Grado en Ingeniería en Electrónica Industrial y Automática / Grado en Ingeniería Eléctrica
G272-G404: Cálculo I

<u>Examen MATLAB</u>

<u>Nota</u>: *La respuesta correcta a cada pregunta se marca en azul*

---

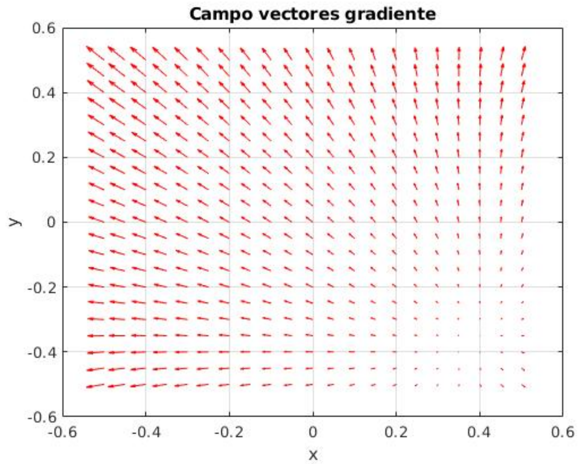
1. Dada la función $f(x) = ln\left(\frac{1}{x}\right)$. ¿Cuál sería el grado mínimo de un polinomio de Taylor, desarrollado alrededor del punto $x = \pi$, que permita dar una estimación del valor $log(0{,}5)$ con un error porcentual inferior al 1 %?

   a) 3
   b) 2
   c) 5

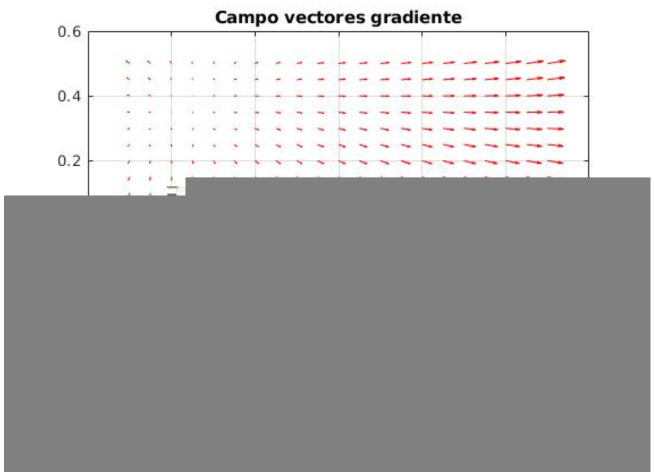
```
syms x real
f = log(1/x); %funcion a aproximar

a = pi;
pt1 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', a, 'Order', 2); %
    polinomio Taylor orden 1
pt2 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', a, 'Order', 3); %
    polinomio Taylor orden 2
pt3 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', a, 'Order', 4); %
    polinomio Taylor orden 3
pt4 = taylor(f, x, 'ExpansionPoint', a, 'Order', 5); %
    polinomio Taylor orden 4

ve = log(0.5); %valor exacto
va = [double(subs(pt1, x, 2)), double(subs(pt2, x, 2)), double
    (subs(pt3, x, 2)), double(subs(pt4, x, 2))]; %evaluo los
    polinomios de Taylor en el punto x=2 para obtener los
    sucesivos valores aproximados a log(0.5)

100*abs((va-ve)/ve) %error porcentual
%Por tanto, un polinomio de grado 3 seria suficiente para
    obtener una
%aproximacion al valor real con un error menor del 1%
```

---

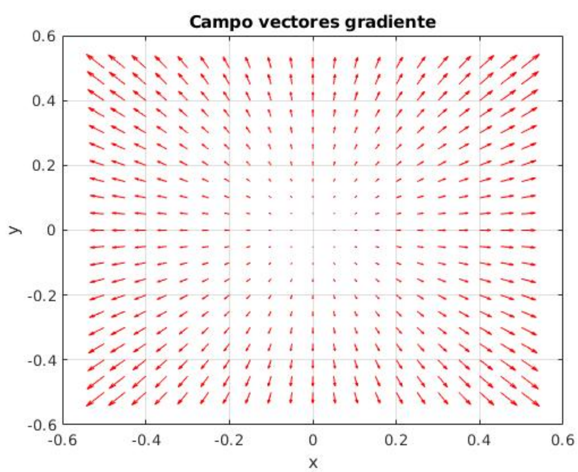
2. Considera la superficie $f(x, y) = e^{x^2+y^2} + x - y$. ¿Cuál de las siguientes figuras corresponde al campo de vectores gradiente a f sobre el dominio $x = [-0{,}5; 0{,}5] \times y = [-0{,}5; 0{,}5]$?


Campo vectores gradiente
y
x
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

a)


Campo vectores gradiente
0.6
0.4
0.2

b)


Campo vectores gradiente
y
x
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

c)

```
[X, Y] = meshgrid(-0.5:0.05:0.5, -0.5:0.05:0.5); % malla sobre
    dominio
Z = exp(X.^2 + Y.^2) + X - Y; % superficie
[Zx, Zy] = gradient(Z); % componentes vector gradiente en cada
    punto de la malla

figure
quiver(X, Y, Zx, Zy, 'r') % dibujo los vectores gradiente, en
    rojo
xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z'), title('Campo vectores
    gradiente'), grid on
```

---

3. Calcula $\frac{df}{dt}$ en $t=\pi$, siendo $f = cos(x^y) - \frac{sin(z)}{y+z}$, con $x=-2t$, $y=t^3$ y $z=e^t$.

   a) $-7{,}6022$
   b) 0
   c) La derivada pedida no existe en $t=\pi$

```
syms t x y z real
x = -2*t; y = t^3; z = exp(t);
f = cos(x^y) - (sin(z)/(y+z));
double(subs(diff(f, t), t, pi)) %NaN --> la derivada pedida
    no existe en t=pi
```

---

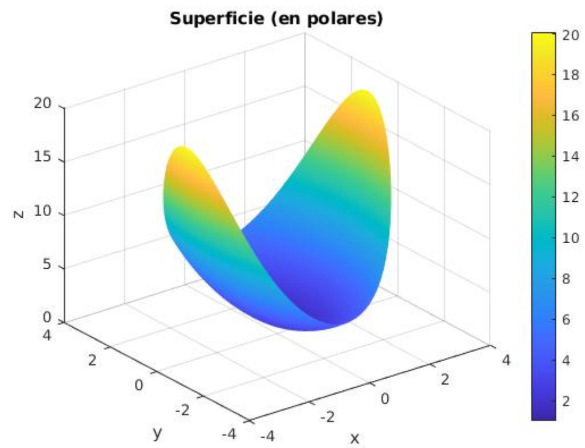
4. Considera la superficie $z = arctan(x) + \frac{e^y}{2}$. Calcula el plano tangente a z en el punto $P(0{,}25; 2{,}25)$. ¿Qué valor toma este plano en el punto $P'(1;-1)$?

   a) -1
   b) $5{,}6742$
   c) $-9{,}7228$

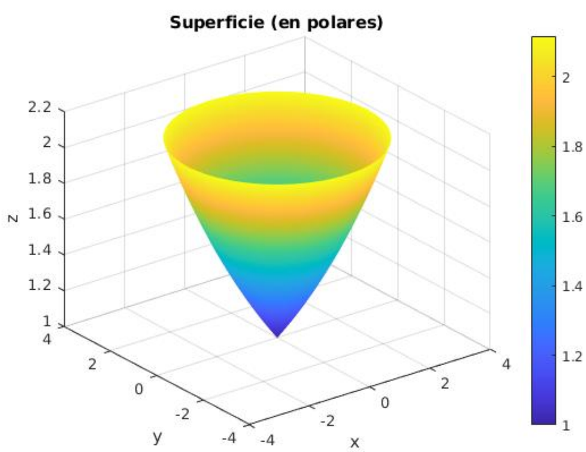
```
syms x y real
z = atan(x)+(exp(y)/2); % superficie (simbolica)
zx = diff(z, x);
zy = diff(z, y);
P = [0.25 2.25]; % punto P
z0 = double(subs(z, [x y], P)); % valor que toma la superficie
    en P
pt = double(subs(zx, [x y], P))*(x - P(1)) + double(subs(zy, [
    x y], P))*(y - P(2)) + z0; % ecuacion del plano tangente a
    la superficie en P (simbolica)
double(subs(pt, [x y], [1, -1])) % valor que toma el plano
    tangente en el punto pedido
```

---

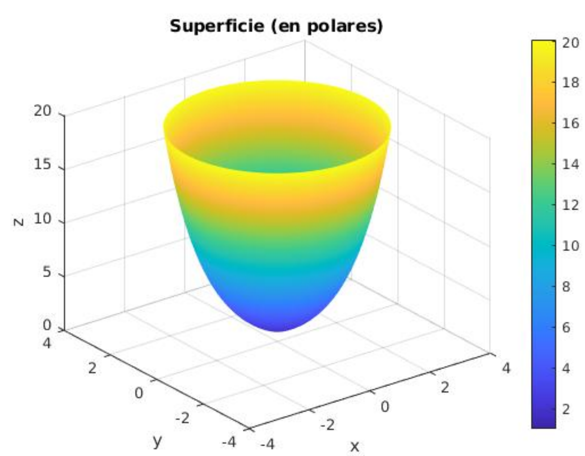
5. Considera la función $z = e^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}}$. ¿Cuál de las siguientes imágenes se corresponde con la representación gráfica de z en coordenadas polares sobre el dominio $r=[0,3]\times\theta=[0,2\pi]$?


Superficie (en polares)
20
15
z 10
5
0
4
2
0
-2
y
-4
-4
-2
0
2
4
x
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2

a)


Superficie (en polares)
2.2
2
1.8
z 1.6
1.4
1.2
1
4
2
0
-2
y
-4
-4
-2
0
2
4
x
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1

b)


Superficie (en polares)
20
15
z 10
5
0
4
2
0
-2
y
-4
-4
-2
0
2
4
x
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2

c)

```
[R, T] = meshgrid(linspace(0, 3), linspace(0, 2*pi)); % malla
    sobre la que representar la superficie
X = R.*cos(T); % coordenada 'x' en polares
Y = R.*sin(T); % coordenada 'y' en polares
Z = exp(sqrt(X.^2+Y.^2)/4); % superficie (numerica)

figure
surf(X, Y, Z), xlabel('x'), ylabel('y'), zlabel('z'), colorbar
     % representacion grafica
title('Superficie (en polares)')
shading interp
```

---

6. Obtén la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x^{sen(x)}} + sen(2x)$ en el punto $x = 2{,}15$. ¿Qué valor toma esa recta en $x = 1{,}75$?

   a) f no existe en $x = 2{,}15$
   b) 0,4
   c) 256,1515

```
syms x real

f = exp((3*x)^(sin(x))) + sin(2*x);
fprima = diff(f, x, 1); % derivada de f
rt = subs(fprima, x, 2.15)*(x-2.15) + subs(f, x, 2.15); %
    ecuacion de la recta tangente a f en x=2.15
double(subs(rt, x, 1.75)) % valor de la recta tangente en x
    =1.75

%% grafico
fig_f = ezplot(f); set(fig_f, 'Color', 'k') % dibujo f en
    negro
hold on
fig_rt = ezplot(rt, [1 3 0 300]); set(fig_rt, 'Color', 'r') %
    dibujo la recta tangente en rojo
grid on, legend('f', 'recta tangente')
title('f y recta tangente')
```

---

7. Dados $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = \pi + 3i$ y $z_3 = -\sqrt{2}i$, ¿cómo se expresaría en forma exponencial $\frac{1}{2}z_1 - z_2^2 + Im(z_3) - \overline{z_2}$?

   a) $-5{,}9254 \cdot e^{-14{,}8496i}$
   b) $15{,}9881 \cdot e^{-1{,}9505i}$
   c) $e^{-2\pi i}$

```
z1 = -1+2i;
z2 = pi + 3i;
z3 = -sqrt(2)*i;

z = (0.5*z1) - (z2^2) + imag(z3) - conj(z2);
abs(z) % modulo de z
angle(z) % argumento de z
% Por tanto, la forma exponencial seria 15.9881*exp(-1.9505i)
```

8. ¿Cuál es el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$?

   a) $(1,1]$
   b) $(0,2]$
   c) $[1,1)$

```
syms n integer
a_n = ((-1)^(n+1)) / (n); %termino a_n de la serie de
    potencias
a_nmas1 = subs(a_n, n, n+1);
R = limit(abs(a_n/a_nmas1), n, inf) %radio de convergencia,
    entorno a x=1

%La serie convergera en el intervalo (0,2). Hay que ver que
%sucede en los extremos (x=0 y x=2)
syms x real
tgc = a_n*(x-1)^n; %termino general (completo) de la serie
symsum(subs(tgc, x, 1-R), n, 1, inf) %la serie diverge en x=0
symsum(subs(tgc, x, 1+R), n, 1, inf) %la serie converge en x
    =2
```

9. Dadas las funciones $f_1(x) = senh(x)$ y $f_2(x) = e^x - 1$, ¿qué valor tomaría $f_1(f_2(x))$ en el punto $x = \frac{\pi}{2}$?

   a) 8,9871
   b) 1,5708
   c) 22,5749

```
syms x real
%% mediante funciones tipo handle
f1 = @(x) sinh(x);
f2 = @(x) exp(x)-1;
f1(f2(pi/2)) % 22.5749

%% mediante funciones simbolicas
f1 = sinh(x);
f2 = exp(x)-1;
double(subs(f1, x, subs(f2, x, pi/2))) % 22.5749
```

10. ¿Qué error porcentual se comete al aproximar mediante sumas de Riemann con 67 rectángulos la integral $\int_e^{e^2} e^x sen(2x^2)dx$?

   (a) 19,1438 %
   (b) 0,191438 %
   (c) 5,2816 %

```
syms x real
f = exp(x)*sin(2*(x^2));
ve = double(int(f, exp(1), exp(2))); %valor exacto
rsums(f, exp(1), exp(2)) %abro herramienta grafica para el
    calculo de sumas de Riemann
va67 = 47.516593; %valor aprox. que se obtiene con 67
    rectangulos
100*abs((va67 - ve)/ve) %error porcentual: 19.1438%
```

G272/G404 Cálculo I

<table>
<tr><td colspan="6">Examen Parcial III</td></tr>
<tr><td colspan="3">Curso: 2020/21
Fecha: 08/01/2021
Duración: 60 min.</td><td colspan="3">Nombre y apellidos: ....
DNI/NIE: ....
Grado: ....</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>2.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>TOTAL:</td><td></td></tr>
</table>

1. **(2.5 p.)** Se considera la función

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x+2}{y-1}\right).$$

   (a) Representa el dominio de la función $f(x,y)$;

   (b) Determina y representa las curvas de nivel de $f(x,y)$.

2. **(2.5 p.)** Suponiendo que la ecuación

$$z^3 - 2z^2x + xyz - 2 = 0$$

   define a z como función implicita de x e y, calcula:

   (a) el gradiente de z en el punto $P(1,\,1,\,2)$;

   (b) la derivada direccional en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

3. **(2.5 p.)** Sea la función

$$z = x^3 + 2xy + 12.$$

   Halla el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie z cuyo plano tangente es paralelo al plano

$$z = x + y.$$

4. **(2.5 p.)** Halla los extremos de la función

$$z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

G272/G404 Cálculo I

Examen Parcial III	
Curso: *2020/21* Fecha: *08/01/2021* Duración: *60 min.*	Nombre y apellidos: .... DNI/NIE: .... Grado: ....

1.	2.	3.	4.	TOTAL:	

1. **(2.5 p.)** Se considera la función

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x+2}{y-1}\right).$$

(a) Representa el dominio de la función $f(x,y)$;

(b) Determina y representa las curvas de nivel de $f(x,y)$.

Solución:

(a) Dominio: $\dfrac{x+2}{y-1} > 0$, se cumple si $\begin{cases} x+2>0; \\ y-1>0 \end{cases}$, o $\begin{cases} x+2<0; \\ y-1<0. \end{cases}$

El dominio es la unión de dos conjuntos: $(-2,\infty)\times(1,\infty)\ \cup\ (-\infty,-2)\times(-\infty,1)$.

(b) Las curvas de nivel: $\ln\left(\dfrac{x+2}{y-1}\right) = k$, $k \geqslant 0$. Despejando y, se obtiene

$y = e^{-k}x + 2e^{-k} + 1$, $k \geqslant 0$, - lineas rectas.

2. **(2.5 p.)** Suponiendo que la ecuación

$$z^3 - 2z^2x + xyz - 2 = 0$$

define a z como función implícita de x e y, calcula:

(a) el gradiente de z en el punto $P(1,\,1,\,2)$;

(b) la derivada direccional en la dirección de la bisectriz del primer cuadrante.

Solución:

(a) $F(x,y,z) = z^3 - 2z^2x + xyz - 2 = 0$, calculamos las derivadas parciales:

$F_x = -2z^2 + yz$, $F_x(P) = -6$,

$F_y = xz$, $F_y(P) = 2$,

$F_z = 3z^2 - 4zx + xy$, $F_z(P) = 5$,

Luego $z_x = -\dfrac{F_x}{F_z} = \dfrac{6}{5}$, $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{2}{5}$.

El gradiente de z en el punto P es $\nabla z(P) = \left(\dfrac{6}{5}, -\dfrac{2}{5}\right)$.

(b) $\bar{u} = \left(\cos\dfrac{\pi}{4}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ - vector unitario.

Derivada direccional: $D_u(f) = \nabla z \cdot \bar{u} = \dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$.

3. **(2.5 p.)** Sea la función

$$z = x^3 + 2xy + 12.$$

Halla el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie z cuyo plano tangente es paralelo al plano

$$z = x + y.$$

Solución: Plano tangente: $z - z_0 = z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0)$, $z_x = 3x^2 + 2y$, $z_y = 2x$.

Para que sea paralelo al plano $z = x + y$:

$\begin{cases} z_x = 3x^2 + 2y = 1 \\ z_y = 2x = 1 \end{cases}$, de donde $x_0 = 1/2$, $y_0 = 1/8$. Entonces, $z_0 = 12\frac{1}{4}$.

El punto P es (0.5, 0.125, 12.25).

4. **(2.5 p.)** Halla los extremos de la función

$$z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Solución: La función no esta definida en los puntos $x = 0$, $y = 0$.

Puntos críticos: $\begin{cases} f_x = y - \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ f_y = x - \dfrac{1}{y^2} = 0, \end{cases}$

Desde la primera ecuación $y = \dfrac{1}{x^2}$, sustituimos en la segunda: $x - x^4 = 0$, cuyas raíces son $x = 0$ y $x = 1$. En $x = 0$ la función no está definida, entonces, el único punto crítico es (1, 1).

$|H| = \begin{vmatrix} 2x^{-3} & 1 \\ 1 & 2y^{-3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$

Como $f_{xx} = 2 > 0$, en el punto $P(1, 1)$ la función tiene un mínimo relativo, $f(P) = 3$.