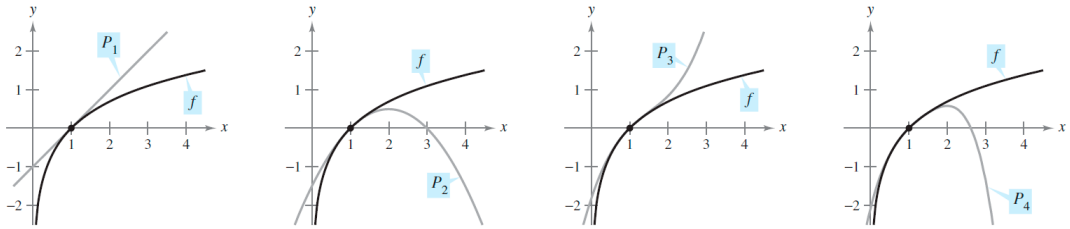
Polinomio de Taylor

Definición: Polinomio de Taylor

Sea $f(x)$ una función derivable n veces en el punto $x = a$. Se define **el polinomio de Taylor de grado** n correspondiente a la función f en $x = a$ como

$$P_n(f,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Si $a = 0$ el polinomio se llama **Polinomio de Maclaurin**.



Cuando el grado n aumenta, la gráfica de P_n se convierte en una mejor aproximación de la gráfica de $f(x) = \ln x$ cerca de $x = 1$.

Ejemplo

a) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 para $f(x) = \ln x$ centrado en $a = 1$.

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}n!x^{-n}$, $n \geq 1$, $f(a) = 0$; $f'(a) = 1$; $f''(a) = -(1)^{-2} = -1$, $f'''(a) = 2! = 2$, $f^4(a) = -3! = 6$.

El polinomio de Taylor: $P_4(f,1) = 0 + 1(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$.

Series de Maclaurin notables

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots;$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \ldots;$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots;$
- $\text{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots;$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots.$

2.6 Ejercicios propuestos

2.1: Determina el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x < 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$;

b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;

c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x^2-\sqrt{x}}}$;

d) $f(x) = \log(|\log x|)$;

e) $f(x) = \sqrt{\log \dfrac{1}{|\operatorname{sen} x|}}$.

2.2: Encuentra el dominio y el imagen de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x - 1/2}$;

b) $f(t) = \sec \dfrac{\pi t}{4}$;

c) $f(x) = \dfrac{2}{|x^2-4|}$;

d) $f(x) = \begin{cases} |x|+1, & x \leq 1, \\ -x+1, & x > 1 \end{cases}$;

e) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+4}, & x \leq 5, \\ (x-5)^2, & x > 5 \end{cases}$.

2.3: Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 + 1$. Hallar $f^{-1}(26)$.

2.4: Representa, de forma aproximada, la gráfica de la funciones siguientes:

a) $y = |x+3| - |x-2| + x$; b) $y = |x^2 - 2x|$; c) $y = \ln(2x-1)$.

2.5: Estudia algunas características básicas: dominio, imagen y simetrías, de las funciones siguientes:

a) $f(x) = \cos(x^2)$;

b) $f(x) = \cos^2(x)$;

c) $f(x) = \cos^2(x^2)$;

d) $f(x) = \sqrt{x^3}$;

2.6: Dadas $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = \log \sqrt{x}$, $x > 0$, halla $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$.

2.7: Si $f(x) = (a - x^n)^{1/n}$, muestra que $f(f(x)) = x$.

2.8: Calcula el valor de los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^3 x}{x^3 + x^4}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - 1)\operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{2\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^5 x}$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4 - x^3 + 5}{3x^4 + x^2 - 4x}$;

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+5x+8}}{4x+5}$;

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(x^4 - x^3 + 5\right)}{\ln\left(3x^4 + x^2 - 4x\right)}$

g) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x+1}$; h) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}$; i) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-3}{x^2+x+3}\right)^{\frac{x^2+x}{x-1}}$.

2.9: Sin aplicar la regla de L'Hopital, halla los límites (si existen):

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^3)}{\operatorname{sen}^3 x}$;

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}}{2x^2}$;

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}|x|}{x}$;

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{2(x-\operatorname{sen} x)}$.

2.10: Halla (si existe) el valor a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto x_0:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1, \\ a, & x = -1; \end{cases}$ $x_0 = -1$;

b) $f(x) = \begin{cases} ax^2+1, & x \neq 0, \\ -x, & x \leq 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ a(x-1), & x > 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2-1+\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}, & x > 0, \\ \operatorname{sen}(x)+1, & x \leq 0; \end{cases}$ $x_0 = 0$.

2.11: Estudia la continuidad de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{e^{x/4}}{3+|x|}$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-1|}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+2x}}{x+\sqrt{x+1}}$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x}$

e) $f(x) = \dfrac{x-6}{x^2-36}$;

f) $f(x) = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$.

2.12: Hallar k para que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

sea continua.

2.13: Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{1}{x-[x]}$ ($[x]$ es la parte entera de x).

2.14: Un sábado a las 8:00 de la mañana, un hombre comienza a subir corriendo la ladera de una montaña hacia su campamento de fin de semana. El domingo a las 8:00 de la mañana baja

corriendo la montaña. Tarda 20 minutos en subir y sólo 10 en bajar. En cierto punto del camino de bajada, el hombre se da cuenta de que pasó por el mismo lugar a la misma hora el sábado. Demostrar que el hombre está en lo cierto.

2.15: Utiliza el teorema del valor intermedio para demostrar que entre todas las esferas cuyos radios pertenecen al intervalo $[5, 8]$ hay una con un volumen de 1 500 centímetros cúbicos.

2.16: Halla a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en todos los puntos de su dominio.

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 - b, & |x| < 1, \\ -1/|x|, & |x| \geq 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq c, \\ ax + b, & x > c. \end{cases}$

2.17: Analiza la continuidad y derivabilidad de la función y representa su gráfica:

$$f(x) = |x^2 - 4| - |x + 2| + 1.$$

2.18: Si $y = \dfrac{x}{x+4}$, muestra que $xy' = y(y-1)$.

2.19: Aplica logaritmos para derivar las funciones

a) $y = x^{\operatorname{sen} x}$; b) $y = x^{\ln x}$; c) $y = \sqrt[x]{x}$.

2.20: Deriva con la regla de la cadena

a) $y = \sqrt[5]{3x^2}$;

b) $y = 5^{3x-4}$;

c) $y = \ln(x^2 + 7x)$;

d) $y = \ln\left(\dfrac{2x^2}{x^3 - 1}\right)$;

e) $y = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$;

f) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + \operatorname{sen}(2x)}{1 - \operatorname{sen}(2x)}}$;

g) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

h) $y = \dfrac{1}{\ln(\sqrt{x} + 2x)}$;

i) $y = \cos(3x^2) + \tan(7x)$.

2.21: Halla $\dfrac{dy}{dx}$:

a) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$;

b) $y = \dfrac{\ln x}{\cos x}$;

c) $y = x^6 + 6^x$;

d) $y = e^{1+\ln x}$;

e) $y = e^x \operatorname{sen} x + x^p \cos x$;

f) $y = \sqrt{\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x}$;

g) $y = x^7 \log_a x$;

h) $y = (2 + \cos x)^x$;

i) $y = x^{2^x}$, $x > 0$.

2.22: Deriva las funciones implícitas:

a) $3^x + 3^y = e^{x+y}$; b) $y = \sqrt{\text{sen}x + y}$;

2.23: Se considera la curva definida por la ecuación $yx^2 + y^3 = 1$ que define a y como función implícita respeto de x en un entorno del punto $(0,\ 1)$. Halla $y'(0)$, $y''(0)$.

2.24: ¿En qué puntos la tangente a $y = x^3 - 4x$ tiene pendiente igual a 8?

2.25: Halla un punto de la curva $y = \sqrt{36 - 4x^2}$, en el cual la recta tangente sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

2.26: Halla el punto P donde se cortan las funciones $f(x) = 2/x$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 3}$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en P a cada una de las curvas y el ángulo entre ellas.

2.27: Halla la recta tangente a la gráfica de la función $y = x^{x+2}$ en $x = 1$.

2.28: Halla las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en $x = 1/2$.

2.29: Halla la recta normal a la elipse $x^2 + 2y^2 = 18$ en el punto $P(4, 1)$.

2.30: Calcular los ángulos que forman al cortarse las curvas definidas por

$$x^2 + y^2 - 4x = 1, \qquad x^2 + y^2 + 2y = 9.$$

2.31: Estudiar el crecimiento de la función $f(x) = (x(x-3))^2$.

2.32: En una semicircunferencia de diámetro AB = $2r$ se traza una cuerda CD paralela a AB. ¿Cuál debe ser la longitud de esa cuerda para que el área del trapecio $ABDC$ sea máxima?

2.33: Determina el punto de la gráfica de la función $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 7x + 5$ en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

2.34: Dos postes con longitudes de 6 y 8 metros se colocan verticalmente sobre el piso con sus bases separadas una distancia de 10 metros. Calcula la longitud mínima de un cable que pueda ir desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo entre los postes y luego hasta la punta del otro poste.

2.35: Los barriles que se utilizan para almacenar petróleo tienen forma cilíndrica y una capacidad de 160 litros. Halla las dimensiones del cilindro para que la chapa empleada en su construcción sea mínima.

2.36: El área de la superficie de una celda de un panal es

$$S = 6hs + \frac{3}{2}s^2\left(\frac{\sqrt{3} - \cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)$$

donde h y s son constantes positivas y θ es el ángulo al cual las caras superiores alcanzan la altura de la celda. Encontrar el ángulo θ $(\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2)$ que minimiza el área S.

2.37: Hallar los límites

a) $\lim_{x\to\infty} x\text{sen}(1/x)$;

b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{(x^2+1)^{1/3}}$;

c) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^{-x}}$;

d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$;

e) $\lim_{x\to0^+} (1+x)^{1/x}$;

f) $\lim_{x\to1^+} (\ln x)^{x-1}$;

g) $\lim_{x\to2^+} \left(\dfrac{8}{x^2-4} - \dfrac{x}{x-2}\right)$;

h) $\lim_{x\to1^+} \left(\dfrac{3}{\ln x} - \dfrac{2}{x-1}\right)$;

i) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\text{sen}\left(\frac{x+1}{x^2+3}\right)}{\ln\left(1+\frac{2x+3}{x^2-x}\right)}$;

j) $\lim_{x\to+\infty} (2x^2-1)e^{-x}$;

k) $\lim_{x\to1^+} \dfrac{2x\ln x - 3x + 3}{(x-1)\ln x}$.

2.38: Halla los primeros 4 términos del polinomio de Maclaurin para las siguientes funciones

a) $f(x) = \text{sen}x$;

b) $f(x) = \cos x$;

c) $f(x) = e^x$;

d) $f(x) = \ln(1+x)$;

e) $f(x) = \ln(1-x)$;

f) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2.39: Utilizando las formulas del ejercicio anterior, halla el polinomio de Maclaurin de las siguientes funciones

a) $f(x) = \ln(1+x^2)$;

b) $f(x) = \text{sen}(2x) + 2\cos(x)$;

c) $f(x) = \ln[(3-x)(2-x)]$;

d) $f(x) = e^{-x^2}$;

e) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$;

f) $f(x) = (x+5)e^{2x}$;

g) $f(x) = \ln\dfrac{3+x}{2-x}$.

2.40: Halla un valor aproximado de $\ln 0.9$ con un polinomio de Taylor de segundo grado.

2.41: Halla un valor aproximado de $\sqrt[3]{e}$ con un polinomio de Taylor de tercer grado.

2.42: Con los polinomios de Maclaurin de grado 4 de las funciones $\ln(1+x)$ y sen$x$ halla

a) $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x^2) - \text{sen}^2 x}{x^4}$;

b) el valor de a que cumpla que $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln(1+2x^3)}{\text{sen}(ax^3)} = 5$.

3 Series

3.1 Sucesiones

Definición: Sucesión

Una **sucesión** se define como una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Aunque una sucesión es una función, es común representar las sucesiones empleando subíndices en lugar de la notación habitual de la función:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1, & & 2, & & 3, & & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & & a_2, & & a_3, & & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array}$$

El número a_n es el **término n-ésimo** (o **término general**) de la sucesión, y la sucesión completa se denota por $\{a_n\}$.

Ejemplo

1. Sucesiones dadas por su imagen:
   $\{1, 2, 3, \ldots\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots\right\}$;
2. Sucesiones dadas por su término general:
   $a_n = n$, $b_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$;
3. Sucesiones dadas por recurrencia:
   $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n+1} + a_{n-2}$, $n \leq 3$
   (suseción de Fibonacci).

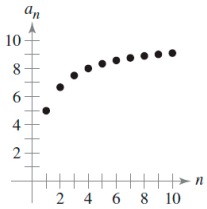
El interés principal en el estudio de sucesiones consiste en establecer su comportamiento a medida que avanzamos en los términos de la misma. Más concretamente, estaremos interesados en averiguar si los valores de la sucesión se acercan a un valor concreto. Éste será el límite:

Definición: Límite de una sucesión

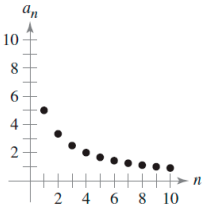
Sea L un número real. Sea f una función de una variable real tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$. Si $\{a_n\}$ es una sucesión tal que $f(n) = a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

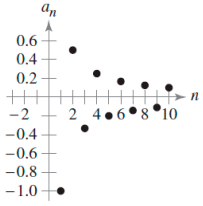
Si el límite L de una sucesión existe, entonces la sucesión **converge** a L. Si el límite de una sucesión no existe, entonces la sucesión **diverge**.



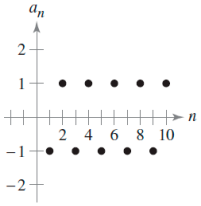
$a_n = \dfrac{10n}{n+1}$



$a_n = \dfrac{10}{n+1}$



$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$



$a_n = (-1)^n$

Ejemplo

Determinar la convergencia o divergencia de la sucesión dada por el término n-ésimo: $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Los primeros términos de la sucesión son: $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1\cdot 2}{2\cdot 2}$, $a_3 = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 3}$,

n-ésimo termino está dado por $a_n = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n}\right)$.

Como $2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n \leq n\cdot n\cdot \ldots \cdot n$,

$$0 < a_n \leq \frac{1}{n}.$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, entonces, por el Teorema de encaje, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ y la sucesión es convergente.

3.2 Series y convergencia

Una aplicación importante de las sucesiones infinitas es la representación de "sumas infinitas". Informalmente, si $\{a_n\}$ es una sucesión infinita, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

es una **serie infinita**. Los números a_n son los **términos de la serie**.

Definición 3.5

Dada una serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la ***n*-ésima suma parcial** está dada por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ converge a S, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es **convergente**.

El límite S se llama **suma de la serie**:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Si $\{S_n\}$ diverge, entonces la serie es **divergente**.

Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ tiene las sumas parciales $S_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 1}{2^n} = 1$, la serie es convergente y su suma es 1.

Teorema : Condición necesaria de convergencia

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Algunos tipos de series:

1. Serie **geométrica** de razón $r \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$.

   Converge si $|r| < 1$ y su suma $S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.

2. Serie **armónica** de exponente $p \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

   Converge si $p > 1$.

3. Serie **telescópica**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n = b_n - b_{n+k}$.

   Converge si lo hace la sucesión $\{b_n\}$, su suma es

   $$S = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1}.$$

Ejemplo

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es geométrica de razón $r = 1/2 < 1$, entonces es convergente y su suma vale $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1-1/2} - 1 = 2 - 1 = 1$.

2. La serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente ($p = 0$), aunque $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

3. La serie telescópica: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots$ es convergente y su suma es $S = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$.

Definición: Series de términos positivos

Se dice que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una **serie de términos positivos** (s.t.p.) si $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos negativos, recibe el mismo tratamiento que las s.t.p., sin más que considerar $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$.

Las series que contienen sólo un número finito de términos negativos también pueden considerarse como s.t.p.

Las series de términos positivos poseen la ventaja de la existencia de diversos criterios que permiten analizar su convergencia. El siguiente resultado resume los más comunes.

Teorema : Criterios de convergencia para s.t.p.

1. **Criterio de comparación:**

   Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos s.t.p. y existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $a_n \leq cb_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (salvo a lo más en un número finito de términos), entonces:

   - si $\sum b_n$ es convergente, entonces $\sum a_n$ es convergente;
   - si $\sum a_n$ es divergente, entonces $\sum b_n$ es divergente.

2. **Comparación por paso al límite:**

   Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos s.t.p. y $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, entonces:

   - si $L \in (0, \infty)$, entonces ambas series tienen el mismo caracter;
   - si $L = 0$ y $\sum b_n$ converge, entonces $\sum a_n$ converge;
   - si $L = 0$ y $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum b_n$ diverge;
   - si $L = \infty$ y $\sum a_n$ converge, entonces $\sum b_n$ converge;
   - si $L = \infty$ y $\sum b_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ diverge.

3. **Criterio del cociente (D'Alambert):**

   Si la s.t.p. $\sum a_n$ verifica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, entonces

   - si $L > 1$ la serie es divergente;
   - si $L < 1$ la serie es convergente;
   - si $L = 1$ el criterio no decide.

4. **Criterio de la raíz (Cauchy):**

   Si la s.t.p. $\sum a_n$ verifica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, entonces

   - si $L > 1$ la serie es divergente;
   - si $L < 1$ la serie es convergente;
   - si $L = 1$ el criterio no decide.

3.3 Series alternadas

Definición: Series alternadas

Una serie $\sum a_n$ es **alternada**, si sus términos alternan en signo: $\sum(-1)^n b_n, \quad b_n > 0.$

Teorema Criterio de Leibniz

Sea $a_n > 0$. Las series alternadas $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$ convergen si se satisfaces las siguientes condiciones:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,
2. $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n$.

Definición: Convergencia absoluta

Una serie $\sum a_n$ se dice que **converge absolutamente** si la s.t.p. $\sum |a_n|$ es convergente.
Si $\sum a_n$ converge absolutamente, entonces es convergente.

Si $\sum a_n$ converge, pero $\sum |a_n|$ diverge, entonces $\sum a_n$ **converge condicionalmente**.

En el caso de convergencia, $|S - S_n| \leq a_{n+1}$, donde S es su suma y S_n el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales.

Ejemplo

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge por el criterio de Leibniz:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;
2. $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \quad \forall n \geq 1.$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge condicionalmente.

3.4 Series de potencias

Definición: Series de potencias

- Una expresión de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ se llama **la serie de potencias centrada en el punto** a, donde a es una constante. Una serie de potencias puede ser interpretada como una función de x:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

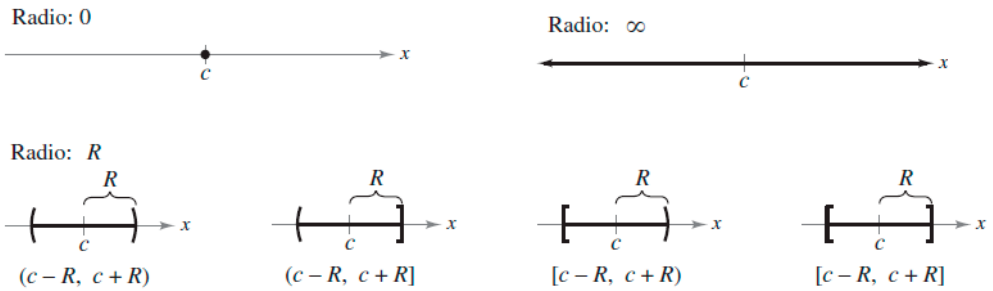
- **El radio de convergencia** de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ viene dado por:
$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

- El dominio de la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ es el conjunto de valores de x donde la serie converge, este intervalo $(c-R, c+R)$ se llama **intervalo (campo) de convergencia**.

Teorema de Abel

Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ se cumple una y solo una de las afirmaciones siguientes:

- La serie converge solo en el punto c $(R = 0)$.
- La serie converge en un intervalo finito $(c-R, c+R)$, $R > 0$, y no converge en $|x-c| > R$.
- La serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$ $(R = \infty)$.



Conviene observar que el teorema no dice nada sobre la convergencia en los extremos de dicho intervalo. Para determinar la convergencia en los extremos se deberá analizar la convergencia de la serie numérica que resulte.

Ejemplo

Halla el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

En este caso $a = 0$, $a_n = 1/n$, entonces $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$. La serie converge en $(-1, 1)$.

En el punto $x = -1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - converge (por el criterio de Leibniz).

En el punto $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - serie armónica divergente.

Por tanto, el intervalo de convergencia es $[-1, 1)$.

Teorema : Operaciones con series de potencias

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge en $(-R, R)$, entonces:

- $f(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n k^n x^n$ converge en $(-R/|k|, R/|k|)$;
- $f(x^k) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nk}$ converge en $(-\sqrt[k]{R}, \sqrt[k]{R})$, $k > 0$;

Ejemplo

Halla el intervalo de convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n}$.

En este caso $a = 0$, $a_n = 3^n/n$, entonces $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(n+1)}{3^{n+1}n} = 1/3$ (compara con el resultado del teorema anterior). La serie converge en $(-1/3, 1/3)$.

En el punto $x = -1/3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ - converge (por el criterio de Leibniz).

En el punto $x = 1/3$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - serie armónica divergente.

Por tanto, el intervalo de convergencia es $[-1/3, 1/3)$.

Teorema : Derivación e integración de series de potencias

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ converge en $(c-R, c+R)$, entonces:

- $f(x)$ es derivable en el intervalo de convergencia;
- $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$, con el radio de convergencia R;
- $f(x)$ es integrable en el intervalo de convergencia;
- $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} + C$, con el radio de convergencia R;

Ejemplo

Sea $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, demonstrar que $f'(x) = f(x)$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

Definición: Serie de Taylor

Si la función $f(x)$ es infinitamente derivable en un intervalo abierto centrado en a, entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ se llama **Serie de Taylor de la función $f(x)$ centrada en $x = a$.**
En el caso particular en que $a = 0$, la serie de denomina **Serie de Maclaurin** de la función $f(x)$.

3.5 Ejercicios propuestos

3.1: Escribe el término n-ésimo de las siguientes sucesiones:

a) $5, 10, 20, 40, \ldots$;

b) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$;

c) $1, \frac{2}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \ldots$;

d) $1, -1, 1, -1, \ldots$;

e) $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \ldots$;

f) $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$.

3.2: Escribe los primeros 5 términos de la sucesión:

a) $a_n = \dfrac{3n-2}{n^2+1}$;

b) $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$;

c) $a_n = \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$;

d) $a_n = \dfrac{2+(-1)^n}{n^2}$;

e) $a_n = n^{(-1)^{n-1}}$;

f) $a_n = \dfrac{1}{(3+(-1)^n)^n}$;

g) $a_n = \dfrac{\left(2+\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right)\cos(n\pi)}{n!}$;

h) $a_n = \dfrac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n^2}$;

i) $a_n = 5 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$.

3.3: Escribe los primeros 5 términos de la sucesión definida por recurrencia:

a) $a_1 = 3$, $a_{k+1} = 2(a_k - 1)$;

b) $a_1 = 4$, $a_{k+1} = \dfrac{k+1}{2} a_k$;

c) $a_1 = 32$, $a_{k+1} = a_k/2$;

d) $a_1 = 6$, $a_{k+1} = a_k^2/3$;

3.4: Halla el límite (si existe) de la sucesión:

a) $a_n = \dfrac{5n^2}{n^2+2}$;

b) $a_n = 5 - \dfrac{1}{n}$;

c) $a_n = \operatorname{sen}\dfrac{1}{n}$;

d) $a_n = 1 + (-1)^n$;

e) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$;

f) $a_n = (-1)^n \left(\dfrac{n}{n+1}\right)$;

g) $a_n = \dfrac{5^n}{n^n}$;

h) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

i) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

3.5: Dada la s.t.p. $\sum a_n$ convergente. Estudia el carácter de la serie $\sum \dfrac{1}{a_n}$.

3.6: Halla la suma de la serie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1} 4^{-n}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3^n}{2^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{3^{2n}}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

3.7: Estudia la convergencia de la serie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{3^{2n}}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5^n} + \frac{2}{n}\right)$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.02}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2+2}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{5n+1}\right)^{1/2}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$;

3.8: Aplica el criterio de comparación para determinar el carácter de la serie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n-1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n+3}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n-1}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{5^n+1}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n\sqrt{n}+1}$.

3.9: Aplica el criterio de cociente para determinar el carácter de la serie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

3.10: Aplica el criterio de Cauchy para determinar el carácter de la serie:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n}\right)^n$;

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{n+5}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$;

3.11: Discutir la convergencia de las siguientes series

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n+1)!3^{2n}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n+1}{5n-3}\right)^{n/2}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n/3}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n(n^2+4)^3}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{3^n}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

3.12: Determinar el carácter de las siguientes series y estudiar también su convergencia absoluta:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-2/3)^n$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^4}{n^4+1}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n\frac{n+3}{2n-5}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\ln n}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^2+3}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3\tan(1/n)}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{n}$.

3.13: Determinar la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{6^n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\right)\arctan\frac{\operatorname{sen} n}{n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$.

3.14: Estima el error de la aproximación de $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ por la suma n-ésima S_{40}. ¿Cuántos términos es necesario sumar para garantizar que la suma parcial n-ésima de esta serie aproxima el valor real de S con un error menor que 10^{-10}.

3.15: ¿Cuántos términos de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ hay que tomar para calcular su suma con exactitud hasta 0.01, 0.001?

3.16: ¿Cuántos términos de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{5^n(2n+1)}$ hay que tomar para calcular su suma con exactitud hasta 0.01, 0.001 y 0.0001?

3.17: Halla el campo de convergencia delas siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{(n+1)^2}$;

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;

c) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{n-1}}{3^{n-1}}$;

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$;

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x)^n}{\sqrt{n+1}}$;

g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$;

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$.

3.18: Calcula los intervalos de convergencia de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ y $\int f(x)dx$:

a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$;

b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^{n+1}}{n+1}$.

3.19: Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

a) Halla los intervalos de convergencia de f y g;

b) Muestra que $f'(x) = g(x)$;

c) Muestra que $g'(x) = -f(x)$;

d) Identifica las funciones f y g.

3.20: Demuestra que la función $y(x)$ satisface la ecuación dada:

a) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $y'' + y = 0$;

b) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$, $y'' - xy' - y = 0$.

3.21: Demuestra que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene un radio de convergencia R, entonces el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ es $\sqrt{R}$.

3.22: Desarrolla en serie de potencias de x centrado en 0 las siguientes funciones, indicando el campo de convergencia:

a) $f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{1}{1+x^2}$;

b) $f(x) = \frac{2x+3}{(1-x)(2-x)}$;

c) $f(x) = \frac{2+x}{1+2x+x^2}$;

d) $f(x) = \frac{5}{4+x^2}$;

e) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$;

f) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$.

3.23: Utilizando las propiedades de derivación e integración de las series de potencias, desarrolla en serie de potencias de x las funciones siguientes y estudia el campo de convergencia:

a) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{2}x\right)$; b) $f(x) = \log(1 + x^2)$; c) $f(x) = (1 + x)^{-2}$.

3.24: Encontrar las serie de Maclaurin para la función:

a) $f(x) = e^{x^2/2}$; c) $f(x) = \cos^2 x$; e) $f(x) = x\text{sen}(x)$;

b) $f(x) = \cos(x^{3/2})$; d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; f) $f(x) = e^{-2x}$.

3.25: Usar la representación en series de la función f para hallar $\lim_{x\to 0} f(x)$ (si existe):

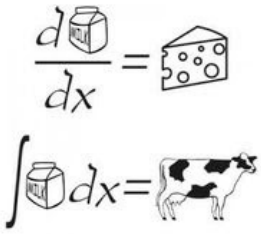
a) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$; b) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$; c) $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{x}$.

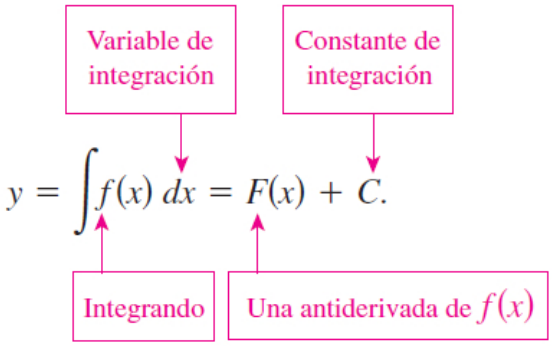
4 Integración

4.1 Integración indefinida

Definición: Primitiva (antiderivada)

Se dice que $F(x)$ es **una función primitiva** de otra función $f(x)$ si y sólo si se verifica $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in D(f)$ siendo $D(f)$ el dominio de la función $f(x)$.
Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo I, entonces $G(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en el intervalo I si y sólo si $G(x) = F(x) + C$ para todo x en I, donde C es una **constante de integración**:





Los operadores $\int$ (integración) y $\frac{d\cdot}{dx}$ (diferenciación), son inversos, si bien cuando se aplican en el orden $\int$ debe añadirse una constante arbitraria.

4.2 Métodos de integración

Todos los métodos de integración están inspirados en la misma idea: **reducir la integral planteada a una integral inmediata**.

Definición: Reglas básicas de integración

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int adx = ax + C$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x+a}dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a},\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \text{sen}axdx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

$$\int \cos axdx = \frac{1}{a}\text{sen}ax + C$$

$$\int \tan axdx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$$

$$\int \sec^2 xdx = \tan x + C$$

$$\int \text{cosec}^2 xdx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

Ejemplo

Integral original	⇨	Reescribir	⇨	Integrar	⇨	Simplificar
$\int \sqrt{x}dx =$		$\int x^{1/2}dx =$		$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C =$		$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x}}dx =$		$\int x^{-3/2}dx =$		$\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C =$		$\frac{-2}{\sqrt{x}} + C$
$\int 2\cos^2 xdx =$		$\int (\cos(2x)+1)dx =$		$\frac{\text{sen}(2x)}{2} + x + C =$		$\frac{1}{2}\text{sen}(2x) + x + C$
$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx =$		$\int x^{7/8}dx =$		$\frac{x^{7/8+1}}{7/8+1} + C =$		$\frac{15}{8}x\sqrt[8]{x^7} + C$
$\int (x^2+1)^2dx =$		$\int (x^4+2x^2+1)dx =$		$\frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x + C =$		$\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x + C$

4.2.1 Integración por sustitución

Teorema : Integración por sustitución

El cambio de variable en una integral indefinida se puede efectuar en dos formas:

1. Cambiando parte del integrando por una nueva variable $g(x) = t$:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \begin{bmatrix} g(x) = t \\ g'(x)dx = dt \end{bmatrix} = \int f(t)dt$$

2. Cambiando la variable x por una función $x = g(t)$, donde $g(t)$ es una función monótona continuamente derivable de una nueva variable t:

$$\int f(x)dx = \begin{bmatrix} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Ejemplo

Identificar el patrón $f(g(x))g'(x)$ y utilizar el resultado para calcular la integral:

a) $\displaystyle\int 2x\text{sen}(x^2)dx = \int \underbrace{\text{sen}(x^2)}_{f(g(x))}\underbrace{2x}_{g'(x)}dx = \begin{bmatrix} x^2 = t, \\ 2xdx = dt \end{bmatrix} = \int \text{sen}t dt = -\cos t + C =$

$-\cos(x^2) + C$;

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}dx = \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}}_{f(g(x))}\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)}dx = \begin{bmatrix} \ln x = t, \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =$

$\displaystyle\arcsen\left(\frac{t}{1}\right) + C = \arcsen(\ln x) + C$;

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\text{sen}^2 x}dx = \int \underbrace{\frac{1}{1+\text{sen}^2 x}}_{f(g(x))}\underbrace{\cos x}_{g'(x)}dx = \begin{bmatrix} \text{sen}x = t, \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{1}{1+t^2}dt =$

$\arctan t + C = \arctan(\text{sen}x) + C$;

d) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}}}_{f(g(x))}\underbrace{e^x}_{g'(x)}dx = \begin{bmatrix} e^x = t, \\ e^x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{t^2-1}{1+t^2}dt =$

$\displaystyle\int \frac{1+t^2-2}{1+t^2}dt = \int \left(1 - \frac{2}{1+t^2}\right)dt = t - 2\arctan t + C = e^x - 2\arctan(e^x) + C$;

Estrategia para realizar un cambio de variable:

1. Elegir una sustitución $t = g(x)$. Usualmente, es mejor elegir la parte interna de una función compuesta, tal como una cantidad elevada a una potencia.
2. Calcular $dt = g'(x)dx$.
3. Reescribir la integral en términos de la variable t.
4. Encontrar la integral resultante en términos de t.
5. Reemplazar t por $g(x)$ para obtener una primitiva en términos de x.
6. Verificar la respuesta por derivación.

Ejemplo

Calcular las integrales por el cambio de variable.

a) $$\int \sqrt{2x-1}dx = \begin{bmatrix} t = 2x-1,\ x = (t+1)/2 \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{bmatrix} = \int \underbrace{\sqrt{t}}_{f(g(t))} \underbrace{\frac{1}{2}}_{g'(t)} dt = \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C;$$

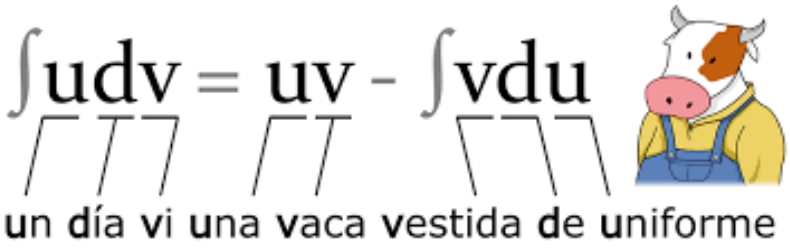
b) $$\int \text{sen}^2(3x)\cos(3x)dx = \begin{bmatrix} t = \text{sen}(3x), \\ dt = 3\cos(3x)dx,\ \frac{dt}{3} = \cos(3x)dx \end{bmatrix} = \int t^2\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int t^2dt =$$

$$\frac{t^3}{9} + C = \frac{1}{9}\text{sen}^3(3x) + C;$$

4.2.2 Integración por partes

Teorema : Integración por partes

Si u y v son funciones de x y tienen derivadas continuas, entonces



Estrategia para integrar por partes

1. Intentar tomar como dv la porción más complicada del integrando que se ajuste a una regla básica de integración y como u el factor restante del integrando.
2. Intentar tomar como u la porción del integrando cuya derivada es una función más simple que u, y como dv el factor restante del integrando.

Observe que dv siempre incluye dx del integrando original.

Ejemplo

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^x dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix} = \underbrace{xe^x}_{uv} - \int \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du} = xe^x - e^x + C$$

4.2.3 Integración de funciones racionales

Integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios.

Distinguiremos dos casos:

1. **Grado de $P(x)$ < Grado de $Q(x)$:**

   Estas integrales se resuelven por descomposición en fracciones simples.

   Para ello se descompone $Q(x)$ en factores irreducibles,

   $$Q(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{m_k}(a_1x^2 + b_1x + c_j) \cdot \ldots \cdot (a_jx^2 + b_jx + c_j),$$

   donde los últimos factores tienen raíces complejas.

   La descomposición en fracciones simples es la siguiente:

   $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{C_1x + D_1}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \ldots + \frac{C_jx + D_j}{a_jx^2 + b_jx + c_j}$$

   Las integrales que resultan son todas de los tipos siguientes:

   a) $\int \frac{A}{x - a}dx = A \ln|x - a| + C,$

   b) $\int \frac{A}{(x - a)^n}dx = -\frac{A}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} + C;$

   c) $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{N - Mp/2}{\sqrt{q - p^2/4}}\arctan\frac{x + p/2}{\sqrt{q - p^2/4}} + C$

2. **Grado de $P(x)$ ≥ Grado de $Q(x)$:** En este caso se divide $P(x)$ entre $Q(x)$, obteniéndose

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}dx,$$

donde $c(x)$ es un polinomio y $\int \frac{r(x)}{Q(x)}dx$ es una integral racional en la que el grado del numerador es inferior al del denominador (caso anterior).

Ejemplo

Calcular $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x-3}$$

de donde $x = A_1(x+2)(x-3) + A_2(x+1)(x-3) + A_3(x+1)(x+2)$.

Hallamos A_1, A_2 y A_3 dando a x los valores -1, -2, 3:

- $x = -1 : -1 = -4A_1 \implies A_1 = 1/4$;
- $x = -2 : -2 = 5A_2 \implies A_2 = -2/5$;
- $x = 3 : 3 = 20A_3 \implies A_3 = 3/20$.

Así, tenemos que

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x-3)}dx = \int \left(\frac{1/4}{x+1} - \frac{2/5}{x+2} + \frac{3/20}{x-3}\right)dx = \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{2}{5}\ln|x+2| + \frac{3}{20}\ln|x-3| + C$$

4.2.4 Integrales trigonométricas

Las más sencillas de la forma $\int \text{sen}^m x \cos^n x dx$, $m, n \in \mathbb{N}$:

- Si m o n es impar, $m = 2k+1$: $\int \text{sen}^{2k+1} x \cos^n x dx = \int \text{sen} x(1-\cos^2 x)^k \cos^n x dx$ (cambio de variable: $t = \cos x$);
- Si m y n son pares, mediante el ángulo doble:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Las integrales de la forma $\int R(\text{sen}x, \cos x)dx$ donde R es una función racional, se resuelven mediante un cambio de variable:

- Si $R(-\text{sen}x, \cos x) = -R(\text{sen}x, \cos x)$, el cambio es $t = \cos x$;
- Si $R(\text{sen}x, -\cos x) = -R(\text{sen}x, \cos x)$, el cambio es $t = \text{sen}x$;
- Si $R(-\text{sen}x, -\cos x) = R(\text{sen}x, \cos x)$, el cambio es $t = \tan x$;
- Si $R(\text{sen}x, \cos x)$ no tiene ninguna de las paridades anteriores, entonces el cambio es $t = \tan(x/2)$,

  en este caso: $\text{sen}x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Ejemplo

a) $\displaystyle\int \text{sen}^3 x \cos x dx = \begin{bmatrix} t = \text{sen}x, \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\text{sen}^4 x + C.$

b) $\displaystyle\int \text{sen}^3 x dx = \int (1-\cos^2 x)\text{sen}x dx = \begin{bmatrix} t = \cos x, \\ dt = -\text{sen}x dx \end{bmatrix} = \int (t^2-1)dt = \frac{t^3}{3} - t + C =$
$\dfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.$

c) Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{3\text{sen}x + 4\cos x + 5}$.

El integrando no tiene ninguna paridad, entonces el cambio de variable es: $t = \tan x/2$.

$\text{sen}x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

$$\int \frac{dx}{3\text{sen}x + 4\cos x + 5} = \int \frac{2dt}{6t + 4(1-t^2) + 5(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{t^2 + 6t + 9} =$$

$$2\int (t+3)^{-2} dt = \frac{-2}{t+3} + C = -\frac{2}{\tan(x/2) + 3} + C.$$

4.3 Integral definida

El concepto de integral definida está íntimamente relacionado con el concepto de área bajo una función en un determinado intervalo. Un método para llegar a esta definición consiste en realizar aproximaciones del área mediante familias de rectángulos.

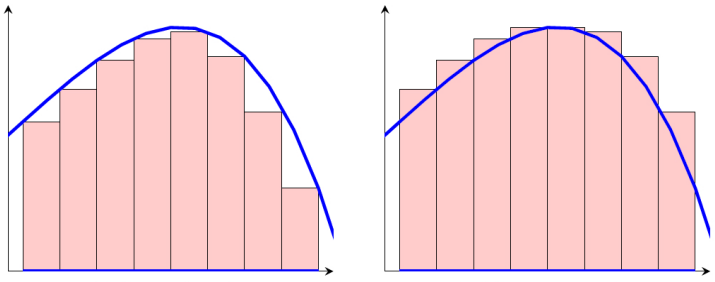
Definición: Suma inferior y suma superior

- Dado un intervalo $[a, b]$, se dice que un conjunto $P = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ es una **partición de** $[a, b]$.
- Dada P - una partición del intervalo $[a, b]$ y una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, se definen los números:

  $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$, donde $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$;

  $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$, donde $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$;

  denominados **suma inferior** y **suma superior**, respectivamente, de f respecto de P.



(a) Suma inferior (b) Suma superior

Definición: Suma de Riemann

Dada una función acotada en un intervalo $[a, b]$ y una partición P, se denomina **suma de Riemann** de f en $[a, b]$ a una expresión del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad c_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

El ancho del subintervalo más grande de la partición Δx es la norma de la partición y se denota por medio de $||\Delta x||$. Si todos los intervalos tienen la misma anchura, la partición es **regular** y la norma es $||\Delta x|| = \dfrac{b-a}{n}$

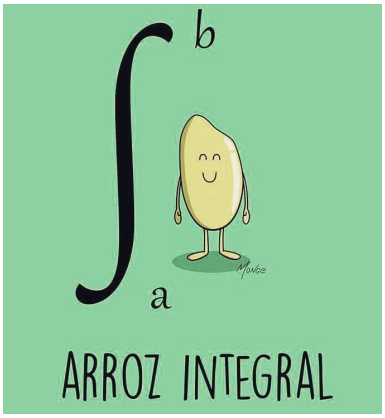
Nótese que las sumas superiores e inferiores son un caso particular de sumas de Riemann.

Definición: Integral definida

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann $\lim_{||\Delta x||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ existe, entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||\Delta x||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, b - **límite superior** de integración.



Una integral definida es un número, en tanto que una integral indefinida es una familia de funciones.

Teorema : Criterio de integrabilidad

Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$.

Ejemplo

Hallar la integral definida $\int_{-2}^{1} 2xdx$, utilizando la fórmula $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en este intervalo. Por conveniencia computacional, definir Δx_i, subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de la misma anchura: $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$.

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3}{n}i.$$

De este modo, la integral definida está dada por

$$\int_{-2}^{1} 2xdx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(-2n + \frac{3}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}(-12 + 9 + 9/n) = -3$$

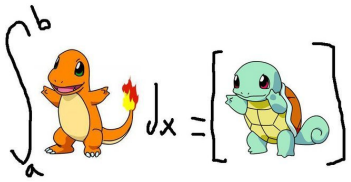
Propiedades de la integral definida

- $\int_a^a f(x)dx = 0 \qquad \int_a^b cdx = c(b-a);$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$
- $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx;$
- Si $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a);$
- Si $f(x) \leq g(x) \ \forall x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$

Teorema Fundamental del cálculo integral

Sea f una función integrable en $[a,b]$ y definamos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$



Entonces $F(x)$ es derivable y $F'(x) = f(x)$.
En el caso general,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right] = f(b(x)) \cdot b'(x) - f(a(x)) \cdot a'(x).$$

Teorema : Regla de Barrow

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de f, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo

Dada una función que satisface:

$$\int_0^x f(t)dt = -\frac{1}{2} + x^2 + x\text{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

calcular $f(\pi/4)$ y $f'(\pi/4)$.

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo integral, el cual nos permite derivar ambos miembros de la ecuación, se tiene

$f(x) = 2x + 2x\cos(2x)$, por lo tanto $f(\pi/4) = \pi/2$ y

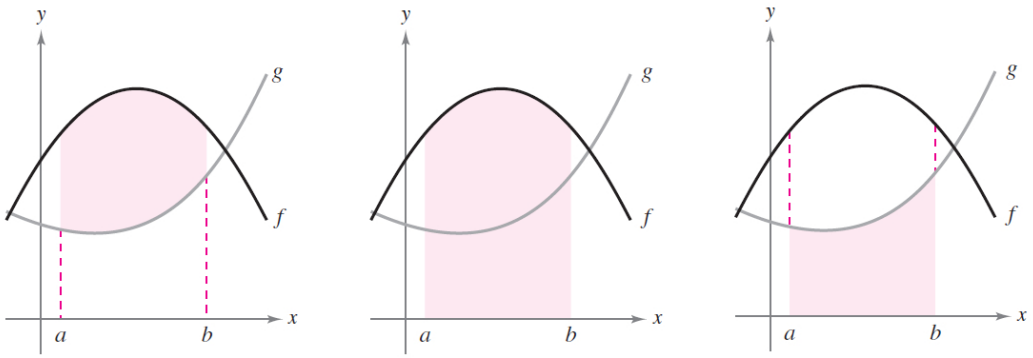
$f'(x) = 2 + 2\cos(2x) - 4x\text{sen}(2x)$, entonces $f'(\pi/4) = -2$.

4.4 Aplicaciones de integración

Definición: Área de una región entre dos curvas

Si f y g son continuas en $[a, b]$ y $g(x) \leq f(x)$ para todo x en $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por las gráficas de f y g y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



Área de la región entre f y g	=	Área de la región bajo f	−	Área de la región bajo g
$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$	=	$\int_a^b f(x)\,dx$	−	$\int_a^b g(x)\,dx$

Ejemplo

Encontrar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$, $x = 1$.

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx = \int_0^1 \left[(x^2 + 2) - (-x)\right] dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}.$$

4.4.1 Volumen de revolución

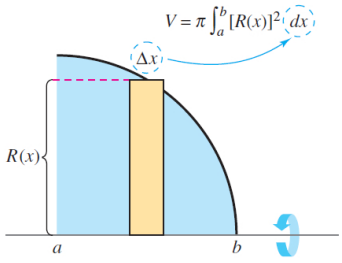
Si una región en el plano gira alrededor de una recta, el sólido resultante es un **sólido de revolución**, y la recta se llama eje de revolución.

Definición: Método de discos

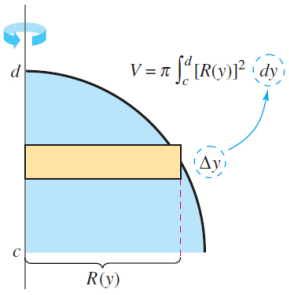
Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el método de los discos, usar una de las fórmulas siguientes:

- Eje de revolución horizontal: $V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$;
- Eje de revolución vertical: $V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy$,

siendo R el radio de revolución.



Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical

Ejemplo

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\text{sen}x}$ y el eje x $(0 \leq x \leq \pi)$ alrededor del eje x.

$$V = \pi \int_0^\pi (\sqrt{\text{sen}x})^2 dx = \pi \int_0^\pi \text{sen}x dx = \pi \left[-\cos x\right]_0^\pi = \pi(1 + 1) = 2\pi$$

Ejemplo

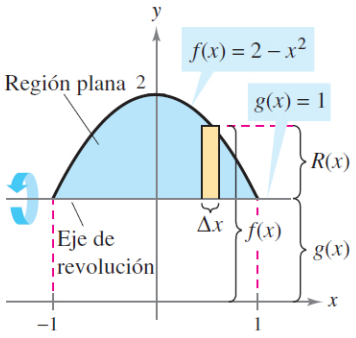
Eje de revolución alrededor de una recta que no es un eje de coordenadas

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = 1$ alrededor de la recta $y = 1$.

El radio es $R(x) = f(x) - g(x) = 1 - x^2$.

$$V = \pi \int_{-1}^{1} [R(x)]^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} [1 - x^2]^2 dx =$$

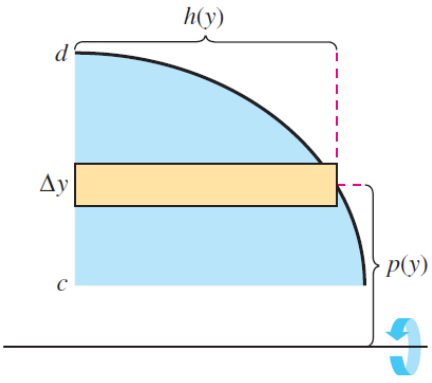
$$\pi \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right]_{-1}^{1} = \frac{16}{15}\pi$$



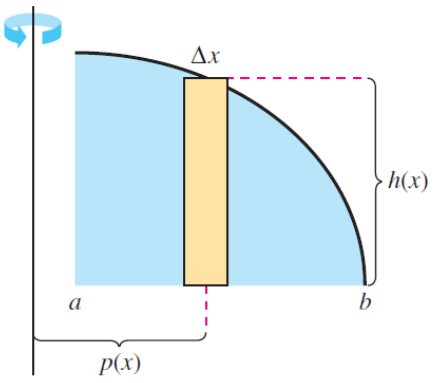
Definición: Método de capas

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el método de las capas, usar alguna de las fórmulas siguientes

- Eje de revolución horizontal: $V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)dy$;
- Eje de revolución vertical: $V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)dx$,



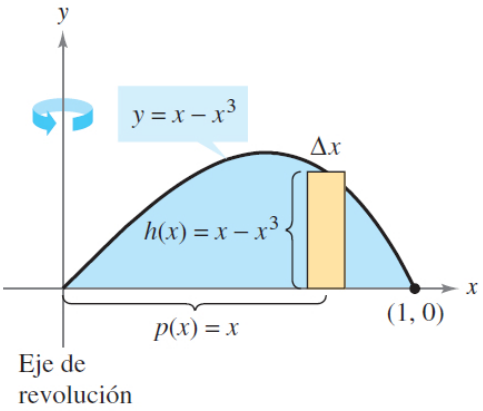
Eje de revolución horizontal



Eje de revolución vertical

Ejemplo

Encontrar el volumen del sólido de revolución formado al girar la región acotada por $y = x - x^3$ y el eje x $(0 \leq x \leq 1)$ alrededor del eje y.



Porque el eje de revolución es vertical, usar un rectángulo representativo vertical, como se muestra en la figura. La anchura Δx indica que x es la variable de integración. La distancia del centro del rectángulo al eje de revolución es $p(x) = x$, y la altura del rectángulo es $h(x) = x - x^3$.

Porque x varía de 0 a 1, el volumen del sólido es

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^4)dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\pi.$$

Los métodos de los discos y de las capas pueden distinguirse porque para usar el método de los discos, el rectángulo representativo siempre es perpendicular al eje de revolución, y para el método de las capas, el rectángulo representativo siempre es paralelo al eje de revolución.

A veces, despejar x es muy difícil (o incluso imposible). En tales casos se debe usar un rectángulo vertical (de anchura Δx), haciendo así la variable de integración a x. La posición (horizontal o vertical) del eje de revolución determina el método a utilizar.

4.5 Ejercicios propuestos

4.1: Calcula las siguientes integrales "inmediatas":

a) $\int 1/\sqrt{x}dx$;

b) $\int \left(7x^5 + 6x - \sqrt{2}\right) dx$;

c) $\int \left(\frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^5}\right) dx$;

d) $\int \sqrt{\frac{2}{3-3x^2}}dx$;

e) $\int \frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{6\sqrt[5]{x^3}}dx$;

f) $\int \cos^2 \frac{x}{2}dx$.

4.2: Identifica el patrón $f(g(x))g'(x)$ y utiliza el resultado para calcular la integral:

a) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$;

b) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

c) $\int \text{sen}^3 x \cos x dx$;

d) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$;

e) $\int \frac{\text{sen}x dx}{2+\cos^2 x}$;

f) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}dx$

4.3: Calcula las integrales por el cambio de variable:

a) $\int (3x-5)^{10}dx$;

b) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x-1}}$;

c) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$;

d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

e) $\int \frac{xdx}{(1-x^2)^2}$;

f) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$;

g) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

h) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$;

i) $\int \frac{dx}{x-\sqrt[4]{x}}$.

4.4: Calcula las siguientes integrales utilizando la fórmula de integración por partes:

a) $\int x\text{sen}x dx$;

b) $\int x^2 e^x dx$;

c) $\int \arctan x dx$;

d) $\int xe^{-x}dx$;

e) $\int x^2 \ln x dx$;

f) $\int x \arctan x dx$.

4.5: Calcula las integrales racionales:

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$;

b) $\int \frac{2x-3}{3x(x^2+1)}dx$;

c) $\int \frac{2x+1}{1+16x^2}dx$;

d) $\int \frac{x^3+x+2}{x+3}dx$;

e) $\int \frac{3x^2-5x+1}{x-4}dx$;

f) $\int \frac{5x-3}{x^3-x}dx$.

4.6: Calcula las integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$; b) $\int \frac{dx}{2x^2-4x+10}$; c) $\int \frac{dx}{x^2+4x+16}$.

4.7: Calcula las integrales trigonométricas:

a) $\int \text{sen}^4 x dx$; d) $\int \text{sen}(3x)\cos(5x)dx$; g) $\int \frac{\cos x}{1+\text{sen}x}dx$;

b) $\int \text{sen}^5 x dx$; e) $\int \frac{dx}{1+\text{sen}x+\cos x}$; h) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx$;

c) $\int \cos^4 x dx$; f) $\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x \cos^4 x}$; i) $\int \frac{dx}{1+2\cos x}$.

4.8: Calcula las integrales:

a) $\int \frac{5x+2}{4x^2+9}dx$; f) $\int \frac{dx}{x^2-x-2}$; l) $\int e^{ax}\cos(bx)dx$;

b) $\int \frac{\ln^2 x+1}{x}dx$; g) $\int e^{\frac{x-3}{5}}dx$; m) $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}dx$;

c) $\int \frac{\text{sen}(2x)}{2+\cos(2x)}dx$; h) $\int \frac{x^5-x^2}{1+x^6}dx$; n) $\int \frac{2x-3}{3x(x^2+1)}dx$;

d) $\int \text{sen}(\ln x)dx$; i) $\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}dx$; o) $\int \log^2 x dx$;

e) $\int \frac{\arctan(x/2)}{4+x^2}dx$; j) $\int (x^2+1)e^{2x}dx$; p) $\int \frac{6^{\log x+3}}{x}dx$.

k) $\int \log x dx$;

4.9: Dadas $\int_2^6 f(x)dx = 10$ y $\int_2^6 g(x)dx = -2$, halla:

a) $\int_2^6 (f(x)+g(x))dx$; b) $\int_2^6 2g(x)dx$; c) $\int_2^6 (3f(x)-4g(x))dx$.

4.10: Calcula $\int_0^4 x^2 dx$. Usa el resultado para calcular las integrales siguientes sin usar la regla de Barrow:

a) $\int_{-4}^0 x^2 dx$; b) $\int_0^4 -x^2 dx$; c) $\int_{-4}^4 x^2 dx$; d) $\int_{-4}^0 3x^2 dx$.

4.11: Emplea la simetría de las gráficas de las funciones como ayuda para el cálculo de las siguientes integrales:

a) $\int_{-2}^{2} x^2(x^2+1)dx$; b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \text{sen}^2 x \cos x dx$; c) $\int_{-2}^{2} x(x^2+1)^3 dx$;

4.12: Dada una función f integrable en $\mathbb{R}$ que satisface $\int_0^x f(t)dt = \frac{-1}{2} + x^2 + x\text{sen}(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$, calcula $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

4.13: Estudia los intervalos de monotonía de las funciones:

a) $f(x) = \frac{2x}{\ln x} - \int_e^x \frac{dt}{\ln t}$; b) $f(x) = \int_0^{x^2(2x-3)} \frac{dt}{1+t^4}$.

4.14: Resolver la ecuación $\int_0^x \frac{dt}{1+2\text{sen}^2 t} = \frac{\pi}{4\sqrt{3}}$.

4.15: Halla una función $f(x)$ que verifique: $f'(x) = (x-1)e^x$ y $f(x)$ tiene un extremo en el eje OX.

4.16: Halla el área del recinto entre la parábola $y = 6x - x^2 - 7$ y la recta $y = x - 3$.

4.17: Se considera la región del plano limitada por la curva $y = \sqrt{2}x^2$, la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ y el eje OX con $x > 0$. representa la región y calcula su área.

4.18: Halla el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4.19: Representa y halla el área de la figura limitada por las funciones $f(x) = 2\text{sen}x$ y $g(x) = \text{sen}(2x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4.20: Dibujar la región comprendida entre el eje OX y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, y calcular el área y el volumen del sólido que se genera al hacer girar en torno al eje OX dicha región.

4.21: Dadas las parábolas $x = y^2$ y $4 - x = (y-2)^2$, se pide:

a) área comprendida entre ambas parábolas;

b) volumen del cuerpo de revolución generado al rotar el área anterior alrededor del eje $y = 0$.

4.22: Encuentra el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\text{sen}x}$ y el eje OX con $0 \le x \le \pi$ alrededor del eje x.

4.23: Encuentra el volumen del sólido formado al rotar la región limitada por la recta $y = x$ y parábola $y = x^2$:

a) alrededor de la recta $y = 2$; b) alrededor de la recta $x = -1$.

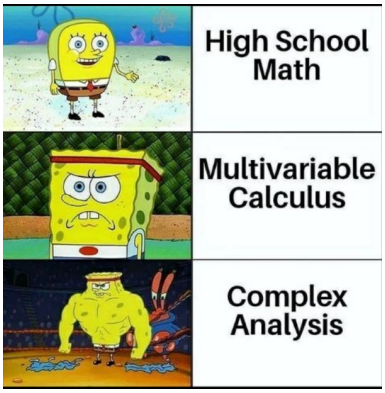
5 Funciones de dos o más variables

Definición 5.1

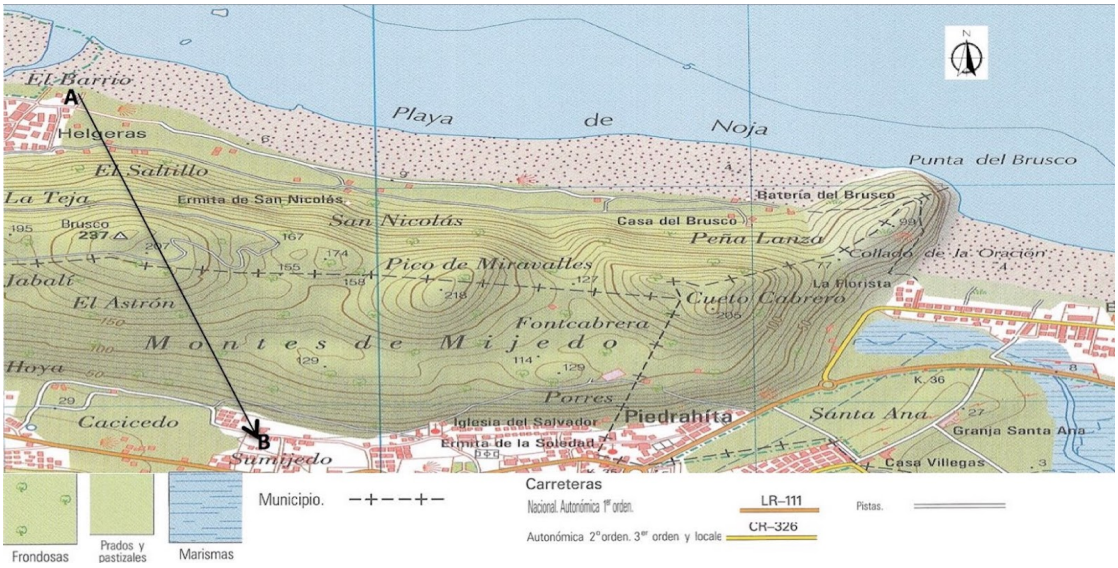
Una **función real de dos variables** es una correspondencia que asigna a cada pareja (x, y) de números reales otro número real único $f(x, y)$.
Se define el **dominio** D de la función $z = f(x, y)$ como el conjunto de pares reales en los que la función está definida.
El **rango** (imagen) es el conjunto de números reales dado por

$$\mathrm{Im} f = \{z \in \mathbb{R} : (x, y) \in D\} .$$

Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, la **curva de nivel** de valor k es un conjunto de todos los pares $(x, y) \in D$ tales que su imagen es el valor k.



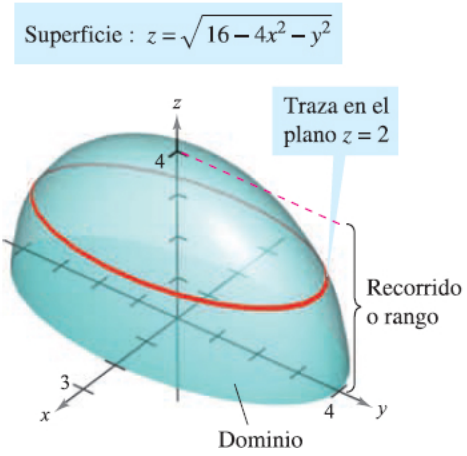
La idea de curva de nivel se emplea en el ámbito de la topografía con referencia a la línea que se forma por aquellos puntos del terreno que se sitúan a la misma altura:



Ejemplo

Halla el dominio, rango y la representación gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$. Representa su curva de nivel para $k = 2$.

Dominio:
$16 - 4x^2 - y^2 \geq 0 \iff \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} \leq 1$ es el área comprendida dentro de la elipse de centro $C(0,0)$ y semiejes $a = 2$ y $b = 4$.
Rango:
$\text{Im} f = [0,\ 4]$.
Curvas de nivel:
$\sqrt{16 - 4x^2 - y^2} = k \iff 4x^2 + y^2 = 16 - k^2$, $k \in \text{Im} f$.
Para $k = 2$: $4x^2 + y^2 = 12$ - es una elipse de centro $C(0,0)$ y semiejes $a = \sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{3}$.



5.1 Límites y continuidad

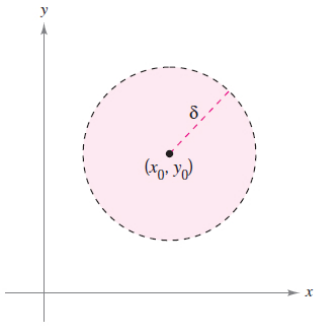
El estudio del límite de una función de dos variables inicia definiendo el análogo bidimensional de un intervalo en la recta real.

Definición: Entorno

El **entorno** se define como el disco con radio $\delta > 0$ centrado en (x_0, y_0):

$$\left\{(x,y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}.$$

Cuando esta fórmula contiene el signo $<$ al disco se le llama **abierto**, y cuando contiene el signo $\leq$, al disco se le llama **cerrado**.



Definición: Límite de una función de dos variables

Sea f una función ed dos variables definida en un disco abierto centrado en (x_0, y_0), y sea L un número real. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \text{ siempre que } 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta.$$

La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una sola variable, pero existe una diferencia importante: en el caso de una función de dos variables, la expresión $(x, y) \to (x_0, y_0)$ significa que el punto puede aproximarse al punto por **cualquier dirección**.

Cálculo de límites:

- **Límites iterados**:

  Si los límites iterados $\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$ y $\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$ existen y son distintos, entonces, el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.

- **Límites direccionales**:

  Si el valor de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no es lo mismo para todas las trayectorias, entonces no existe el límite. Si las trayectorias que utilizamos son las rectas que pasan por (x_0, y_0), al límite correspondiente le llamamos direccional.

- **Límites por coordenadas polares**:

  Utilizar las coordenadas polares ($x = r\cos\varphi$, $y = r\text{sen}\varphi$):

  El límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe si el límite correspondiente $\lim_{r\to r_0} f(r\cos\varphi, r\text{sen}\varphi)$ no depende de φ.

Ejemplo

Halla el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$:

1. Por límites iterados:

   $$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-0}{x^2+0}\right)=1$$

   $$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\left(\frac{0-y^2}{0+y^2}\right)=-1$$

   Como límites iterados existen y son distintos, entonces, el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ no existe.

2. Por límites direccionales:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\big[y=mx\big]=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

   Como el límite depende de la trayectoria, dicho límite no existe.

3. Por coordenadas polares:

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\begin{bmatrix} x=r\cos\varphi,\\ y=r\text{sen}\varphi\\ x^2+y^2=r^2,\\ x^2-y^2=-r^2\cos(2\varphi)\end{bmatrix}=\lim_{r\to 0}\frac{-r^2\cos(2\varphi)}{r^2}=-\cos(2\varphi).$$

   Como el límite depende de φ, entonces, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ no existe.

Definición: Continuidad

Una función $z=f(x,y)$ es **continua en un punto** (x_0,y_0) si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Si k es un número real y f y g son dos funciones continuas en (x_0,y_0), entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0,y_0):

1. Múltiplo escalar: kf;
2. Suma y diferencia: $f\pm g$;
3. Producto: fg;
4. Cociente; f/g, si $g(x_0,y_0)\neq 0$.

Ejemplo

1. $f(x,y) = \dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$ es discontinua en $(0,0)$;
2. $f(x,y) = \dfrac{2}{y-x^2}$ es discontinua en los puntos (α^2, α).

5.2 Derivación parcial

Definición: Derivadas Parciales

Si $z = f(x,y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respeto a x e y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}, \quad f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

siempre y cuando el límite existe.

La notación que se utiliza es

$$f_x(x,y) = f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).$$

Esta definición indica que si $z = f(x,y)$ entonces para hallar f_x se considera y constante y se deriva con respecto a x. De manera similar, para calcular f_y se considera x constante y se deriva con respecto a y.

Ejemplo

Halla las primeras derivadas parciales de la función $f(x,y) = xe^{x^2y}$.

Si se considera y como constante y se deriva con respecto a x se obtiene

$f_x(x,y) = e^{x^2y} + xe^{x^2y} \cdot (2xy) = e^{x^2y}\left(1 + 2x^2y\right)$

Si se considera x constante y se deriva con respecto a y obtenemos

$f_y(x,y) = xe^{x^2y} \cdot (x^2) = x^3e^{x^2y}$

Informalmente, los valores f_x y f_y en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ denotan las pendientes de la superficie en las direcciones de x y y, respectivamente.

Definición: Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden:

1. Derivar dos veces con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

2. Derivar dos veces con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

3. Derivar primero con respecto a x y luego con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

4. Derivar primero con respecto a y y luego con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

Los casos tercero y cuarto se llaman **derivadas parciales mixtas (cruzadas)**.

Teorema de Schwarz

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables. Si existen las primeras y segundas derivadas parciales, y además f_{xy} es continua en una región abierta D entonces se cumple que en dicha región se da la igualdad de las derivadas cruzadas de segundo orden:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D.$$

El teorema de Schwarz también se aplica a una función de tres o más variables siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas.

En funciones de dos variables $f(x, y)$, ni de la continuidad de esa función en un punto se deduce la existencia de las derivadas parciales, ni de la existencia de las derivadas parciales se deduce la continuidad en el punto.

Definición: Diferenciabilidad

Sea $z = f(x, y)$ una función definida y acotada en un dominio D al cua pertenece el punto (x_0, y_0) y que tiene derivadas parciales en dicho punto. Se dice que f es **diferenciable** en (x_0, y_0) si el incremento total

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

correspondiente a los incrementos arbitrarios de Δx y Δy se puede expresar como

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta x, \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

cumpliendo que $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon(\Delta x, \Delta y) = 0$.

A la parte lineal en Δx y Δy se le llama **diferencial** de $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) y se denota:

$$df = f_x dx + f_y dy.$$

Ejemplo

Halla la diferencial total de la función $f(x, y) = 2x\text{sen}(y) - 3x^2y^2$.

$df = f_x dx + f_y dy = (2\text{sen}y - 6xy^2)dx + (2x\cos y - 6x^2y)dy.$

Teorema Condiciones de diferenciabilidad

- **Condición necesaria:** Sl la función $f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en el punto (x_0, y_0).
- **Condición suficiente:** Si la función $f(x, y)$ y las dos derivadas parciales primeras son continuas en un entorno del punto (x_0, y_0) entonces la función f es diferenciable en dicho punto.

Ejemplo

Estudia la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de la siguiente función y, en su

caso, halla su diferencial en ese punto

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Continuidad:

   $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{bmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\text{sen}\varphi\end{bmatrix}=\lim\limits_{r\to0}\dfrac{r^2\cos\varphi\text{sen}\varphi}{r}=0=f(0,0)$, entonces la función $f(x,y)$ es continua en el punto $(0,0)$.

2. Diferenciabilidad (por la condición suficiente):

   $$f_x=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-x^2y(x^2+y^2)^{-1/2}}{x^2+y^2}=\frac{x^2y+y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)}=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\begin{bmatrix}x=r\cos\varphi\\ y=r\text{sen}\varphi\end{bmatrix}=\lim_{r\to0}\frac{r^3\text{sen}^3\varphi}{r^3}=\text{sen}^3\varphi.$$

   El límite depende de la dirección, entonces no existe. La función $f_x(x,y)$ no es continua en el punto $(0,0)$, entonces $f(x,y)$ no es diferenciable en dicho punto.

5.3 Derivadas de funciones compuestas e implicitas

Teorema : Regla de la cadena

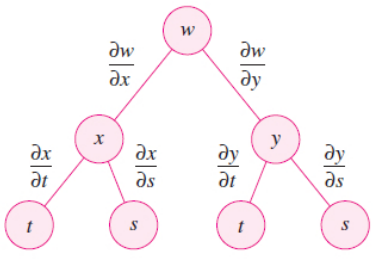
Sea $w=f(x,y)$ donde f es una función diferenciable de x e y.

1. Si $x=g(t)$, $y=h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t, entonces

   $$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. Si $x=g(s,t)$, $y=h(s,t)$, donde g y h son funciones diferenciables, entonces

   $$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$



Ejemplo

Sea $z = 2xy$, con $x = s^2 + t^2$ e $y = s/t$. Halla z_s, z_t.

$$z_s = z_x \cdot x_s + z_y \cdot y_s = \underbrace{2\frac{s}{t}}_{z_x=2y} \cdot \underbrace{(2s)}_{x_s} + \underbrace{2(s^2+t^2)}_{z_y=2x} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{y_s} = 6\frac{s^2}{t} + 2t.$$

$$z_t = z_x \cdot x_t + z_y \cdot y_t = \underbrace{2\frac{s}{t}}_{z_x=2y} \cdot \underbrace{(2t)}_{x_t} + \underbrace{2(s^2+t^2)}_{z_y=2x} \cdot \underbrace{\left(-\frac{s}{t^2}\right)}_{y_t} = 2s - \frac{2s^3}{t^2}.$$

Sea $F(x, y) = 0$ con y definida implicitamente en función de x. Halla $\dfrac{dy}{dx}$.

Se considera la función $z = F(x, y(x))$, se puede aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dx} = F_x \frac{dx}{dx} + F_y \frac{dy}{dx}.$$

Como $z = F(x, y) = 0$, se sabe que $dz/dx = 0$ y se tiene

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

Si $F_y \neq 0$, se puede concluir que $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$.

Teorema : Derivación implicita

- Si la ecuación $F(x, y)$ define a y implicitamente como función derivable de x, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0.$$

- Si la ecuación $F(x, y, z)$ define a z implicitamente como función diferenciable de x e y, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

Ejemplo

Halla las primeras derivadas parciales de z por derivación implicita de la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Definimos $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Las derivadas parciales se escriben

$F_x = 2x$, $F_y = 2y$, $F_z = 2z$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z))} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}.$$

5.4 Derivadas direccionales y gradiente

Definición: Derivada direccional

Si $f(x, y)$ es una función diferenciable en (x_0, y_0) entonces la **derivada direccional** de f en la dirección del vector unitario $\bar{u} = (\cos\varphi, \text{sen}\varphi)$ es

$$D_u f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\varphi + f_y(x_0, y_0)\text{sen}\varphi$$

Observa que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección del vector unitario $\bar{u}$.

Ejemplo

Halla la derivada direccional de $f(x, y) = x^2\text{sen}(2y)$ en $(1, \pi/2)$ en la dirección $\bar{v} = (3, -4)$.

Como f_x y f_y son continuas, f es diferenciable.

Calculamos un vector unitario en la dirección $\bar{v}$:

$$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{||v||} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Usando este vector unitario, se tiene

$D_u f(x, y) = (2x\text{sen}(2y))(cos\varphi) + (2x^2\cos(2y))(\text{sen}\varphi)$

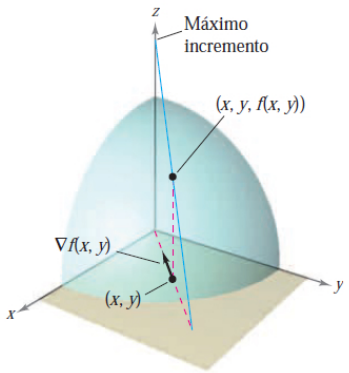
$$D_u f(1, \frac{\pi}{2}) = (2\text{sen}\pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2\cos\pi)\left(-\frac{4}{5}\right) = 0\left(\frac{3}{5}\right) - 2\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}.$$

Definición: Gradiente

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables, se define el **gradiente** de f en el punto (x_0, y_0) como el vector (en el plano xy):

$$\nabla f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}.$$

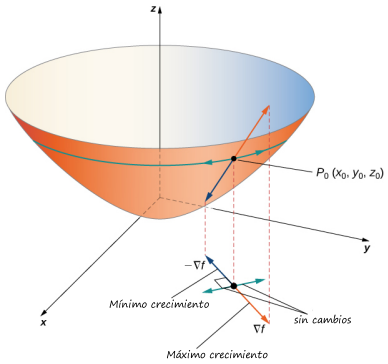
∇f se lee como "nabla f". Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$.
Observa que la derivada direccional de $f(x, y)$ en la dirección del vector unitario $\bar{u}$ se puede escribir como $D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \bar{u}$.



Teorema Propiedades del gradiente

Sea f una función diferenciable en el punto (x_0, y_0).
Se cumplen las siguientes propiedades:

- Si el gradiente de f en (x_0, y_0), es el vector nulo entonces la derivada direccional de f en cualquier dirección es cero.
- La dirección de máximo crecimiento de f viene dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de la derivada direccional es $||\nabla f(x, y)||$. (Una vez que se abandona ese punto, la dirección de máximo incremento puede cambiar).
- La dirección de mínimo crecimiento de f viene dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor máximo de la derivada direccional es $-||\nabla f(x, y)||$.
- El vector gradiente es normal a las curvas de nivel.



Ejemplo

Dada la superficie $F(x, y) = 4x^2 - y$. Halla $\nabla f(x, y)$ en el punto $P(2, 10)$.

$F_x(x, y) = 8x$, $F_y(x, y) = -1$. El gradiente de f en el punto P es $\nabla f(2, 10) = (16, -1)$.

5.5 Aplicaciones de las derivadas parciales

Definición: Plano tangente y recta normal

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **plano tangente** a S en P:

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **recta normal** a S en P:

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Ejemplo

Halla una ecuación del plano tangente y de la recta normal al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $P(1, -1, 4)$.
Considerando $F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$, se tiene
$F_x(x, y, z) = -4x$
$F_y(x, y, z) = -4y$,
$F_z(x, y, z) = 2z$.
En el punto $P(1, -1, 4)$

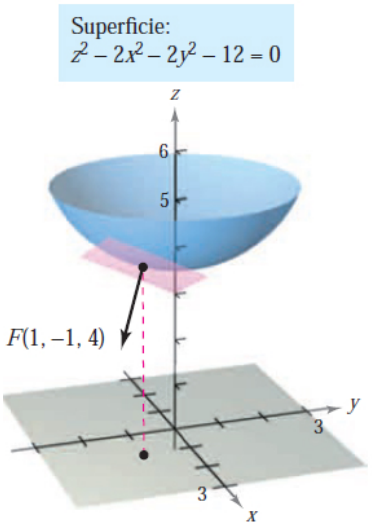
$$\nabla F(1, -1, 4) = (-4, 4, 8)$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en P es
$-4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) = 0$

$$x - y - 2z + 6 = 0$$

La recta normal viene dada por

$$\frac{x - 1}{-4} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 4}{8}$$



Definición: Extremos absolutos

Considérese la función continua $f(x, y)$ de dos variables, definida en una región acotada cerrada (que contiene todos sus puntos frontera) R. Los valores $f(a, b)$ y $f(c, d)$ tales que

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d)$$

para todo (x, y) en R se conocen como el **mínimo** y **máximo** de f en la región R.

Teorema de valor extremo

Sea f una función continua de dos variables x e y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy.

1. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en R, en el que f toma un valor máximo.

A un mínimo también se le llama un **mínimo absoluto** y a un máximo también se le llama un **máximo absoluto**. Como en el cálculo de una variable, se hace una distinción entre extremos absolutos y extremos relativos.

Definición: Extremos relativos

Sea f una función definida en una región R que contiene (x_0, y_0).

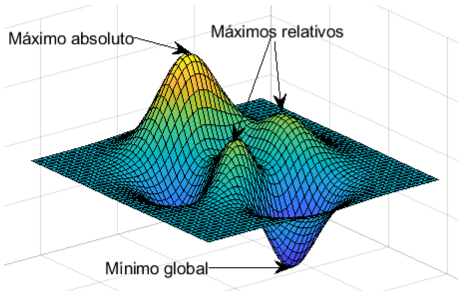
1. La función tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

   $$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

   para todo (x, y) en un disco abierto que contiene (x_0, y_0).
2. La función tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

   $$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

   para todo (x, y) en un disco abierto que contiene (x_0, y_0).



Para localizar los extremos relativos de f, se pueden investigar los puntos en los que el gradiente

de f es 0 o los puntos en los cuales una de las derivadas parciales no existan. Tales puntos se llaman **puntos críticos** de f.

Teorema : Cálculo de extremos relativos

Sea $f(x, y)$ una función. Para buscar los extremos relativos de f:

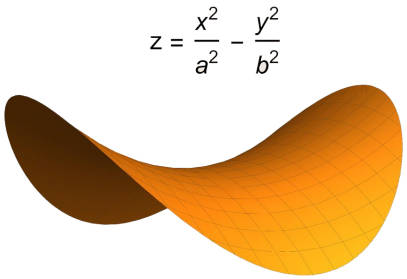
1. Calcular de los puntos críticos como solución del sistema

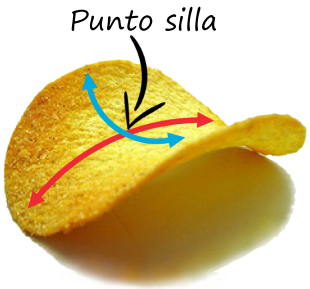
$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0, \\ f_y(x, y) = 0. \end{cases}$$

2. En cada punto crítico (a, b) hallar el hessiano

$$|H| = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

3. Estudiar el determinante de la matriz hessiana $|H|$:
   - Si $|H| > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces (a, b) es punto de mínimo relativo;
   - Si $|H| > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces (a, b) es punto de máximo relativo;
   - Si $|H| < 0$, entonces (a, b) es punto silla;
   - Si $|H| = 0$, el criterio no lleva a ninguna conclusión.





Pringles es un ejemplo de paraboloide hiperbólico

Con el criterio de las segundas derivadas parciales pueden no hallarse los extremos relativos por dos razones:

1. Si alguna de las primeras derivadas parciales no existe, no se puede aplicar el criterio.
2. Si el determinante de la matriz hessiana $|H| = 0$ el criterio no es concluyente.

En tales casos, se pueden tratar de hallar los extremos mediante la gráfica o mediante algún otro método.

Ejemplo

Identifica los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy2y^2 + 1$.

1. Puntos críticos: Las primeras derivadas parciales existen para todo (x, y), entonces los puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0:

   $$\begin{cases} f_x = -3x^2 + 4y = 0, \\ f_y = 4x - 4y = 0. \end{cases}$$

   Los puntos críticos son $P_1(0, 0)$ y $P_2(4/3, 4/3)$.

2. Hessiano:

   $$|H| = \begin{vmatrix} -6x & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 25x - 16.$$

   En el punto $P_1(0, 0)$ $|H| = 0 - 16- < 0$, entonces P_1 es un punto silla.

   En el punto $P_2(4/3, 4/3)$ $|H| = -8(-4)-16 = 16 > 0$, y como $f_{xx}(4/3, 4/3) = -8 < 0$, se concluye que f tiene un máximo relativo en el punto P_2.

Ejemplo

Identifica los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

1. Puntos críticos: Las primeras derivadas parciales existen para todo (x, y), entonces los puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0:

   $$\begin{cases} f_x = -2xy^2 = 0, \\ f_y = 2x^2y = 0. \end{cases}$$

   Se sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto del eje x o del eje y es un punto crítico.

2. Hessiano:

   $$|H| = \begin{vmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{vmatrix} = 4x^2y^2 - 16x^2y^2 = -12x^2y^2.$$

   En los puntos críticos $|H| = 0$. Por tanto, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, no funciona. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto en los ejes x o y, y $f(x, y) > 0$ en todos los otros puntos, se puede concluir que cada uno de estos puntos críticos son un mínimo absoluto.

5.6 Ejercicios propuestos

5.1: Representa gráficamente el dominio de las funciones siguientes:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$;

b) $f(x,y) = \ln(x^2+\sqrt{x^2+y^2})$;

c) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\dfrac{x}{x+y}$;

d) $f(x,y) = 1+\sqrt{-(x-y)^2}$;

e) $f(x,y) = x + \arccos y$;

f) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$

g) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+\sqrt{xy}$;

h) $f(x,y) = \dfrac{\log y}{2x^2-1}$;

i) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$.

5.2: Representa las curvas de nivel de las funciones

a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

b) $f(x,y) = x^2+4y^2+1$;

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$;

d) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$

e) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}}$.

5.3: La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x,y) de una placa circular de acero de 10 metros de radio es

$$T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2,$$

donde x e y se miden en metros. Dibujar algunas de las curvas isotermas.

5.4: El potencial eléctrico V en cualquier punto (x,y) es

$$V(x,y) = \frac{5}{\sqrt{25+x^2+y^2}}.$$

Dibujar las curvas equipotenciales de $V = 1/2$, $V = 1/3$ y $V = 1/4$.

5.5: Halla $f(x,y)$, si

a) $f(x+y, x-y) = y(x+y)$;

b) $f(xy, y/x) = x^2-y^2$.

5.6: Halla los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$;

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2$;

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y}$;

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x^2+y^2)$;

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\ln\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

5.7: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = e^{xy}$;

b) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$;

c) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2-2xy+y^2}$;

d) $f(x,y) = 1 - \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = \cos\sqrt[3]{|xy|-1}$;

f) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

5.8: Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

b) $f(x,y,z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{e^x+e^y}$;

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x^2-y^2}, & x^2 \neq y^2, \\ 1, & x^2 = y^2. \end{cases}$

5.9: Analiza la continuidad de la función compuesta $f \circ g$, si

a) $f(t) = t^2$, $g(x,y) = 2x - 3y$;

b) $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $g(x,y) = x^2+y^2$.

5.10: Halla las derivadas parciales del primer orden:

a) $f(x,y) = e^x \tan y$;

b) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$;

c) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$;

d) $f(x,y) = e^{x^2} + \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

e) $f(x,y) = x + y^2 + \ln(x+y^2)$;

f) $f(x,y) = \ln\tan\dfrac{x}{y}$.

5.11: Halla f_x y f_y en el punto $P(2,1)$, si $f = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$.

5.12: Halla f_x, f_y y f_z de la función $f(x,y,z) = \ln(xy+z)$ en el punto $P(1,2,0)$.

5.13: Muestra que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$, si $z = \ln(x^2+xy+y^2)$.

5.14: Muestra que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 1$, si $u = x + \dfrac{x-y}{y-z}$.

5.15: Muestra que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxz} = f_{zzx}$ para la función dada por $f(x, y, z) = ye^x + x \ln z$.

5.16: Halla $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, si $z = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$.

5.17: Estudia la continuidad y la diferenciabilidad en el origen de las siguientes funciones, y, en su caso, halla su diferencial en ese punto:

a) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0); \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3 - x^3 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

5.18: Halla $\dfrac{du}{dt}$, si

a) $u = x^2 + y^2$, $x = 2t$, $y = 3t$;

b) $u = \ln \dfrac{y}{x}$, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$;

c) $u = y^x$, $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$;

d) $u = \arctan \dfrac{x}{y}$, $x = R \cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$;

e) $u = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = R \cos t$, $y = R \operatorname{sen} t$, $z = H$;

f) $u = x^y$, $x = t$, $y = \varphi(t)$.

5.19: Halla f_x y f_y para una función $f(u, v)$, si

a) $u = xy$, $v = x/y$;

b) $u = x^2 - y^2$, $v = e^{xy}$.

5.20: Halla $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial t}$, si

a) $z = x^2 + y^2$ con $x = s + t$ e $y = s - t$;

b) $z = x^2 - y^2$ con $x = e^s$ e $y = e^t$;

c) $z = \arctan \dfrac{x}{y}$, con $x = s \operatorname{sen} t$ e $y = s \cos t$.

5.21: Halla $\dfrac{\partial w}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial t}$, si

a) $w = xyz$ con $x = s + t$, $y = s - t$ y $z = st^2$;

b) $w = ze^{xy}$ con $x = s - t$, $y = s + t$ y $z = st$;

c) $w = ze^{xy}$ con $x = s^2$, $y = t^2$ y $z = t$;

d) $w = x^2 e^{2y} \cos(3z)$ con $x = \cos t$, $y = \ln(t + 2)$, $z = s$.

5.22: Sea $z = f(x, y)$ y tomamos u y v como nuevas variables con $x = u$ y $y = uv$

a) Halla las derivadas parciales $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$;

b) Utiliza el apartado (a) para hallar la expresión de la ecuación

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

en las variables u y v.

5.23: Sea $u = x^4y + y^2z^3 + \varphi(x/y)$ donde $x = 1 + rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$, $z = r^2\text{ssen}t$. Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ cuando $r = 2$, $s = 1$, $t = 0$ sabiendo que $\varphi'(3/2) = -1$.

5.24: Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en las superficies definidas de forma implícita:

a) $xy^2 + z^3 + \text{sen}(xyz) = 0$;

b) $xy - x + 2z + e^{2z} - 2 = 0$;

c) $3x^2z - x^2y^2 + z^3 = 0$;

d) $e^{xz} + xy = 0$.

5.25: Halla la derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto P en la dirección $\bar{u}$:

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$, $P(-3/4, 0)$, $\bar{u} = (3/4, 1)$;

b) $f(x, y) = xy$, $P(0, -2)$, $\bar{u} = (-1, 0)$;

c) $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$, $P(1, 0)$, $\bar{u}$ - dirección que forma con el eje Ox un ángulo de 120°;

d) $f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $P(1, 1)$, $\bar{u}$ - dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

5.26: Halla el gradiente de la función f en el punto P:

a) $f(x, y) = 4x^2 - y$, $P(2, 10)$;

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, $P(5, 3)$;

c) $f(x, y) = yx^y$, $P(2, 1)$;

d) $f(x, y, z) = xyz$, $P(1, 2, 3)$;

e) $f(x, y, z) = \arctan(xy/z^2)$, $P(0, 1, 2)$;

f) $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $P(1, 2, 1)$;

5.27: Halla el gradiente y la derivada direccional de la función $f(x, y) = x \arctan\dfrac{x}{y}$ en el punto $(1; 1)$ con la dirección $(1; 1)$.

5.28: Resuelve la ecuación $\nabla f = \mathbf{0}$, si

a) $f = 2z^3 + x^2 + 2y^2 + xy + 3x - 2y - 6z + 1$;

b) $f = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

5.29: Halla el plano tangente al paraboloide $z = 10 - x^2 - 2y^2$ en el punto $P(1, 2, 1)$.

5.30: Halla la recta normal a la superficie dada por $xyz = 12$ en el punto $P(2, 2, 3)$.

5.31: Halla los puntos de la superficie donde el plano tangente es horizontal:

a) $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$; b) $z = 5xy$.

5.32: Sea $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Halla el plano tangente a la superficie $z^2 - f(x, y) = 8$ con $(x, y) = (1, 1)$.

5.33: La superficie S de ecuación $e^{xz} + xy - yz - 1 = 0$ define a z como función implícita de x e y. Dado el punto $P(0, 1, 0)$. Se pide:

a) El gradiente de z en el punto P;

b) La derivada direccional de z en P en la dirección $\alpha = \pi/3$;

c) El plano tangente a z en P.

5.34: Una función $z = f(x, y)$ diferenciable tiene en el punto $P(1, 2, -2)$ el plano tangente de ecuación $2x + 3y + 4z = 0$. A partir de estos datos, calcula la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en la dirección del vector $\overrightarrow{u}(1, 1)$.

5.35: Sea la función $z = f(x, y) = 2xy + x^3$. Halla el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie z cuyo plano tangente es paralelo al plano $z = x + y$.

5.36: Sea la superficie $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $x^2 + y^2 - e^z + 1 = 0$.

a) Halla los planos tangentes a la superficie en el punto P de corte con la recta $x = y = 2$;

b) Halla ∇f y la diferencial dz en el punto P;

c) Comprueba que la función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo en $(0, 0)$.

5.37: Halla y clasifica todos los puntos críticos de las funciones:

a) $f(x, y) = x^3 - 6xy + 3y^2 - 1$;

b) $f(x, y) = -xye^{-(x^2+y^2)/2}$;

c) $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$;

d) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$;

e) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 2x$;

f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$;

g) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$;

h) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

5.38: Determina los extremos relativos de $z = f(x, y)$ en función del valor del parámetro k:

a) $z = f(x, y) = x^4 - 2kx^2 - y^2 + 3$;

b) $z = f(x, y) = x^2 + kxy + y^2$;

c) $z = f(x, y) = x^2 + 4xy + ky^2$.

6 Soluciones

Conjunto de números

1.1: a) $(-1, 1)$;

b) $\left(\dfrac{a-8b}{3}, \dfrac{a+8b}{3}\right)$;

c) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$;

d) $(-\infty, 7/3) \cup (5, \infty)$;

e) $(-\infty, -5) \cup (-7/2, -2) \cup (-2, \infty)$

f) $(-\infty, -4] \cup [-2/3, 4/3)$.

1.2: $|z^2 + 1| \leq |z^2| + |1| = 4 + 1 = 5$,

$|z^2 + 8| \geq 8 - |z^2| = 8 - 4 = 4$,

$|z^2 + 1| \geq |z^2| - |1| = 4 - 1 = 3$,

$|z^2 + 8| \leq 8 + |z^2| = 8 + 4 = 12$,

1.3: a) $(2+3)^3 = 8 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 = 2 + 11i$;

b) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)} = \dfrac{3+i}{3-i} = \dfrac{8+6i}{9+1} = 0.8 + 0.6i$;

c) $\sqrt[4]{8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i} = \sqrt[4]{16\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)} =$

$2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{2}\right) + i\text{sen}\left(-\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{\pi k}{2}\right)\right], \quad k = 0, ..., 3.$, o bien $2e^{-i\pi/16}$ (VP);

d) $\log(1+i) = \log(\sqrt{2}e^{i\pi/4}) = \log\sqrt{2} + i\pi/4$ (VP);

e) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, luego

$\dfrac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^4} = \dfrac{2^6 e^{2\pi i}}{(\sqrt{2})^4 e^{-i\pi}} = -16$;

f) $i + (-1) + (-i) + 1 = 0$;

g) $i + (-i) = 0$;

h) $8e^{-i\pi/4} = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$;

i) $2^7 e^{3i\pi/2} = -2^7 i$

1.4:

a) recta $y = -x$;

b) anillo con el centro en $(0, -2)$ entre radios 1 y 2;

c) semiplano $y > 0$;

d) círculo con el radio $R = 2$ y el centro en $z = 1 - 2i$;

e) circunferencia con el centro en el origen y el radio 3;

f) circunferencia con el centro en $(3, 0)$ y el radio 3.

1.5: a) $z = 0, z = \pm 3i$;

b) $z = -1 + \sqrt{2}, z = 1 - \sqrt{2}, z = \pm i$;

c) $z = bi,\ b \in \mathbb{R}$;

1.6: a) $z = 7/6 + 5/6i$;

b) no tiene soluciones.

1.7: a) $(-\sqrt{3}, 1) = 2_{5\pi/6}$;

b) $\dfrac{1-i}{1+i} = -i = (0, -1) = 1_{-\pi/2}$;

c) $(2-3i)^{-1} = \left(\dfrac{2}{13}, \dfrac{3}{13}\right) = 13^{-1/2}_{\arctan 3/2}$;

d) $\dfrac{1}{8+8i} = (1/16, 1/16) = 2^{-7/2}_{-\pi/4}$;

e) $(1, 0) = 1_0$;

f) $(-\sqrt{3}/2, 1/2) = 1_{5\pi/6}$.

1.8: Por un lado, $\sqrt{1+i} = 2^{1/4} e^{i\pi/8}$. Por otro lado, $\sqrt{1+i} = A + Bi$, $A = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$, $B = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Entonces, $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{B}{A} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{2} - 1$.

1.9: $\cos(2x) + i\text{sen}(2x) = (\cos x + i\text{sen}x)^2 = \cos^2 x - \text{sen}^2 x + 2i \cos x \text{sen}x$

Igualando partes reales y partes imaginarias entre sí obtenemos que

$\cos(2x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$ y $\text{sen}(2x) = 2\cos x \text{sen}x$.

1.10: Por un lado: $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 = (2\cos\theta)^3 = 8\cos^3\theta$.

Por otro lado: $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^3 = e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta} = 2\cos 3\theta + 6\cos\theta$.

1.11: a) $\bar{z} + \bar{w} = (a + c) - (b + d)i = \overline{z + w}$;

b) $z + \bar{z} = (a + a) + (b - b)i = 2a \in \mathbb{R}$;

c) $\overline{zw} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = \bar{z} \cdot \bar{w}$.

1.12: a) $z_k = e^{i(2k+1)\pi/5}$, $k = 0, \ldots, 4$;

b) $z_k = 2e^{i2(3k+1)\pi/9}$, $k = 0, 1, 2$;

c) $z_k = \sqrt[4]{2}e^{i(3k+2)\pi/6}$, $k = 0, \ldots, 3$.

1.13: $z = -1 - i$.

1.14: $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$, $e^{iz} = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$, $|e^{iz}| = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

1.15: $(1 + i\sqrt{3})^n - (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1}i\text{sen}(n\pi/3) = 0$, si $\text{sen}(n\pi/3) = 0$. Luego $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.16: $x^2 - \sqrt{3}x + 3 = 0$.

1.17: $15 - 15i$.

1.18: $z = \dfrac{2 + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{1 - i} = \dfrac{3 + i}{1 - i} = 1 + 2i$.

1.19: $z = 5/4 + 3i$.

1.20: $x^2 - 4x + 20 = 0$.

Funciones reales de una variable real

2.1: a) $\mathbb{R}$;

b) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$;

c) $\left\{x \in \mathbb{R}^+ | x \neq 1\right\}$;

d) $(0, 1) \cup (1, \infty)$;

e) $\mathbb{R} - \{n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

2.2: a) dominio: $\mathbb{R} - \{\pi/6 + 2\pi k, 5\pi/6 + 2\pi k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, imagen: $(-\infty, -2/3] \cup [2, \infty)$;

b) dominio: $\mathbb{R} - \{2 + 4k\}$, $k \in \mathbb{Z}$, imagen: $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$;

c) dominio: $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$, imagen: $(0, \infty)$;

d) dominio: $\mathbb{R}$, imagen: $(-\infty, 0) \cup [1, \infty]$;

e) dominio: $[-4, \infty)$, imagen: $[0, \infty)$;

2.3: $f^{-1}(26) = \{-5, 5\}$.

2.4:

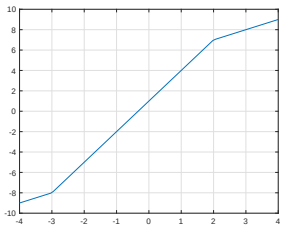


Figure 6.1: (a)

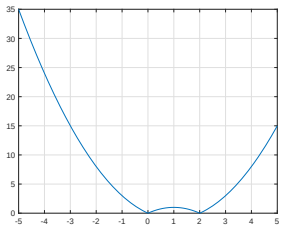


Figure 6.2: (b)

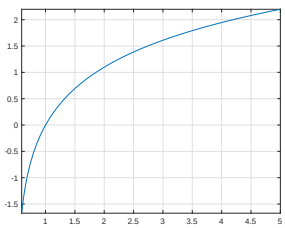


Figure 6.3: (c)

2.5: a) dominio: $\mathbb{R}$, imagen: $[-1; 1]$; sim: $\cos((-x)^2) = \cos(x^2)$;

b) dominio: $\mathbb{R}$, imagen: $[0;1]$; sim: $\cos^2(-x) = \cos^2(x)$;

c) dominio: $\mathbb{R}$, imagen: $[0;1]$; sim: $\cos^2((-x)^2) = \cos^2(x^2)$;

d) dominio: $[0;\infty)$, imagen: $[0;\infty)$; no hay simetrías por el dominio.

2.6: $f(g(x)) = e^{2\log\sqrt{x}} = e^{\log x} = x$, $g(f(x)) = \log\sqrt{e^{2x}} = \log e^x = x$.

2.7: $f(f(x)) = \left[a - \left((a - x^n)^{1/n}\right)^n\right]^{1/n} = [a - a + x^n]^{1/n} = x$.

2.8: a) por equivalencias: 1; d) $1/3$; g) 3;

b) por equivalencias: 1; e) $-\frac{1}{2}$; h) -4;

c) por equivalencias: $1/8$; f) 1; i) e^{-1}.

2.9: a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{\operatorname{sen}^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)}{x^3} \cdot \frac{x^3}{\operatorname{sen}^3 x} = 1 \cdot 1 = 1$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - x^2 - 1 - x^2}{2x^2\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2}$;

c) $\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+5x+8}}{4x+5} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{4t^2-5t+8}}{-4t+5} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{4-5t^{-1}+8t^{-2}}}{-4+5t^{-1}} = -\frac{1}{2}$;

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x}$ no existe;

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{2(x - \operatorname{sen} x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x-\operatorname{sen} x} - 1)}{2(x - \operatorname{sen} x)} \cdot \frac{e^{\operatorname{sen} x}}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2.10: a) $a = 1/3$; c) $a = -1$;

b) no existe, e; d) $a = 3/2$

2.11: a) continua en $\mathbb{R}$;

b) continua en $\mathbb{R}$;

c) continua en $[-1/2, \infty]$;

d) discontinuidad no evitable en $x = 1$, discontinuidad evitable en $x = 0$;

e) discontinuidad no evitable en $x = -6$, discontinuidad evitable en $x = 6$;

f) discontinua en $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.12: $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = k$, de donde $k = 1/2$.

2.13: Es discontinua en cada punto entero.

2.14: Por el teorema de Darboux.

2.15: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ - continua en $[a, b]$. $V(5) = 523.6$, $V(8) = 2144.7$ Por el teorema de Darboux, si $V(5) < 1500 < V(8)$), entonces $\exists c \in (5, 8) : V(c) = 1500$.

2.16: a) Para la continuidad: $f(-1^+) = f(-1)$ y $f(1^-) = f(1)$, es decir, $a - b = -1$.

Para la derivabilidad: $f'(-1^+) = f'(-1)$ y $f'(1^-) = f'(1)$: $2a = 1$, de donde $a = 1/2$, $b = 3/2$.

b) Para la continuidad: $f(c) = f(c^+)$: $c^2 = ac + b$.

Para la derivabilidad: $f'(c) = f'(c^+)$: $2c = a$, de donde $a = 2c$, $b = -c^2$.

2.17: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y es derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

2.18: $y' = \frac{4}{(x+4)^2}$, $1 - y = \frac{4}{x+4}$. Luego, $xy' = \frac{4x}{(x+4)^2} = y(1-y)$.

2.19: a) $\ln y = \operatorname{sen}x \ln x$, $y'/y = \cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}$, $y' = x^{\operatorname{sen}x}\left(\cos x \ln x + \frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)$;

b) $\ln y = (\ln x) \cdot (\ln x)$, $y' = x^{\ln x}\left(2\frac{\ln x}{x}\right)$;

c) $\ln y = x^{-1} \ln x$, $y' = \sqrt[x]{x}\left(-x^{-2} \ln x + x^{-1}x{-}1\right) = x^{1/x-2}(1 - \ln x)$.

2.20: a) $y' = \frac{1}{5}(3x^2)^{-4/5} \cdot (6x) = \frac{6}{5\sqrt[5]{81x^3}}$;

b) $\ln y = (3x - 4)\ln 5$, luego $\frac{1}{y}y' = 3 \ln 5$, $y' = 3 \ln 5 \cdot 5^{3x-4}$;

c) $y' = \frac{2x+7}{x^2+7x}$;

d) $y' = \frac{x^3-1}{2x^2} \cdot \frac{4x(x^3-1) - 3x^2 \cdot 2x^2}{(x^3-1)^2} = \frac{-\cancel{2x}(\cancel{x^3-1})(x^3+2)}{\cancel{2x}x(x^3-1)^{\cancel{2}}} = \frac{-(x^3+2)}{x(x^3-1)}$;

e) $y' = \frac{2\operatorname{sen}x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{2\cos x}{\operatorname{sen}x} = 2\cot x$;

f) (derivación logarítmica): $\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln(1 + \operatorname{sen}2x) - \ln(1 - \operatorname{sen}2x)\right)$, $y' = \frac{4}{3\cos(2x)}\sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{sen}(2x)}{1-\operatorname{sen}(2x)}}$;

g) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)$;

h) $y' = -1 \ln(\sqrt{x} + 2x) \cdot \frac{1/2x^{-1/2} + 2}{\sqrt{x} + 2x}$;

i) $y' = -6x\operatorname{sen}(3x^2) + \frac{7}{\cos^2(7x)}$.

2.21: a) $\dfrac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$;

b) $\dfrac{\cos x + x \ln x \operatorname{sen} x}{x \cos^2 x}$;

c) $6x^5 + 6^x \ln 6$;

d) e;

e) $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + x^{p-1}(p \cos x - x \operatorname{sen} x)$;

f) $-4\operatorname{cosec}(2x) \cot 2x = \sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x$;

g) $\dfrac{x^6}{\ln a}(6 \ln x + 1)$;

h) $(2 + \cos x)^x \left(\ln(2 + \cos x) - \dfrac{x \operatorname{sen} x}{2 + \cos x}\right)$;

i) $x^{2^x} 2^x (\ln x \ln 2 + 1/x)$

2.22: a) $\dfrac{e^{x+y} - 3^x \ln 3}{3^y \ln 3 - e^{x+y}}$; b) $\dfrac{\cos x}{2y - 1}$;

2.23: $y' = \dfrac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$, $y'(0) = 0$; $y'' = \dfrac{-2y - 4xy' - 6y(y')^2}{x^2 + 3y^2}$, $y''(0) = -2/3$.

2.24: $y' = 3x^2 - 4 = 8$, de donde $x = \pm 2$, entonces, los puntos son $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

2.25: $y' = \dfrac{-8x}{2\sqrt{36 - 4x^2}} = -1$, de donde $x = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

2.26: $P(2, 1)$. Rectas tangentes: a $f(x)$: $y - 1 = -1/2(x - 2)$; a $g(x)$: $y - 1 = 2(x - 2)$, son perpendiculares.

2.27: (derivación logarítmica) $y - 1 = 3(x - 1)$.

2.28: $y - \sqrt{3}/2 = -\sqrt{3}/3(x - 1/2)$, $y + \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/3(x - 1/2)$.

2.29: $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 4)$.

2.30: Puntos de corte: $P_1(1, 2)$ y $P_2(3, -2)$.

En P_1 las rectas tangentes son: $y - 2 = 1/2(x - 1)$ y $y - 2 = -1/3(x - 1)$. Luego $\tan \alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \dfrac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1$, de donde $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

En P_2 las rectas tangentes son: $y + 2 = 1/2(x - 3)$ y $y + 2 = 3(x - 3)$. Luego $\tan \alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = \dfrac{3 - 1/2}{1 + 3/2} = 1$, de donde $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

2.31: Crece en $(0,\ 3/2) \cup (3, \infty)$.

2.32: $A(x) = (r+x)\sqrt{r^2-x^2}$, $A'(x) = \dfrac{r^2-2x^2-rx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 0$, de donde $x = r/2$ (máximo).

2.33: Pendiente de la RT: $f'(x) = -3x^2 + 12x - 7 \to$ max. $f''(x) = -6x + 12$, de donde $x = 2$ (máximo). RT en $x = 2$: $y = 5x - 3$.

2.34: $L(x) = \sqrt{8^2+x^2} + \sqrt{6^2+(10-x)^2}$. Puntos críticos: $x = 40$ (no es valido) y $x = 40/7$. $L_{\max} = 17.2047$.

2.35: $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$, $A(r) = 2\pi r^2 + 2hr(r+h) = 2\pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$. $A' = 4\pi r - \dfrac{2V}{r^2} = 0$ en $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, luego $h = \sqrt[3]{\dfrac{4V}{\pi}}$.

2.36: $\theta = \arccos\sqrt{3}$.

2.37:

a) cambio de variable $t = 1/x$, 1;

b) ∞;

c) L'H (2 veces): 0;

d) (logarítmo) $e^0 = 1$;

e) (logarítmo) $e^1 = e$;

f) (logarítmo) $e^0 = 1$;

g) $-3/2$;

h) $[1/0] = \infty$;

i) (Infinitésimos equivalentes): $1/2$;

j) L'H 0;

k) $[-1/0] = -\infty$.

2.38:

a) $\operatorname{sen}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$;

b) $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!}$;

c) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!}$;

d) $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$;

e) $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4}$;

f) $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3$.

2.39:

a) $\ln(1+x^2) = x^2 - \dfrac{x^4}{2} + \dfrac{x^6}{3} - \dfrac{x^8}{4} + \ldots$;

b) $\operatorname{sen}(2x) + 2\cos(x) = \left(2x - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} + \ldots\right) + 2\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots\right) = 2 + 2x - 2\dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{(2x)^3}{3!} + 2\dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} + \ldots$;

c) $\ln\left[(3-x)(2-x)\right] = \ln\left[6(1 - 5/6x + x^2/6)\right] = \ln 6 + \ln\left(1 + (-5x/6 + x^2/6)\right) = \ln 6 - 5x/6 - 13x^2/72 - 35x^3/648 + \ldots$;

d) $e^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^6}{6} + \ldots$;

e) $\dfrac{2x+3}{x-1} = -(2x+3)\cdot\dfrac{1}{1-x} = -(2x+3)\left(1+x+x^2+x^3+\ldots\right) = -3-5x-5x^2-5x^3-\ldots$;

f) $(x+5)e^{2x} = (x+5)\left(1+2x+\dfrac{(2x)^2}{2!}+\dfrac{(2x)^3}{3!}+\ldots\right) = 5+11x+12x^2+26x^3/3+14x^4/3+2x^5+\ldots$;

g) $\ln\dfrac{3+x}{2-x} = \ln\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1+x/3}{1-x/2}\right) = \ln(3/2)+\ln(1+x/3)-\ln(1-x/2) = \ln(3/2)+5x/6+5x^2/72+35x^3/648+\ldots$.

2.40: $\ln 0.9 = \ln(1-0.1) \approx -0.1 - \dfrac{0.01}{2} = -0.105$.

2.41: $\sqrt[3]{e} = e^{1/3} \approx 1+1/3+1/18+1/162 = 113/81 \approx 1.3951$.

2.42: a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-\operatorname{sen}^2 x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x^4/2-x^2+x^4/3}{x^4} = -1/6$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x^3)}{\operatorname{sen}(ax^3)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3}{ax^3} = \dfrac{2}{a} = 5$, de donde $a = 2/5$.

Series

3.1: a) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$;

b) $a_n = \dfrac{1}{2n-1}$;

c) $a_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$;

d) $a_n = (-1)^{n+1}$

e) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot 3}{2^{n-1}}$;

f) $a_n = n^{(-1)^{n+1}}$.

3.2: a) $1/2,\ 4/5,\ 7/10,\ 10/17,\ 1/2$;

b) $3,\ 9/2,\ 9/2,\ 27/8,\ 81/40$;

c) $-1/2,\ 1/2,\ -3/8,\ 1/4,\ -5/32$;

d) $1,\ 3/4,\ 1/9,\ 3/16,\ 1/25$;

e) $1,\ 1/2,\ 3,\ 1/4,\ 5$;

f) $1/2,\ 1/16,\ 1/8,\ 1/256,\ 1/32$;

g) $-3,\ 1,\ -1/6,\ 1/12,\ -1/40$;

h) $-1,\ -1/4,\ 1/9,\ 1/16,\ -1/25$;

i) $5,\ 19/4,\ 43/9,\ 77/16,\ 121/25$.

3.3: a) $3,\ 4,\ 6,\ 10,\ 18$;

b) $4,\ 4,\ 6,\ 12,\ 30$;

c) $32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 2$;

d) $6,\ 12,\ 48,\ 768,\ 196608$.

3.4: a) 5;

b) $5 - 0 = 5$;

c) $\text{sen}0 = 0$;

d) no existe;

e) T. de encaje: $0 \leq \dfrac{1 + (-1)^n}{n} \leq \dfrac{2}{n}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe;

g) $e^{-\infty} = 0$;

h) $1/2$;

i) $e^0 = 1$.

3.5: Si $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \infty$, y por la condición necesaria es divergente.

3.6: a) 6;

b) $1/7$;

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$;

d) una de las series es divergente, ∞;

e) $25/4$;

f) serie telescópica: $1 - 0 = 1$.

3.7: a) convergente (geom. con $r = 7/9 < 1$);

b) divergente (cond. necesaria);

c) divergente ($\sum 2/n$ es divergente);

d) convergente (geom. $r = \text{sen}\dfrac{\pi}{3} < 1$);

e) divergente (cond. necesaria);

f) divergente (cond. necesaria);

g) divergente (cond. necesaria);

h) divergente (cond. necesaria);

i) convergente (telescópica).

3.8:

a) converge (comparar con $b_n = \frac{1}{n^2}$);

b) divergen (comparar con $b_n = \frac{1}{n}$);

c) converge (comparar con $b_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$);

d) diverge (comparar con $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$);

e) diverge (comparar con $b_n = \frac{1}{n}$);

f) diverge (comparar con $b_n = \frac{1}{n}$);

g) converge (comparar con $b_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$);

h) converge (comparar con $b_n = \frac{1}{n^2}$);

i) converge (comparar con $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$);

3.9: a) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$;

b) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;

c) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

d) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{e}$;

e) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$;

f) diverge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3}{e}$;

g) diverge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$;

h) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$;

i) diverge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$.

3.10: a) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$;

b) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$;

c) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^0$;

d) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{4}$;

e) diverge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{3}{e}$;

f) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-1}$.

3.11: a) converge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{9}$;

b) diverge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e^2}{3}$;

c) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{5}{6}\right)^{1/6}$;

d) diverge: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$;

e) converge: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{e}{3}$;

f) diverge: $\sum (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1) = \infty$.

3.12: a) converge abs.;

b) converge cond.;

c) diverge;

d) diverge;

e) converge abs.;

f) converge abs.;

g) converge abs.;

h) converge cond.;

i) diverge.

3.13:

a) converge (geom.);
b) converge abs. (Cauchy);
c) converge (Leibniz);
d) converge abs. (comparación);
e) converge abs. (comparación);

3.14: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$ es convergente (por el criterio de Leibniz), entonces $|S - S_{40}| \leq a_{41} = \frac{1}{41^4} \approx 3.54 \cdot 10^{-7}$. Para garantizar que el error sea menor que 10^{-10} tenemos que elegir n tal que $(n+1)^{-4} < 10^{-10}$, de donde $n > 10^{10/4} - 1 \approx 315$. Es decir, para $n \geq 316$ el error de la aproximación será menor que 10^{-10}.

3.15: 99; 999.

3.16: 2; 3; 5.

3.17: a) $[1, 3]$;
b) $\mathbb{R}$;
c) $(-1/2,\ 1/2)$;
d) $(0, 6)$;
e) $\mathbb{R}$;
f) $(-1/3, 1/3]$;
g) $(0, 2]$;
h) $(0, 2)$;
i) $\mathbb{R}$.

3.18: a) $(-2, 2)$; $(-2, 2)$; $(-2, 2)$; $[-2, 2)$;
b) $(0, 2]$; $(0, 2)$; $(0, 2)$; $[0, 2]$;

3.19: a) $\mathbb{R}$;
b) Demostración;
c) Demostración;
d) $f(x) = \operatorname{sen} x$; $g(x) = \cos x$.

3.20: Demostración.

3.21: Demostración.

3.22: a) $f(x) = -\sum \left(\frac{2x^n}{3^{n+1}} + (-1)^n x^{2n} \right)$, converge en $(-1, 1)$;

b) $f(x) = \sum \left(5x^n - 7\frac{x^n}{2^{n+1}} \right)$, converge en $(-1, 1)$;

c) $f(x) = \sum (-1)^n (n+2) x^n$, converge en $(-1, 1)$;

d) $f(x) = \sum \frac{5}{4} (-1)^n \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}$, converge en $(-2, 2)$;

e) $f(x) = -\sum x^{2n+1}$, converge en $(-1, 1)$;

f) $f(x) = -\sum \left(x^n - \frac{x^n}{2^{n+1}} \right)$, converge en $(-1, 1)$.

3.23: a) $f(x) = \sqrt{2} \sum \frac{(-1)^n 2^n x^{2n}}{2n+1}$, converge en $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$;

b) $f(x) = \sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{n+1}$, converge en $[-1, 1]$;

c) $f(x) = \sum (-1)^n (n+1) x^n$, converge en $(-1, 1)$;

3.24: a) $\sum \dfrac{x^{2n}}{2^n n!}$; c) $\dfrac{1}{2}\left(1 + \sum (-1)^n \dfrac{(2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$; e) $\sum (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$;

b) $\sum (-1)^n \dfrac{x^{3n}}{(2n)!}$; d) $\sum \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; f) $\sum \dfrac{(-2x)^n}{n!}$.

3.25: a) $1/2$; b) 1; c) 1.

Integración

4.1: a) $2\sqrt{x}+C$;

b) $\frac{7}{6}x^6+3x^2-\sqrt{2}x+C$;

c) $-\frac{1}{2x^2}-\frac{3}{x}+\frac{3}{4x^4}+C$;

d) $\sqrt{\frac{2}{3}}\text{arcsen}x+C$;

e) $\frac{5}{57}x^{19/10}+\frac{5}{32}x^{16/15}+C$;

f) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\text{sen}x+C$.

4.2: a) $\frac{2}{3}(1+\tan x)^{3/2}+C$;

b) $2\arctan(\sqrt{x})+C$;

c) $\frac{1}{4}\text{sen}^4x+C$;

d) $e^{1/x}+C$;

e) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt{2}}+C$;

f) $\frac{1}{8}\text{arcsen}(x^8)+C$.

4.3: a) $\frac{1}{33}(3x-5)^{11}+C$;

b) $\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}(x+1)+C$;

c) $2\sqrt{x}-4\ln|2+\sqrt{x}|+C$;

d) $-\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+C$;

e) $\frac{1}{2(1-x^2)}+C$;

f) $2\sqrt{x}-3x^{1/3}+6x^{1/6}-6\ln|1+x^{1/6}|+C$;

g) $2(1+\sqrt{x})-2\ln(1+\sqrt{x})+C$;

h) $\frac{2}{3}x^{3/2}-x+4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x}+1)+C$;

i) $\frac{4}{3}\ln|x^{3/4}-1|+C$.

4.4: a) $-x\cos x+\text{sen}x+C$;

b) $(x^2-2x+2)e^x+C$;

c) $x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$;

d) $-e^x(x+1)+C$;

e) $\frac{x}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)+C$;

f) $\frac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+C$.

4.5: a) $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$;

b) $-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{2}{3}\arctan x+C$;

c) $\frac{1}{16}\ln\left(x^2+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\arctan(4x)+C$;

d) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+10x-28\ln|x+3|+C$;

e) $\frac{3}{2}x^2+7x+29\ln|x-4|+C$;

f) $3\ln|x|+\ln|x-1|-4\ln|x+1|+C$.

4.6: a) $\frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3}+C$;

b) $\frac{1}{4}\arctan\frac{x-1}{2}+C$;

c) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x+2}{2\sqrt{3}}+C$.

4.7: a) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+\frac{1}{32}\text{sen}(4x)+C$;

b) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C$;

c) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\text{sen}(2x)+\frac{1}{32}\text{sen}(4x)+C$;

d) $-\frac{1}{16}\cos(8x)+\frac{1}{4}\cos(2x)+C$;

e) $\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C$;

f) $2\tan x-\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{3}\tan^3 x+C$;

g) $\ln(\text{sen}x+1)+C$;

h) $x-\tan\frac{x}{2}+C$;

i) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$.

4.8: a) $\frac{5}{8}\ln(4x^2+9)+\frac{1}{3}\arctan\frac{2x}{3}+C$;

b) $\frac{1}{3}\ln^3 x+\ln x+C$;

c) $-\frac{1}{2}\ln(\cos(2x)+2)+C$;

d) $\frac{x}{2}(\text{sen}(\ln x)-\cos(\ln x))+C$;

e) $\frac{1}{4}\left[\arctan\frac{x}{2}\right]^2+C$;

f) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$;

g) $5e^{\frac{x-3}{5}}+C$;

h) $\frac{1}{6}\ln(1+x^6)-\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C$;

i) $\ln|x|-\ln(2)\ln|\ln|4x||+C$;

j) $\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+3)+C$;

k) $x(\ln x-1)+C$;

l) $\frac{e^{ax}}{b^2+a^2}(a\cos(bx)+b\text{sen}(bx))+C$;

m) $\frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|-\frac{27}{49}\frac{1}{x+2}+\frac{8}{49}\frac{1}{x-5}+C$;

n) $-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{2}{3}\arctan x+C$;

o) $x^2\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$;

p) $\frac{6^{3+\ln x}}{\ln 6}+C$.

4.9: a) 8; b) -4; c) 38.

4.10: $\int_0^4 x^2dx=64/3$, luego

a) $64/3$; b) $-64/3$; c) $128/3$; d) 64.

4.11: a) (par) $272/15$; b) (par) $2/3$; c) (impar) 0;

4.12: $f(x)=2x(1+\cos(2x))$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$;

$f'(x)=2+2\cos(2x)-4x\text{sen}(2x)$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\pi$.

4.13: a) $\uparrow$ en $(e^2,+\infty)$; $\downarrow$ en $(0,1)\cup(1,e^2)$; b) $\uparrow$ en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$; $\downarrow$ en $(0,1)$.

4.14: $x=\pi/6$.

4.15: $f(x)=(x-2)e^x+e$.

4.16: 4, 5.

4.17: $\frac{3\pi-2}{24}$.

4.18: πab.

4.19: 8.

4.20: $A=\frac{1}{3}$; $V=\frac{3\pi}{10}$.

4.21: a) $\frac{8}{3}(u^2)$; b) $\frac{16}{3}\pi$.

4.22: 2π.

4.23: a) $\frac{8}{15}\pi$; b) $\frac{\pi}{2}$.

Funciones de dos o más variables

5.1: a) circulo con centro $(0, 0)$ y de radio $r = 1$;

b) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;

c) Si $y > -x$, $\begin{cases} y \geq -2x, \\ y \geq 0 \end{cases}$, si $y < -x$, $\begin{cases} y \leq -2x, \\ y \leq 0 \end{cases}$;

d) recta $y = x$;

e) $x \in \mathbb{R}$, $y \in [-1, 1]$;

f) cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$;

g) la unión de dos conjuntos: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0, \\ y \leq 0 \end{cases}$;

h) $x \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y \in \mathbb{R}$;

i) unión de dos conjuntos: $\begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 > 1; \end{cases}$, $\begin{cases} y \leq 0 \\ x^2 + y^2 < 1; \end{cases}$.

5.2: a) Si $k = 0$ - un punto: $(0, 0)$; si $k > 0$ - hipérbola $y = \dfrac{k^2}{x}$

b) Si $k = 1$ es un punto $(0, 0)$, si $k > 1$ - elipse $\dfrac{x^2}{k-1} + \dfrac{y^2}{(k-1)/4} = 1$;

c) Si $k > 0$ es una circunferencia con centro en el origen y de radio $r = k^{-1/2}$;

d) Si $k < 0$ es una circunferencia con centro en el origen y de radio $r = 1 - e^k$.

e) Si $k = 0$, $y = 0$, $x \neq \pm 1$, si $k > 0$: circunferencia con centro en $(0, k^{-2})$ y de radio $r = \sqrt{1 + k^{-4}}$, excluyendo los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

5.3: Circunferencia con centro en el origen y de radio $r = \sqrt{800 - 4/3k}$, $k < 600$.

5.4: Circunferencias con centro en el origen y de radio $5\sqrt{k^2 - 1}$, donde $k = 2, 3, 4$.

5.5: a) $f(x, y) = x\dfrac{x - y}{2}$; b) $f(x, y) = x/y - xy$.

5.6: a) 0; d) 1;

b) no existe; e) 1;

c) no existe; f) 1.

5.7:

a) continua en $\mathbb{R}^2$;

b) discontinua en $(0,0)$;

c) discontinua en (α,α), $\alpha \in \mathbb{R}$;

d) discontinua en $(0,0)$;

e) continua en $\mathbb{R}^2$;

f) discontinuidad evitable en $(0,0)$.

5.8: a) discontinua en $(0,0,0)$;

b) continua en $\mathbb{R}^3$;

c) continua en $\mathbb{R}^2$.

5.9: a) continua en $\mathbb{R}^2$;

b) discontinua el los puntos de circunferencia $x^2+y^2=1$.

5.10: a) $f_x = e^x \tan y$, $f_y = e^x \cos^{-2} y$

b) $f_x = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $f_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$;

c) $f_x = \dfrac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f_y = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

d) $f_x = 2xe^{x^2} + \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $f_y = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$;

e) $f_x = 1 + \dfrac{1}{x+y^2}$, $f_y = 2y + \dfrac{2y}{x+y^2}$;

f) $f_x = \dfrac{1+\tan^2(x/y)}{y\tan(x/y)}$, $f_x = \dfrac{-x\left(1+\tan^2(x/y)\right)}{y^2\tan(x/y)}$.

5.11: $f_x(P) = 1/2$, $f_y(P) = 0$.

5.12: $f_x(P) = 1$, $f_y(P) = 1/2$, $f_z(P) = 1/2$.

5.13: Demostración.

5.14: Demostración.

5.15: Demostración.

5.16: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

5.17: a) no es continua (ni diferenciable) en el origen;

b) continua y diferenciable en el origen.

5.18: a) $u' = 26t$;

b) $u' = \dfrac{1}{\cos t \operatorname{sen} t}$;

c) $u' = (\operatorname{sen} t)^{\cos t}\left[-\operatorname{sen} t \ln(\operatorname{sen} t) + \dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t}\right]$;

d) $u' = -1$;

e) $u' = 0$;

f) $u' = t^{\varphi(t)}\left[\dfrac{\varphi(t)}{t} + \varphi'(t)\ln t\right]$.

5.19: a) $f_x = f_u y + f_v/y$, $f_y = f_u x + f_v(-x/y^2)$;

b) $f_x = f_u \cdot 2x + f_v \cdot ye^{xy}$, $f_y = f_u \cdot (-2y) + f_v \cdot xe^{xy}$.

5.20: a) $z_s = 4s$, $z_t = 4t$;

b) $z_s = 2e^{2s}$, $z_t = -2e^{2t}$;

c) $z_s = 0$, $z_t = 1$.

5.21: a) $w_s = 3s^2t^2 - t^4$, $w_t = 2s^3t - 4st^3$;

b) $w_s = e^{s^2-t^2}(2s^2t + t)$, $w_t = e^{s^2-t^2}(s - 2st^2)$;

c) $w_s = 2st^3e^{s^2t^2}$, $w_t = e^{s^2t^2}(2s^2t^2 + 1)$;

d) $w_s = -3cos^2 t\,\mathrm{sen}(3s)(t+2)^2$, $w_t = -\mathrm{sen}(2t)\cos(3s)(t+2)^2 + 2\cos^2 t\cos(3s)(t+2)$.

5.22: a) $z_u = f_x + vf_y$, $z_v = uf_y$;

b) $uz_u = 0$.

5.23: $u_s = 758$.

5.24: a) $z_x = -\dfrac{y^2 + yz\cos(xyz)}{3z^2 + xy\cos(xyz)}$, $z_y = -\dfrac{2xy + xz\cos(xyz)}{3z^2 + xy\cos(xyz)}$;

b) $z_x = \dfrac{1-y}{2 + 2e^{2z}}$, $z_y = \dfrac{-x}{2 + 2e^{2z}}$;

c) $z_x = \dfrac{2x(y^2 - 3z)}{3(x^2 + z^2)}$, $z_x = \dfrac{2x^2y}{3(x^2 + z^2)}$;

d) $z_x = -\dfrac{z + ye^{-xz}}{x}$, $z_y = -e^{-xz}$.

5.25: a) -27/10; b) 2; c) -2; d) $\sqrt{2}/2$.

5.26: a) $(16, -1)$;

b) $(5/4, -3/4)$;

c) $(1, 2(1 + \ln 2))$

d) $(6, 3, 2)$;

e) $(1/4, 0, 0)$;

f) $(1/3, 2/3, 1/3)$.

5.27: $\nabla f(P) = (\pi/4 + 1/2, -1/2)$; $D_u(f) = \dfrac{\sqrt{2}}{8}\pi$.

5.28:

a) $(-2,\ 1,\ -1), (-2,\ 1,\ 1)$; b) (α, α, α), $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.29: $2x + 8y + z = 19$.

5.30: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{2}$.

5.31: a) P$(0,\ 3,\ 12)$, PT: $z = 12$; b) P$(0,\ 0,\ 0)$, PT: $z = 0$.

5.32: $z = \pm 2\sqrt{2}$.

5.33: a) $(1,\ 0)$; b) $1/2$; c) $z = x$.

5.34: $D_u(f) = \dfrac{-5\sqrt{2}}{8}$.

5.35: $P(1/2,\ 1/8,\ 1/4)$.

5.36: a) P$(2,\ 2,\ \ln 9)$, PT: $4(x-2) + 4(y-2) - 9(z - \ln 9) = 0$;

b) $\nabla f(P) = (4/9,\ 4/9)$, $dz(P) = 4/9dx + 4/9dy$;

c) P$(0, 0)$ es un punto crítico ($\nabla f = 0$). $|H| = 4 > 0$, $f_{xx} = 2 > 0$.

5.37: a) $(0,\ 0)$ - P.S., $(2,\ 2)$ - mín;

b) $(0,\ 0)$ - P.S.; $(-1,\ -1)$ y $(1,\ 1)$ - mín; $(-1,\ 1)$ y $(1,\ -1)$ - Máx;

c) $(1,\ 1)$ - mín;

d) $(\alpha,\ \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, - mín;

e) no hay puntos críticos;

f) $(-1,\ -2)$ - Máx; $(-1,\ 2)$ y $(1,\ -2)$ - P.S., $(1,\ 2)$ - mín;

g) $(-3,\ -2)$ - Máx; $(-2,\ -3)$ y $(2,\ 3)$ - P.S., $(3,\ 2)$ - mín;

h) $(0,\ 0)$ - P.S., $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ - mín.

5.38: a) Si $k > 0$: $(0,\ 0)$ - Máx, $(\pm\sqrt{k}, 0)$ - P.S.;

si $k \leq 0$: $(0,\ 0)$ - P.S.;

b) Si $k = -2$: $(\alpha,\ \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, - mín,

si $k = 2$: $(\alpha,\ -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, - mín,

si $k \in (-2,\ 2)$: $(0,\ 0)$ - mín,

si $k \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$: $(0,\ 0)$ - P.S.;

c) Si $k < 4$: $(0,\ 0)$ - P.S.,

si $k = 4$: $(-2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, - mín,

si $k > 4$: $(0, 0)$ - mín.