Comportamiento cualitativo de soluciones de ED de primer orden: El campo de direcciones asociado a una ED.

Capitulo 1 – Libro (1.3) **+** ***Hoja de problemas 3*** **+** ***Complementos***

Resumen de contenidos:

- **Entorno "dfield" (dfield5-dfield8)**
- **Sobre existencia y unicidad de solución pasando por un punto**
- **Comportamiento de soluciones de ED sin resolverlas**
- **La solución numérica en el entorno "dfield"**

% La idea en este cuaderno es estudiar comportamientos de soluciones de ED sin conocerlas, esto es, sin resolver las ED. Los tópicos que se abordan son, entre otros, la detección de cambios de crecimientos y concavidades de soluciones, resultados de existencia y unicidad de solución pasando por un punto, intervalos de definición de soluciones y comportamientos asintóticos de soluciones para tiempos grandes. El cuaderno se complementa con los cuadernos del curso segundo (resolución explícita de ED) y cuarto (aproximación numérica de soluciones).

% La ecuación diferencial y'=f(t,y) define un campo de direcciones que a cada punto (t,y) le asocia la dirección del vector (1,f(t,y)) o (1/f(t,y),1). La solución que pasa por este punto (t,y) es tangente al vector del campo. Se trata de dibujar dicho campo. Trabajamos con el entorno "dfield" (dfield5—dfield8, el número dependiendo de la versión) diseñado por J. Polking (Rice University, Texas, USA) para dibujar campos de direcciones asociados a ED de primer orden.

***%** Aunque el comando Matlab "quiver" permite dibujar el campo de direcciones asociado a una ED, hay que combinar dicho comando con otras instrucciones para definir los vectores del campo, y el obtener los resultados deseados, con los ejercicios planteados en el curso, puede requerir de otros ajustes y funciones Matlab. De ahí el interés de utilizar "dfield". Introducimos "quiver" en los primeros ejemplos (ejercicios 2 y 3). Para comparar, ver por ejemplo, el fichero **dfield8.m** y la dirección de internet:*

http://www.theshapeofmath.com/_media/princeton/introde/11_mat350_matlab7.pdf

% Así el conjunto de comandos

>> f=inline('x','x','y');

>> h=0.2; left=-2; right=2;

>> [x,y]=meshgrid(left:h:right, left:h:right);

>> [n,m]=size(x);

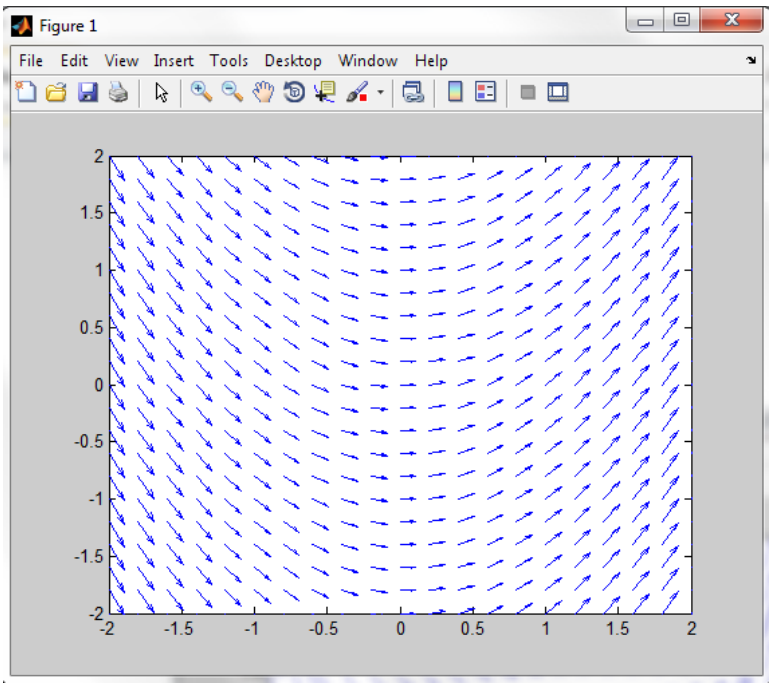
>>dx=ones(n,m);

>> dy=f(x,y);

>> quiver(x,y,dx,dy)

>> axis([-2 2 -2 2])

% nos dibuja el campo de direcciones asociado a y'=x, en [-2,2]x[-2,2]



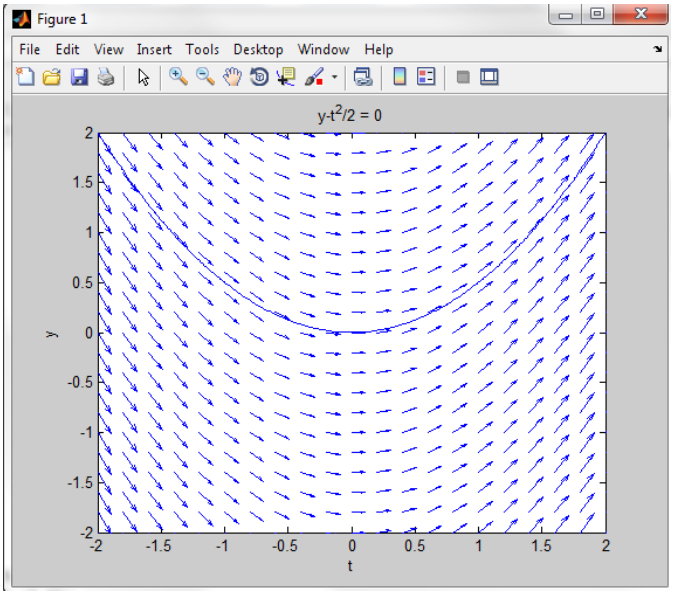
% Para dibujar una curva integral de la familia y=t^2/2+cte, por ejemplo y=t^2/2, tangente a los vectores del campo, usamos (cte indica constante)

>> quiver(x,y,dx,dy)

>> hold on

>> ezplot('y-t^2/2',[-2,2,-2,2])

>> axis([-2,2,-2,2])



% Para obtener las curvas isoclinas x=cte en este caso, podemos utilizar el conjunto de comandos "quiver" con "ezcontour" que nos dibuja las líneas de nivel de una superficie

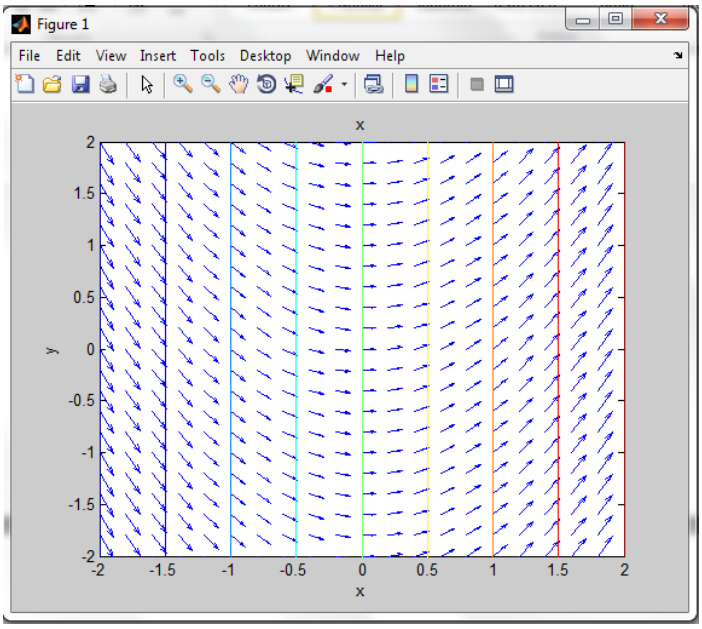
>> hold off

>> quiver(x,y,dx,dy)

>> hold on

>> ezcontour('x',[-2,2,-2,2])

>> hold off



% Por ejemplo, para dibujar el campo de direcciones asociado a la ED y'=y^2-x, junto con curvas isoclinas, podemos usar el conjunto de comandos de arriba sin más que cambiar la definición de la función f en "inline" y en "ezcontour"; esto es, cambiando las instrucciones: f=inline('y.^2-x','x','y'), quiver(x,y,dx,dy,1.5), y, ezcontour('y^2-x', [-2,2,-2,2]). El mismo resultado se obtiene con el conjunto de comandos:

>> [x,y]=meshgrid(-2:0.2:2, -2:0.2:2);

>> [n,m]=size(x);

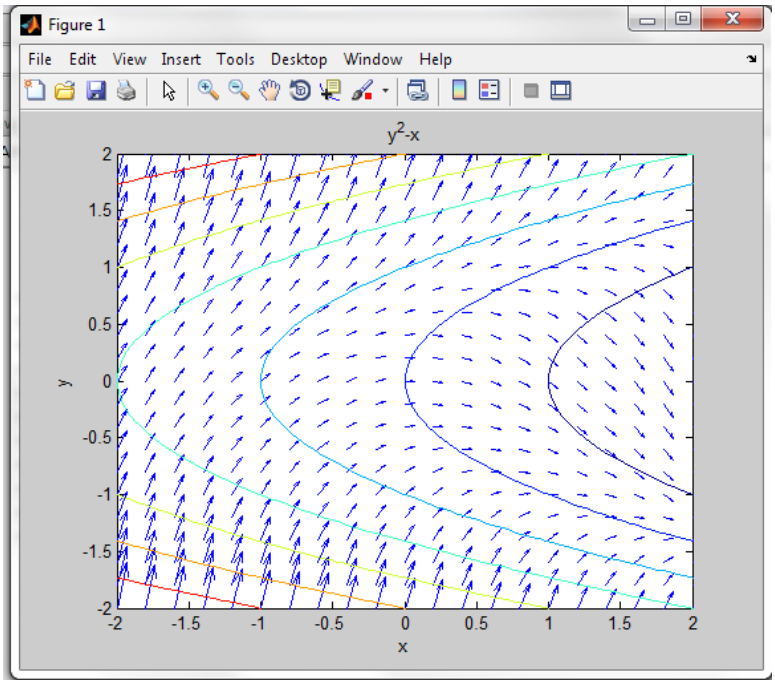
>> quiver(x,y,ones(n,m), y.^2-x,1.5)

>> hold on

>> ezcontour('y^2-x',[-2,2,-2,2])

>>axis([-2 2 -2 2])

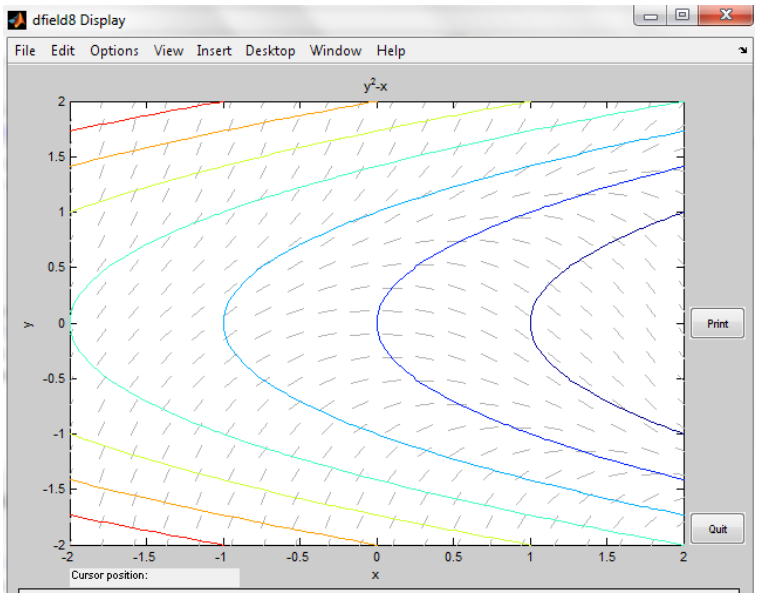
% ver otras opciones de dibujo con "help quiver"



% Una gráfica de este estilo, se tiene con los comandos "dfield8" y "ezcontour"

>> dfield8 *% ejecutando y ajustando variables e intervalos en la interfaz del entorno*

>> ezcontour('y^2-x',[-2,2,-2,2])



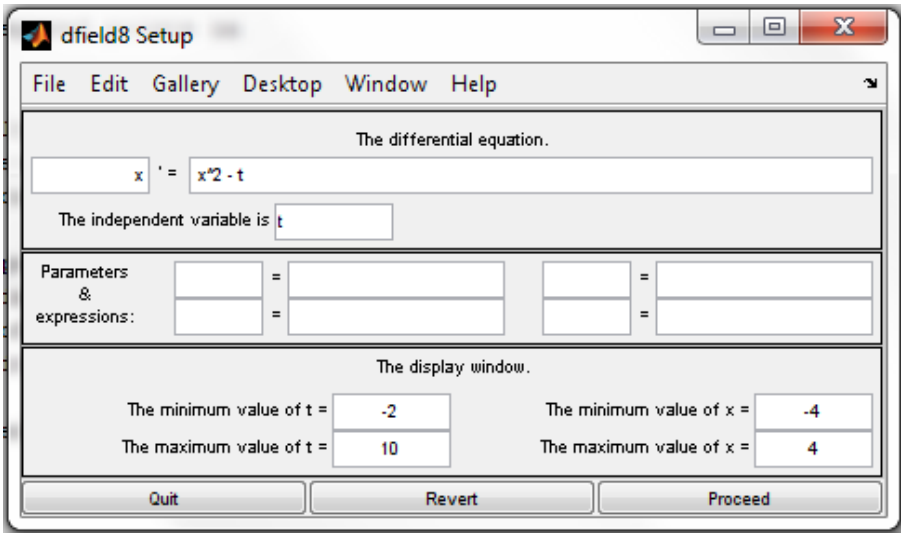
% Para cambios de intervalos, espaciado entre vectores, diseño de vectores, dibujo de soluciones exactas o aproximadas, isoclinas, etc., el entorno "dfield8" está muy bien adaptado

*% **El entorno "dfield8"** nos va a permitir desarrollar la idea de este cuaderno de prácticas, tal y como se ha descrito al principio. Comenzamos explicando en detalle el entorno.*

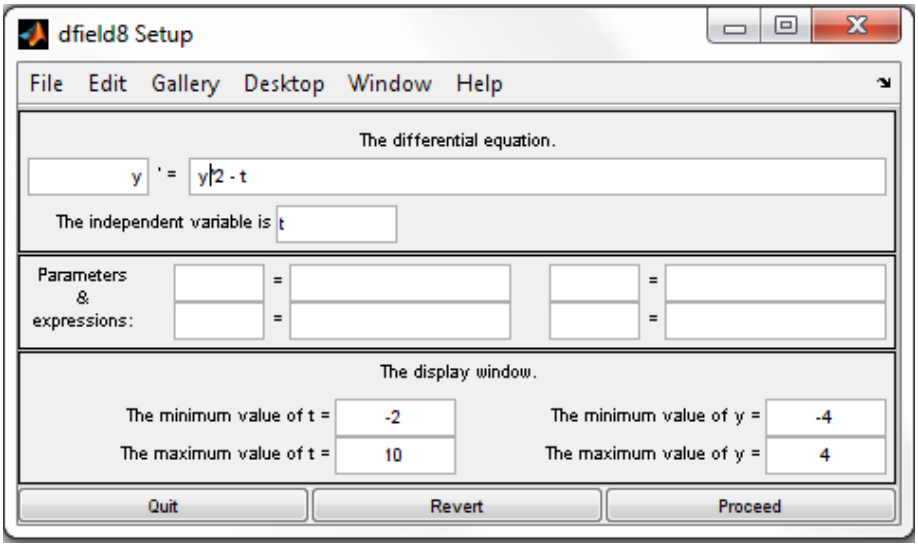
% En el prompt >> de Matlab

>> dfield8

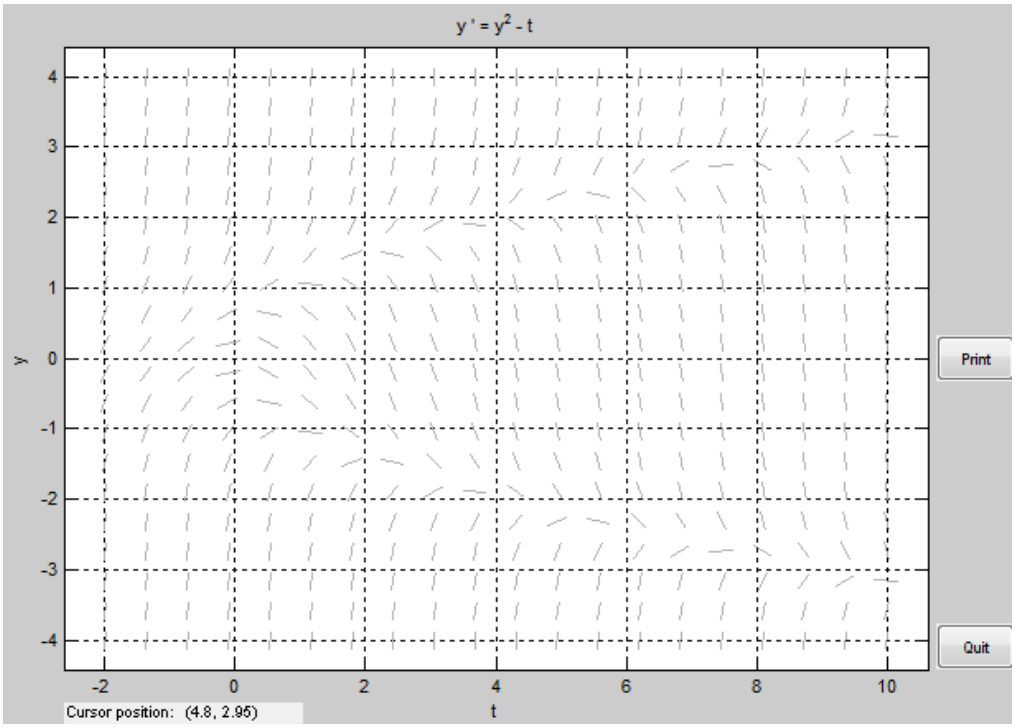
% nos proporciona una carátula o interfaz donde se pueden modificar ecuaciones, parámetros, intervalos, etc..



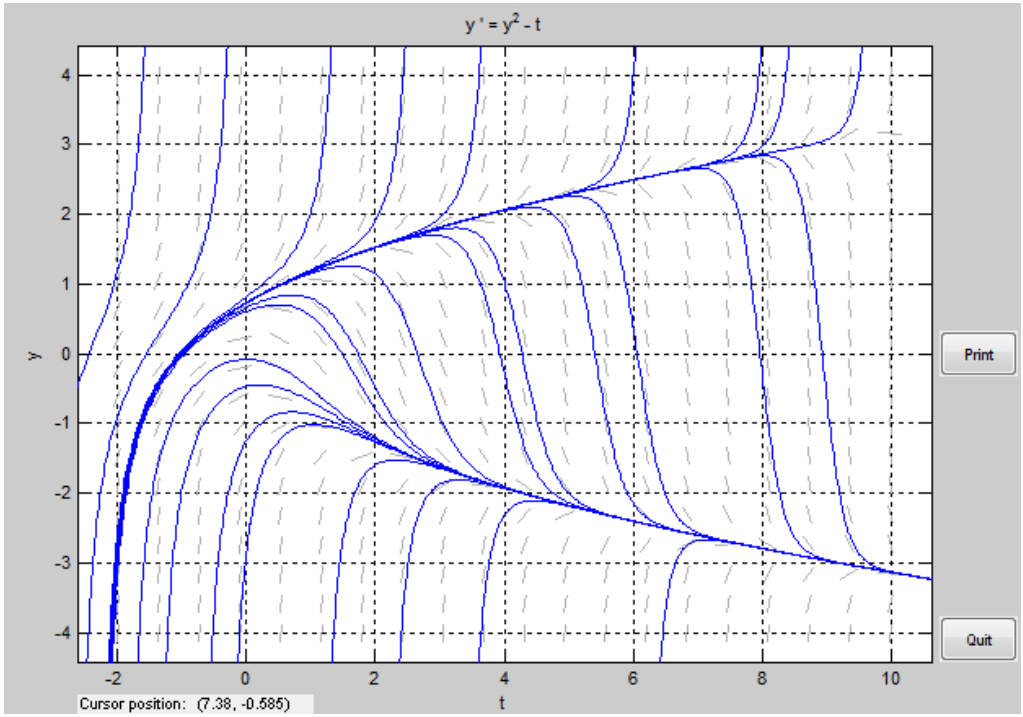
% por defecto, el entorno dfield8 nos muestra la ED de Riccati y'=y^2-t, o más precisamente x'(t)=x(t)^2-t, donde inmediatamente podemos cambiar la variable dependiente x(t), que usa por defecto el entorno, por la nuestra y(t),



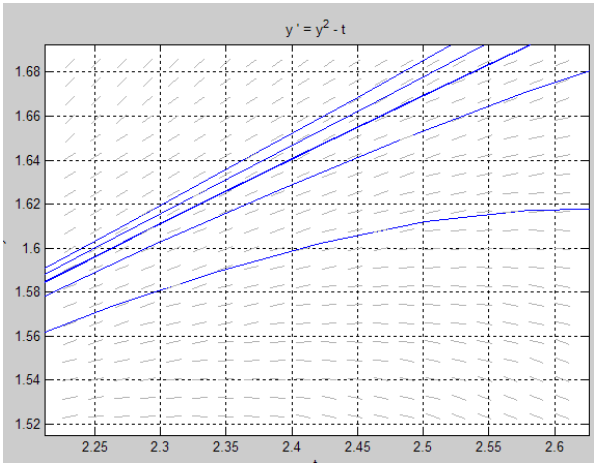
% y luego, pinchando en "Proceed" tenemos el campo de direcciones asociado a la ED en el rectángulo [-2,10]x[-4,4] .



% en esta nueva carátula/interfaz sin más que ir pinchando en distintos puntos, se va teniendo el dibujo aproximado de las curvas solución

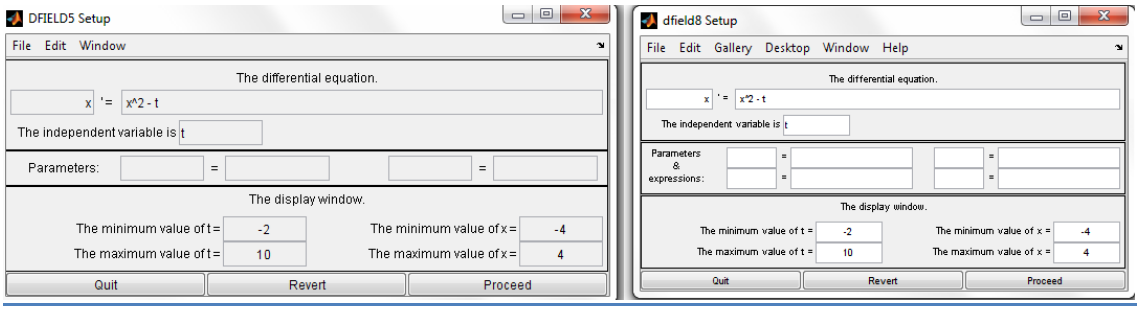


% pero a primera vista, ya notamos que el dibujo puede ser engañoso: existe una única solución pasando por cada punto, definida al menos en un entorno del punto (nótese que la ecuación no es lineal), y dos soluciones no pueden cortarse. Al agrandar una región (por ejemplo, cerca de t=2) vemos que, de hecho, las soluciones se han juntado al comprimir el dibujo, pero no se cortan.



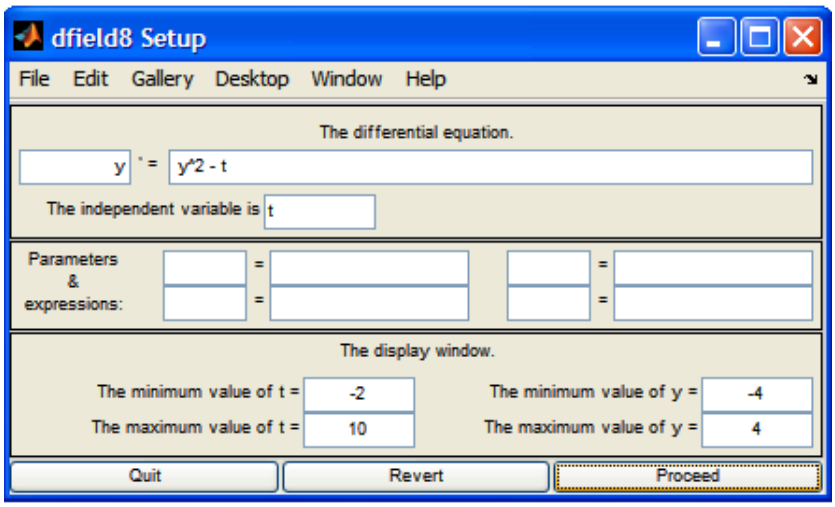
% Mediante el conjunto de ejemplos (Ejercicio 4) explicamos en detalle lo que estamos visualizando.

% Indistintamente se pueden utilizar las distintas versiones del entorno, "dfield5", "dfield7" o "dfield8", dependiendo de la versión de Matlab que utilicemos. En todas ellas en la interfaz se pueden cambiar variable independiente y la función incógnita; admite opciones de parámetros en la ED; "Quit" es para abandonar el entorno, "Revert" para volver a valores de partida y "Proceed" para comenzar. Quizás la versión más completa es "dfield8": la interfaz tiene más desplegables y opciones. Los colores de las gráficas pueden variar con la versión

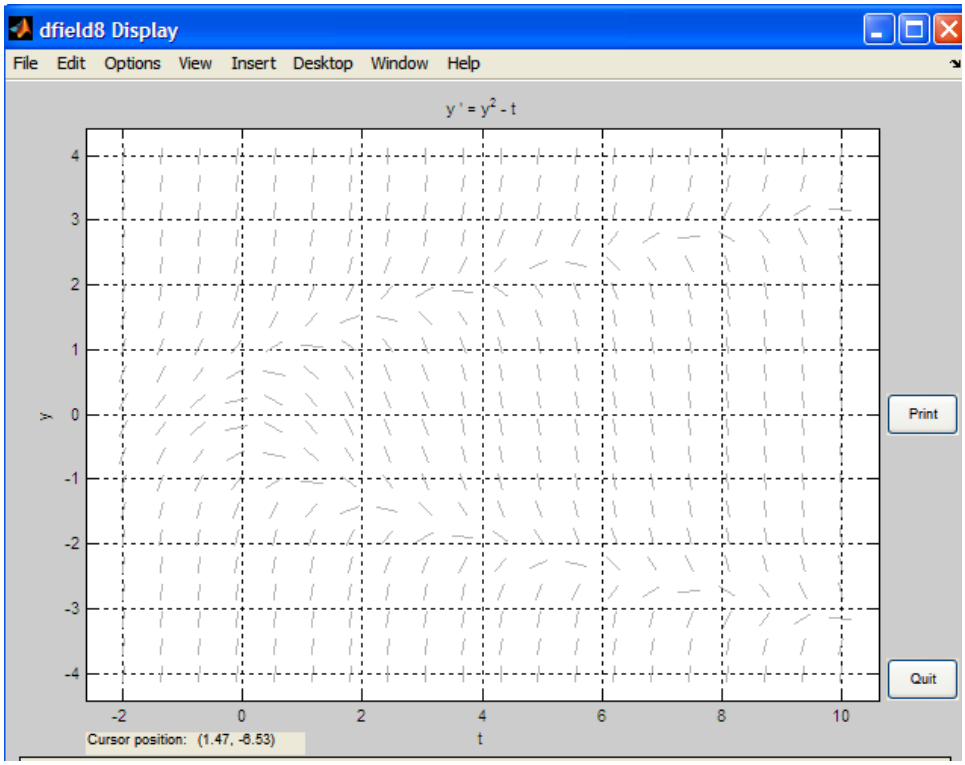


Ejercicio 4. 1

% La ED que tiene por defecto dfield es y'=y^2-t, una vez cambiada la función incógnita x=x(t) por y=y(t)



% Ejecutando "Proceed" nos aparece el campo de direcciones asociado a la ED para (t,y) en [-2,10]x[-4,4] (todo se puede cambiar)



% Podemos interactuar desde Matlab, fuera del entorno dfield, para introducir isoclinas para distintas pendientes, soluciones explícitas, etc.

% A continuación dibujamos tres isoclinas y vemos cómo cambia la solución de creciente a decreciente al pasar por la de pendiente 0

>> ezplot('y^2-t=1') *% isoclina para la pendiente 1*

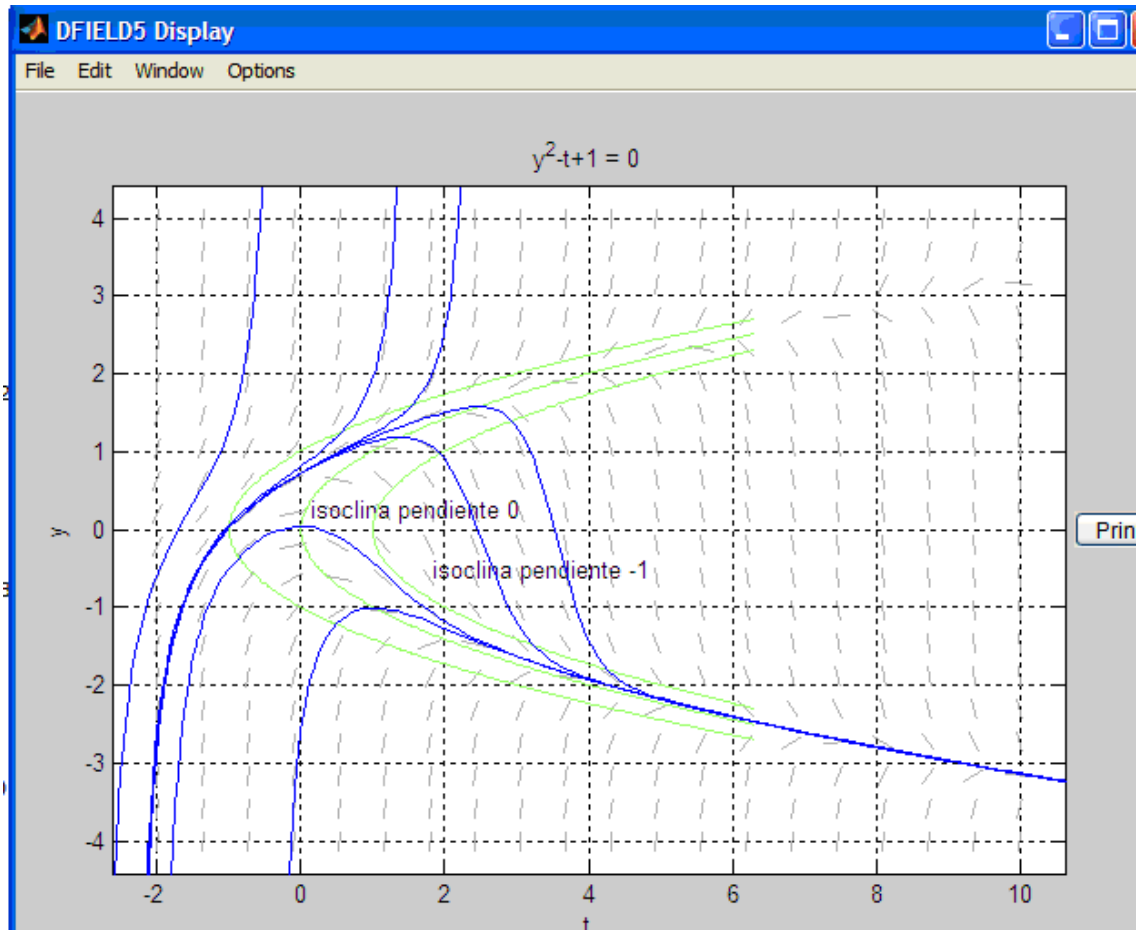
>> ezplot('y^2-t-1') *% también dibuja la isoclina para la pendiente 1*

>> ezplot('y^2-t-0')

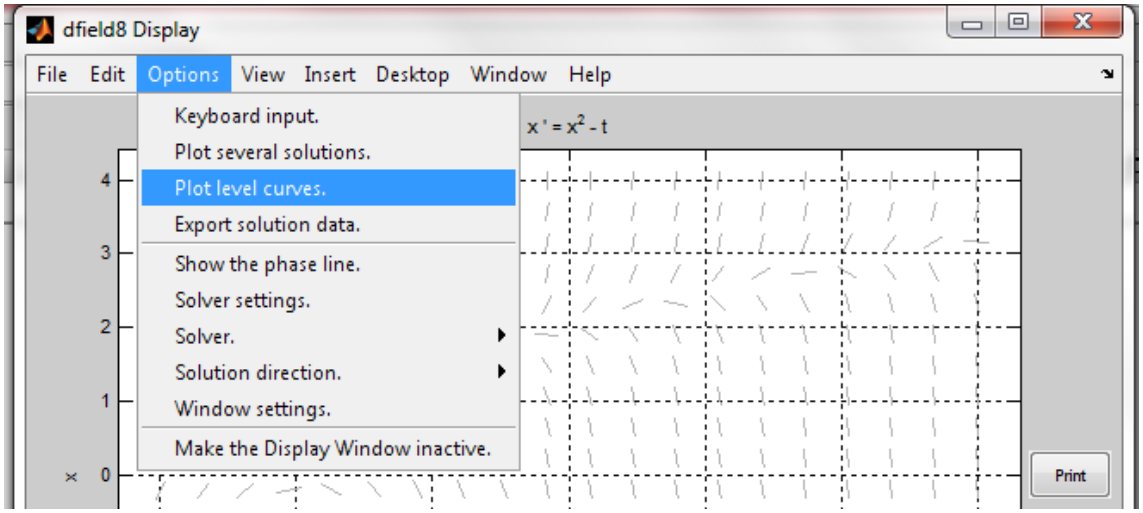
>> gtext('isoclina pendiente 0')

>> gtext('isoclina pendiente -1')

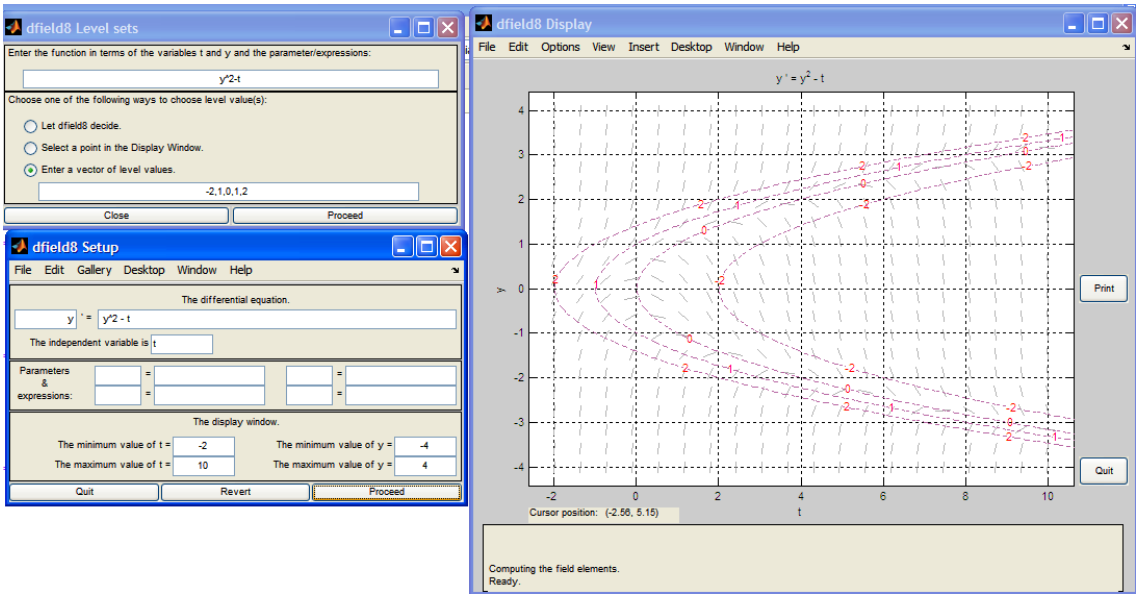
>> ezplot('y^2-t+1')



% Esto, se puede hacer también (con dfield8) en el desplegable "Options"

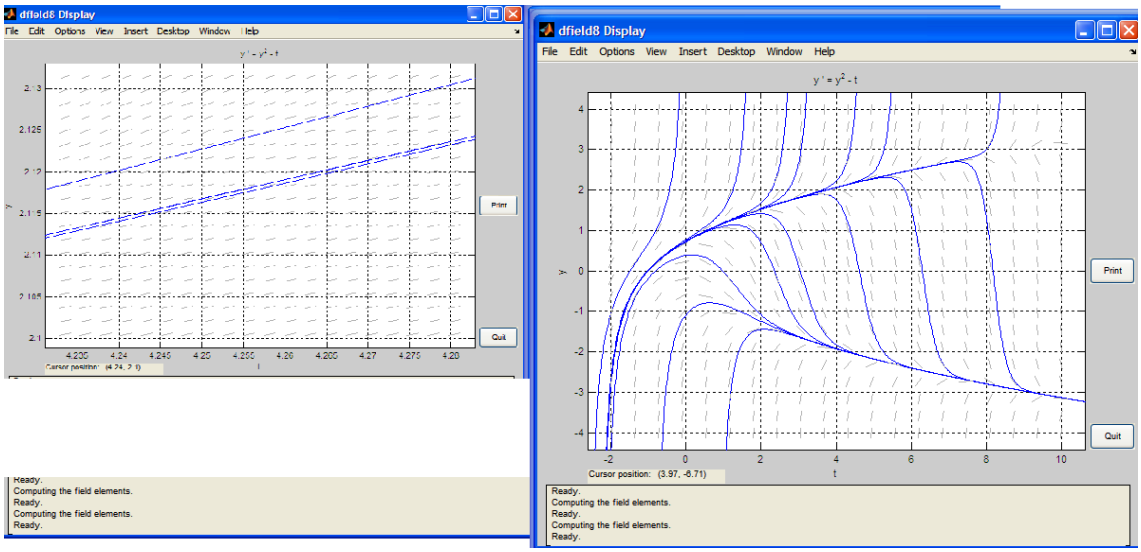


% Esto es, las isoclinas para las distintas pendientes se pueden dibujar desde el entorno dfield8 en "Options", "Plot level curves" (las curvas de nivel de la superficie z=y^2-t), y dentro de las opciones de este desplegable donde aparece la opción de introducir las isoclinas que queremos , i.e., las curvas de nivel y^2- t=1, y^2-t=0, y^2-t=2, y^2-t=-1, y^2-t=-2,… sin más que escribir en la opción "vector of level values" -2,-1,0,1,2, por ejemplo,



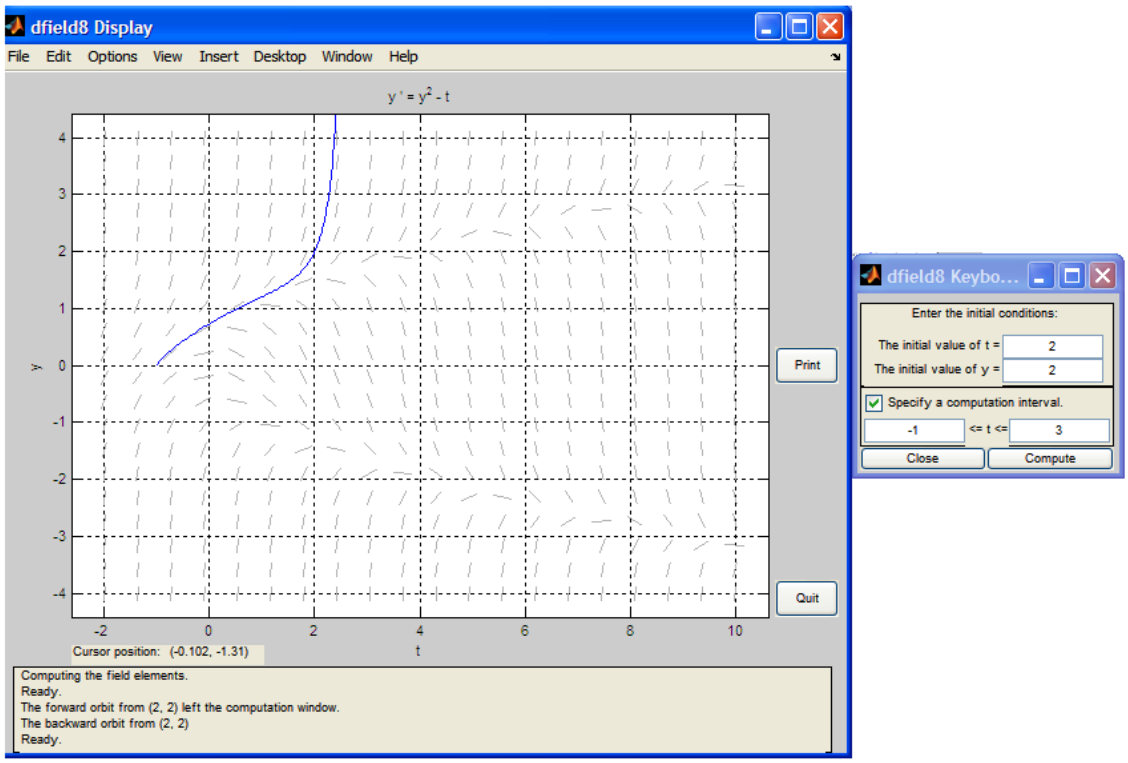
% Por otro lado, en el desplegable de "Edit" se pueden borrar las isoclinas, las soluciones y otros objetos gráficos.

% La gráfica de abajo, se tiene pinchando en distintos puntos de la interfaz gráfica: se ve que las curvas solución son tangentes a los vectores del campo; además parece que se cortan entre ellas. Haciendo un zoom (en "Edit", "Zoom in"), por ejemplo, en un entorno del punto t=4, vemos que realmente hay una solución pasando por cada punto (dibujo de la izquierda)

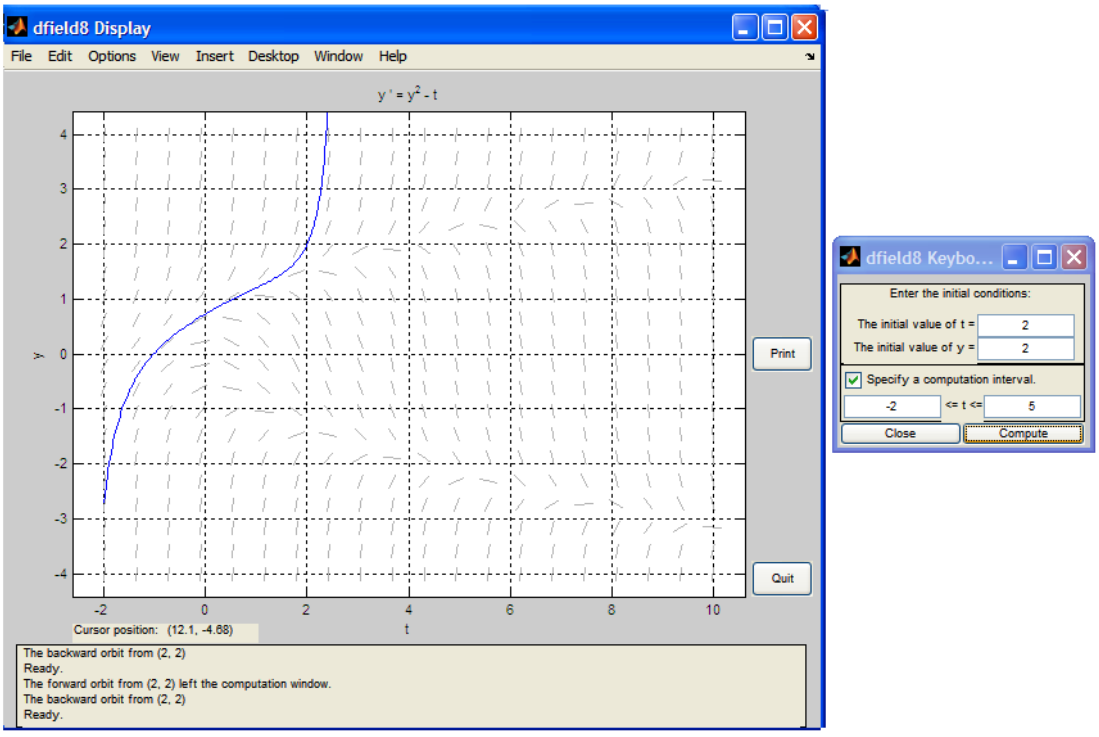


% Esto es coherente con el teorema de existencia y unicidad de solución de la ED y'=f(t,y), con la gráfica pasando por un punto, para f regular (f continua y su derivada parcial con respecto a y también lo es): existe una única solución explícita pasando por cada punto.

*% **Aproximación de la solución de un problema de Cauchy:** a continuación, borramos todas las soluciones (con "Options", "Erase…") e introducimos un punto con el teclado, por ejemplo el punto (2,2), pidiendo al entorno que le lea del teclado y que dibuje en el intervalo (1,3): en "Options", "Keyboard input" nos proporciona otra carátula o interfaz para introducir estos datos*

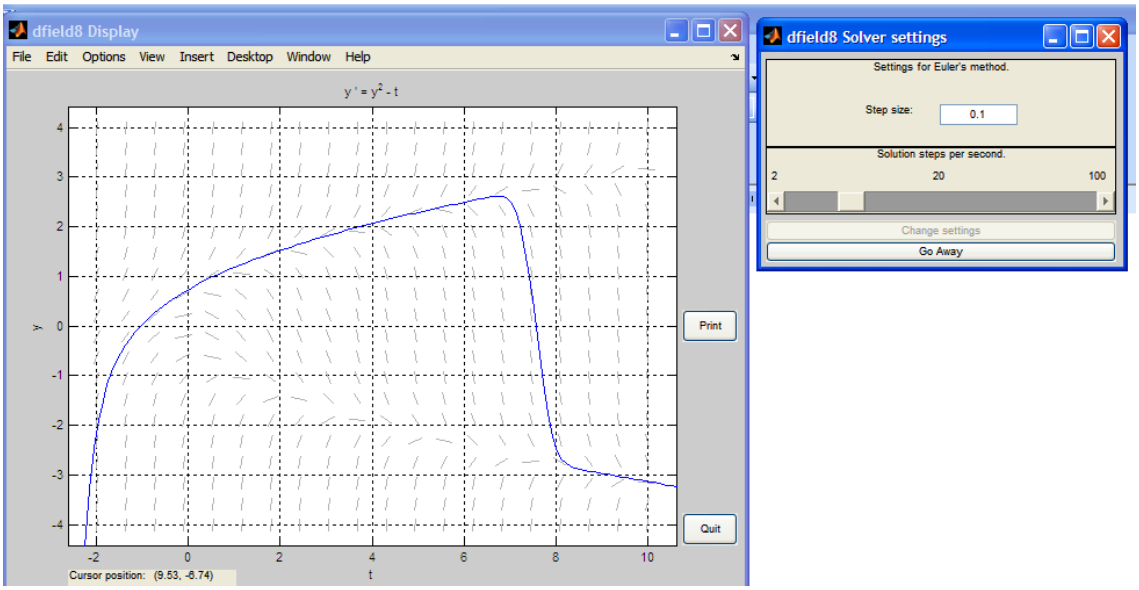


% y le pedimos que vaya agrandando el intervalo, a (-2,5),…

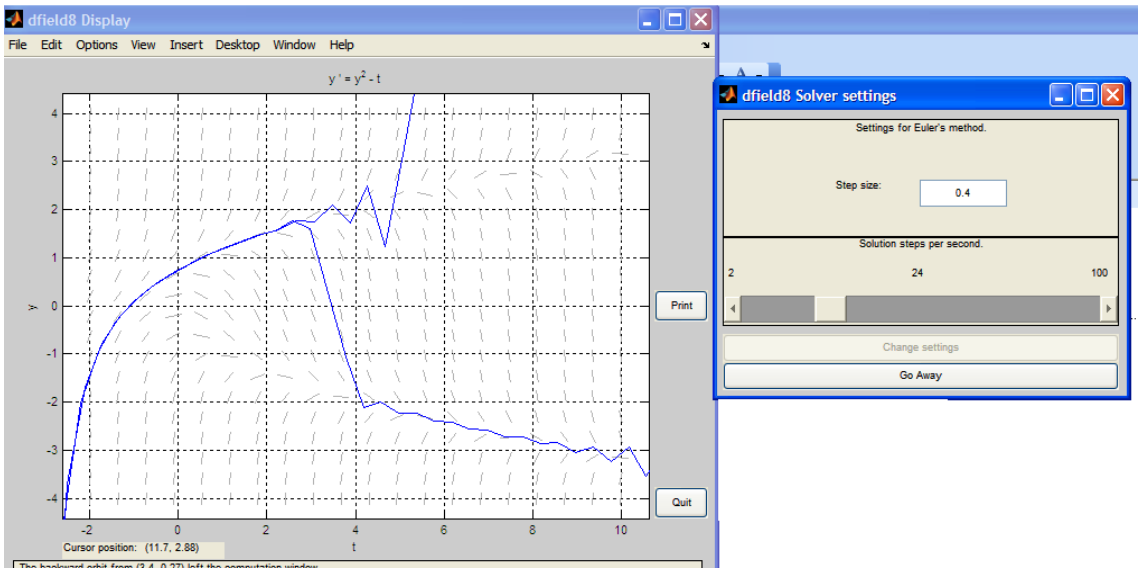


% En "Options", en "Solver", vemos que podemos cambiar de método: de Dormain-Prince a Euler o Runge-Kutta de orden 2 (Rk2) o de orden 4 (Rk4). Elegimos "Euler" y ejecutamos, y en "Solver settings" damos un tamaño de paso muy grande, para darnos cuenta de lo mal que dibuja las supuestas soluciones: la razón es que realmente se trata de un método numérico, esto es, el entorno aparte de darnos la visión del campo de direcciones que nos permite intuir como son las soluciones, cuando pinchamos en un punto lo que calcula es una solución numérica pasando por ese punto, y por lo tanto tenemos que asegurarnos que existe solución única en el intervalo que le damos, y todo esto dependiendo del tamaño del paso (ejecutar "Change settings" para cambiar de paso)

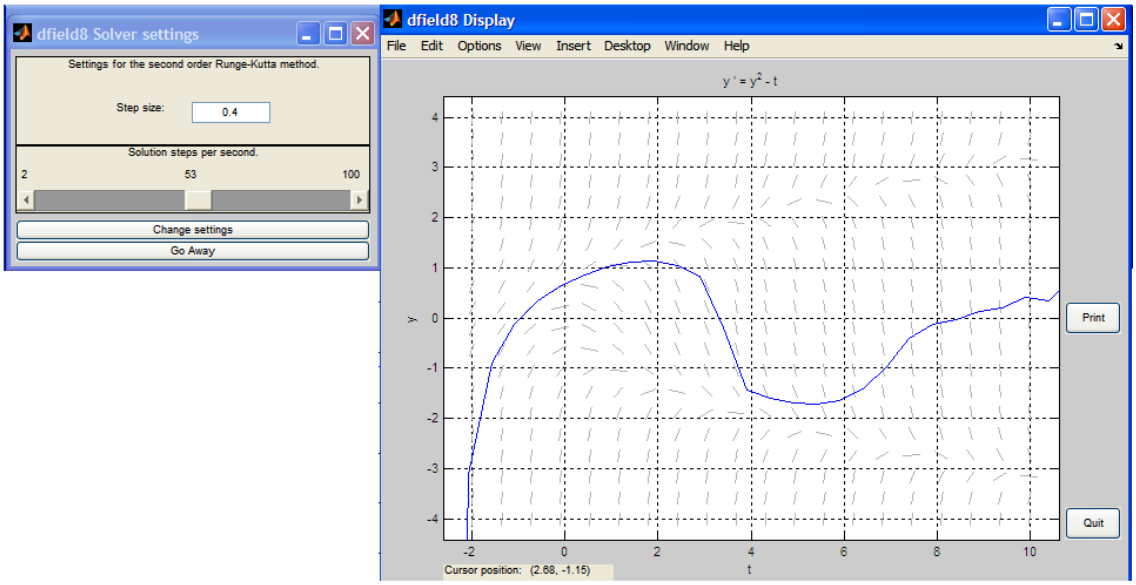
% Para la elección "Euler", tamaño de paso h=0.1 (se puede pedir que vaya más o menos despacio cambiando número de iteraciones por segundo), aparentemente nos da bien la solución



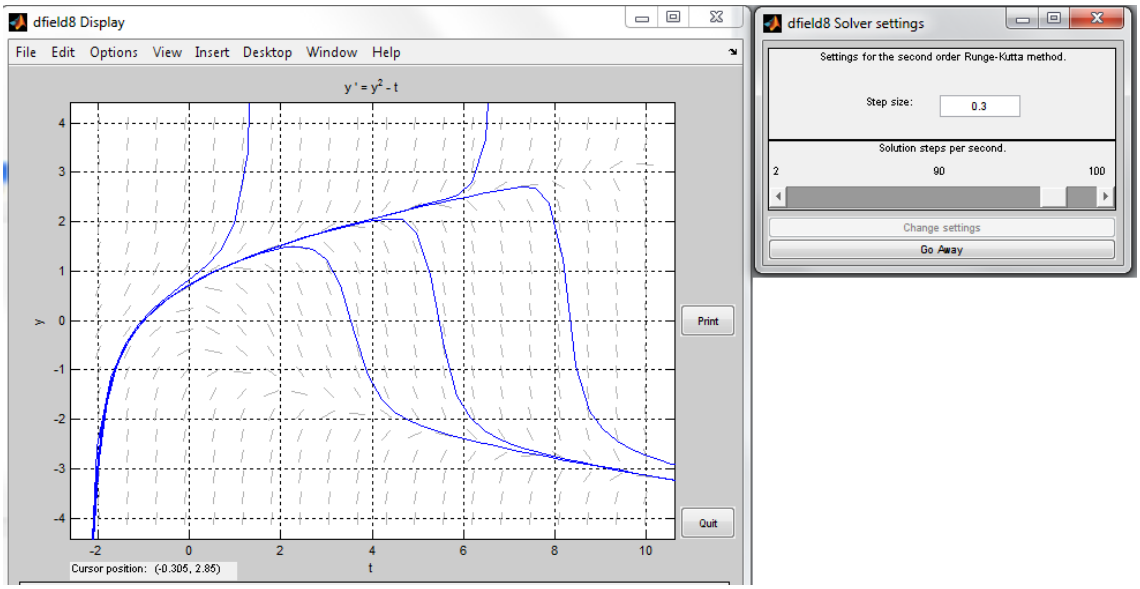
% Para un paso más grande, como h=0.4, y "Euler", vemos dibujos angulosos de la solución que no siguen la dirección del campo. La aproximación es obviamente muy mala.



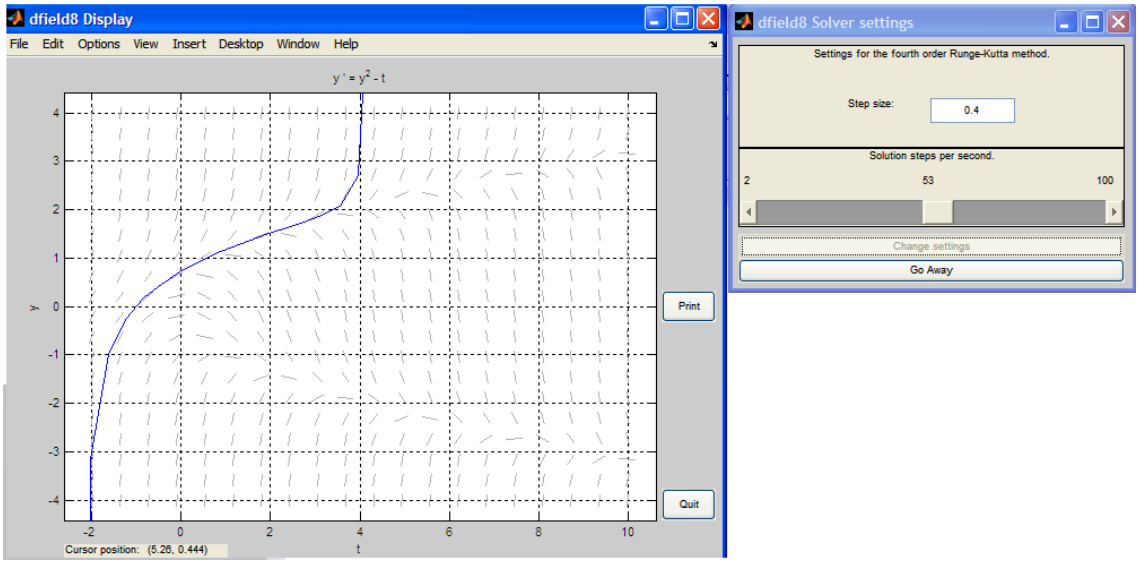
% Eligiendo el método "Rk2" para este mismo paso h= 0.4, vemos que los dibujos no son tan angulosos, pero tampoco las soluciones siguen la dirección del campo



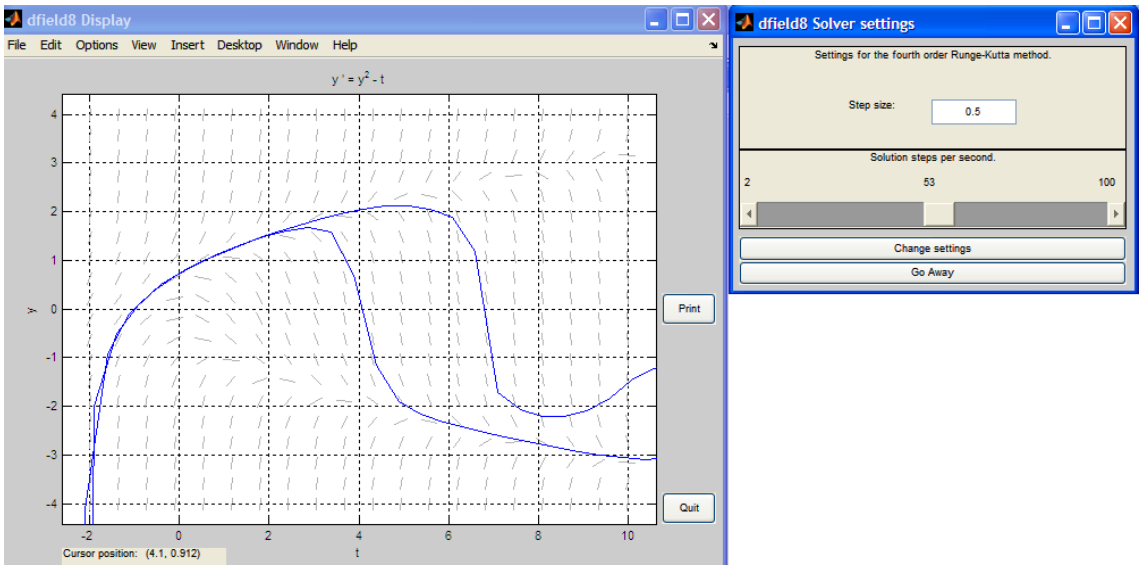
% Mientras que para h=0.3, con "Rk2", podría pensarse en una aproximación relativamente buena (al menos donde la solución no crece rápidamente)



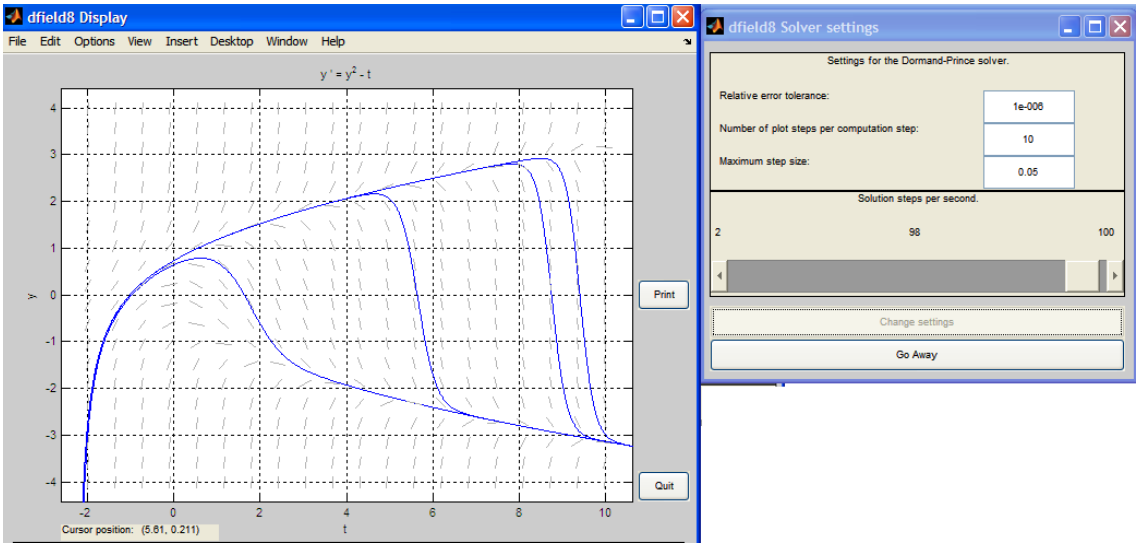
% Hacemos lo mismo con "RK4", para h=0.4, vemos que la aproximación es bastante mejor y relativamente buena



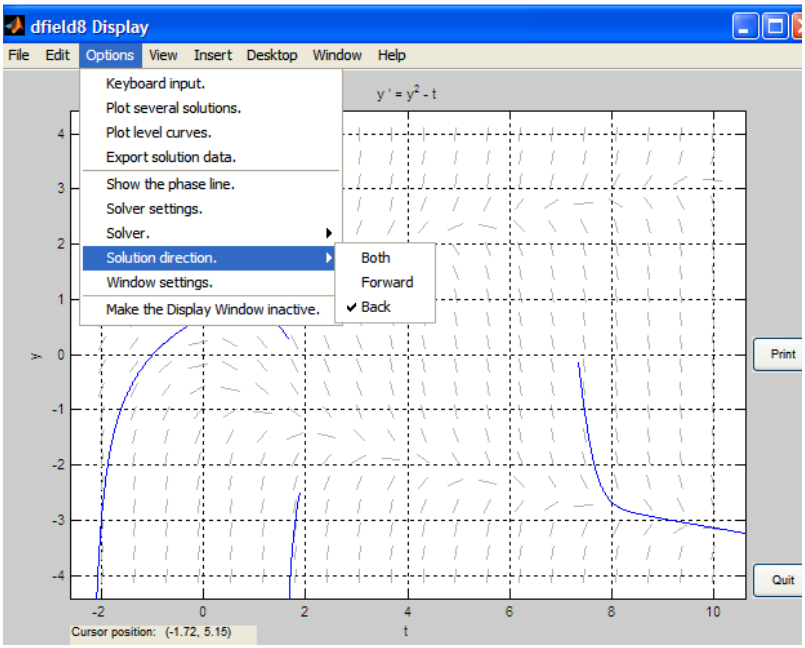
% pero con "Rk4", y para h= 0.5, abajo se ve una mala aproximación; por supuesto, todo depende de la ecuación y del intervalo



% Finalmente, observamos que el mejor método es el Dormand-Prince de paso variable, que va adaptando el tamaño del paso para que el error sea menor y el paso no muy grande. Vemos que pidiendo al entorno que haga el tamaño máximo del paso más pequeño, las gráficas captan mejor el crecimiento de las curvas solución acoplándolas al campo…



*% **Observación:** las opciones sobre dirección de la solución permiten dibujar hacia adelante, desde el punto donde pinchamos, o hacia atrás o por defecto en ambas direcciones*



Ejercicio 4.2

% Se trata de una ecuación lineal y'+y=3+cos(t), que tiene soluciones definidas en toda la recta real; se pueden calcular explícitamente y dibujarlas. Con el campo de direcciones observamos que todas las soluciones tienden asintóticamente a una de ellas cuando t tiende a infinito (es un tipo de ecuaciones que aparece en modelos de circuitos eléctricos, e.g.).

>> syms t

>> dsolve('Dy=-y+3+cos(t)') *% solución general*

ans =

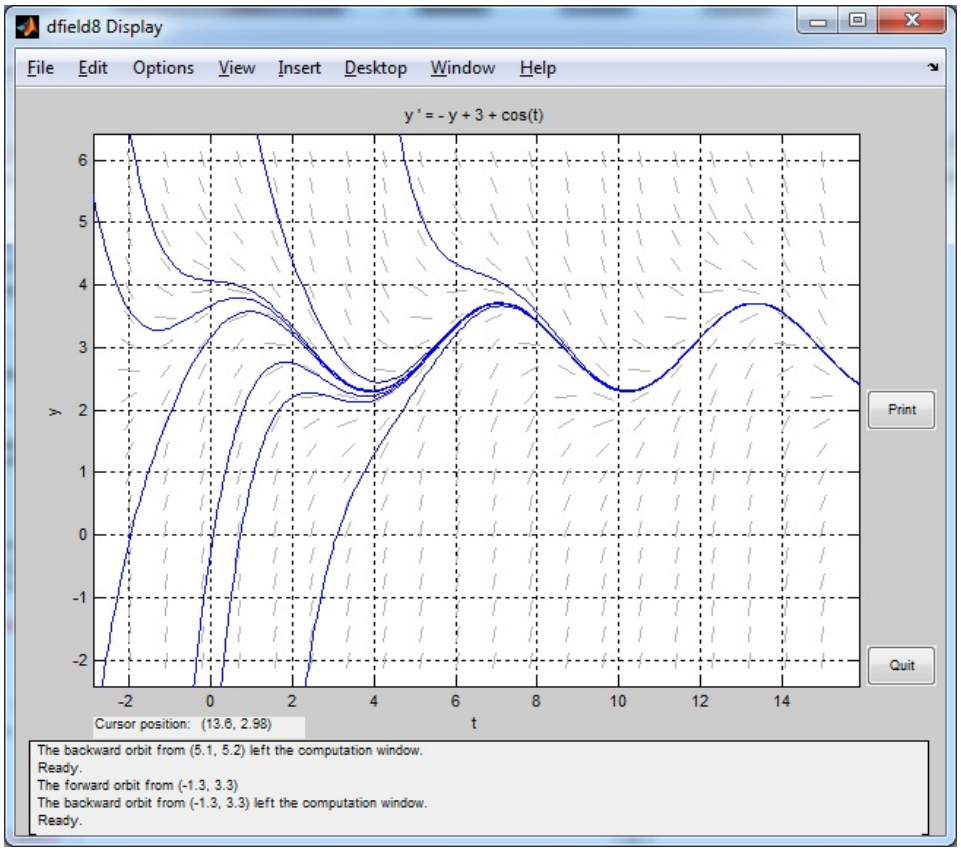
cos(t)/2 + sin(t)/2 + C11/exp(t) + 3

>> pretty(ans)

```
  cos(t)   sin(t)    C11
  ------ + ------ + ------ + 3
    2        2       exp(t)
```

% Con estas fórmulas explícitas se ve que todas las soluciones "convergen cuando t tiende a infinito" a la solución particular y=cos(t)/2 + sin(t)/2 + 3 de la ED. Introduciendo la ED en dfield8

>> dfield8

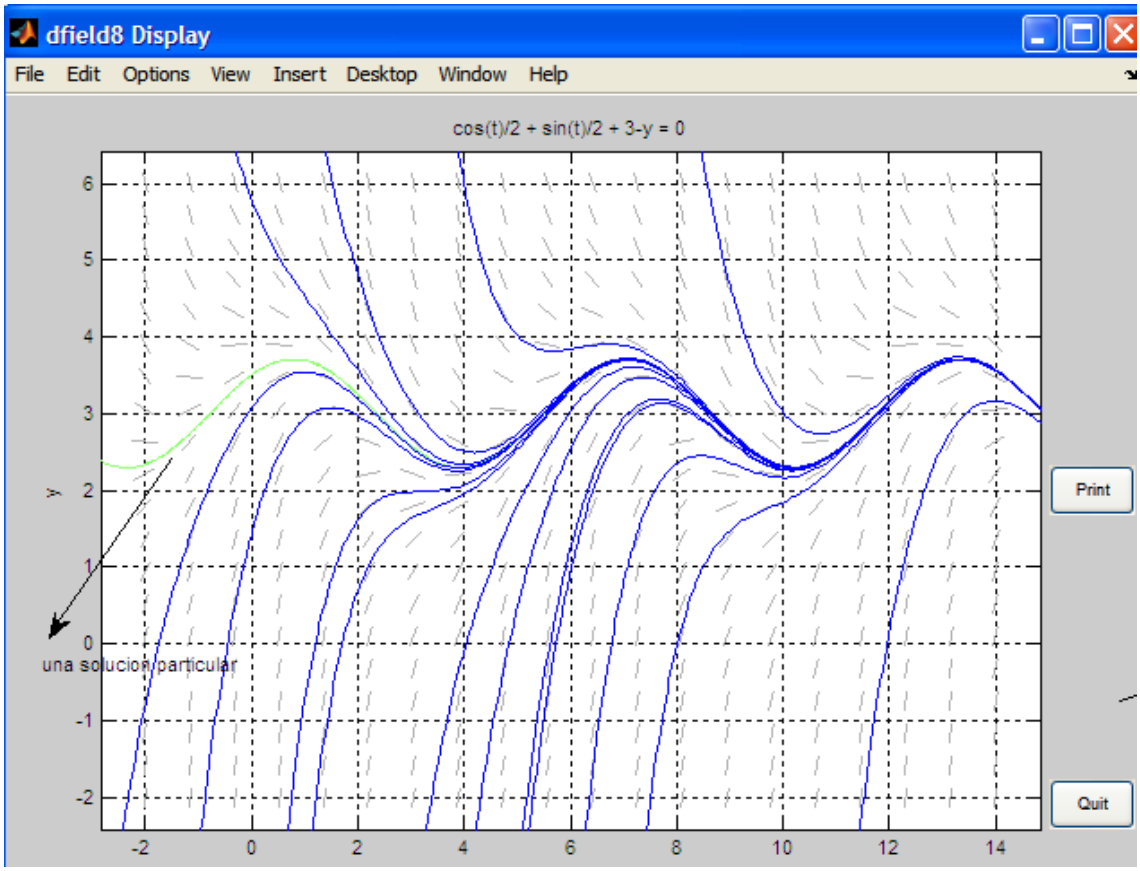


% También el entorno dfield8 muestra las soluciones en [-2,14]x[-2,6] "acercándose asintóticamente" a una de ellas, que es la solución particular y= cos(t)/2 + sin(t)/2 + 3; fuera del entorno dfield hacemos la gráfica de esta solución (abajo, en verde);

>> ezplot('cos(t)/2 + sin(t)/2 + 3-y',[-2,14,-2,6])

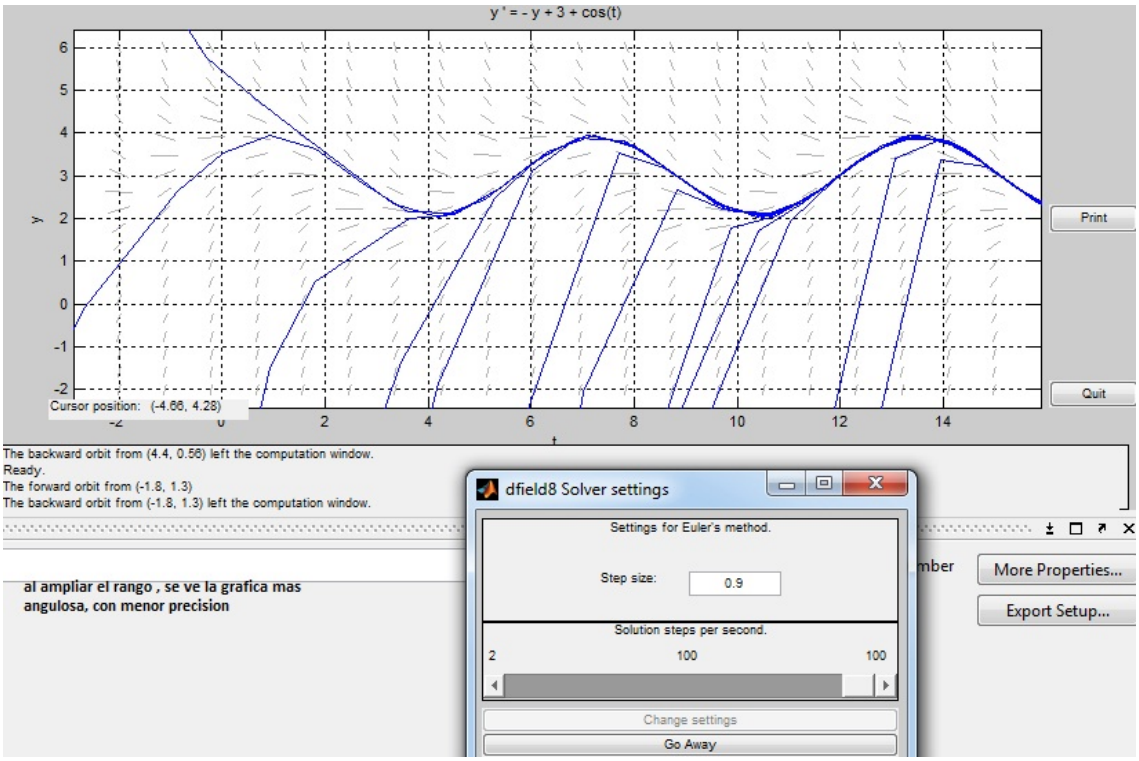
% dependiendo de la versión de Matlab /dfield, hay que indicar el intervalo de dibujo

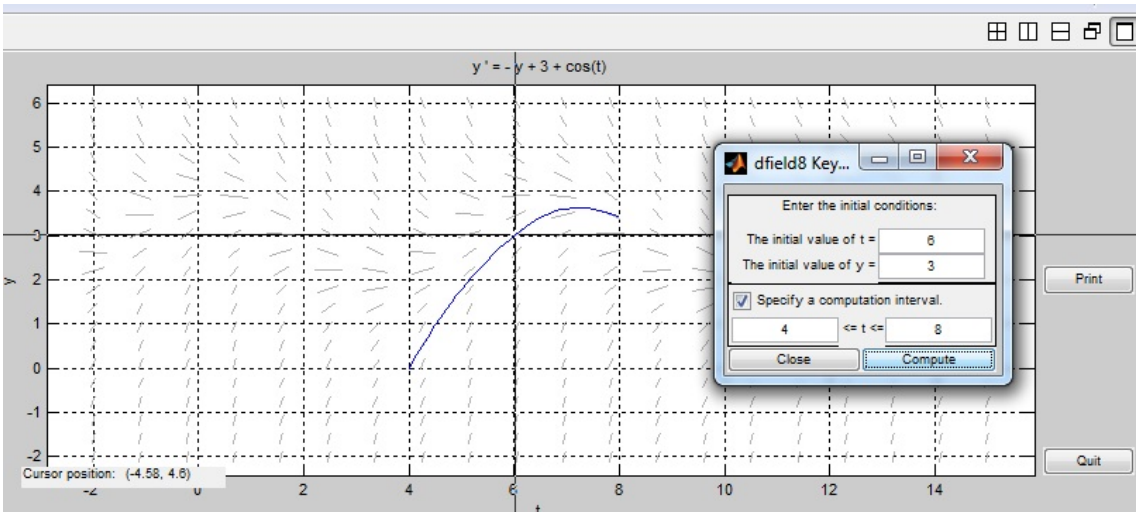
>> gtext('una solucion particular')



% Sin embargo, de nuevo, el dibujo puede resultar engañoso, pues existe una única solución pasando por cada punto del plano como asegura el teorema de existencia y unicidad de solución; esto se visualiza aplicando un zoom.

% También observamos, abajo, que si cambiamos el tamaño del paso en el método numérico utilizado (el elegido en dfield), las gráficas de las aproximaciones pueden volverse angulosas, mientras que la gráfica dibujada con ezplot (la solución exacta) no es angulosa. En opciones de lectura, se puede leer del teclado un punto y experimentar con el tamaño del paso, el intervalo, etc.



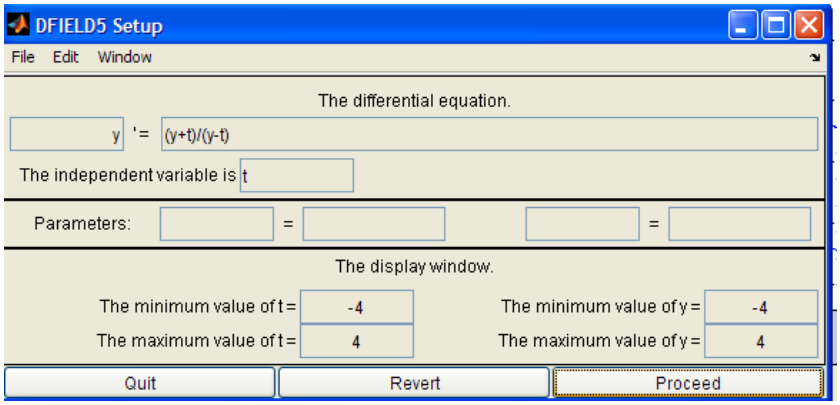


*% **Observación**: (dependiendo de la versión) en la carátula/interfaz "dfield8 Setup", "Gallery" nos da la opción de elegir modelos de circuitos con muchos parámetros, que al variarle pueden dar lugar al tipo comportamiento asintótico observado en el ejemplo.*

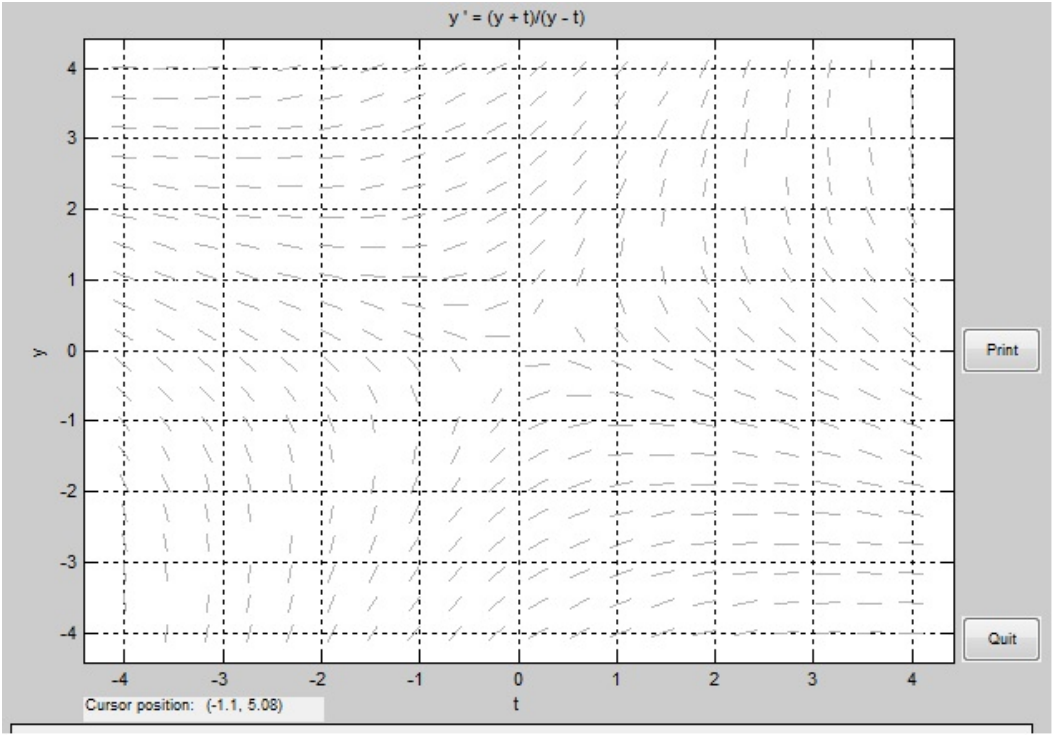
Ejercicio 4.3

>> dfield8

% Se introduce en el entorno la ecuación homogénea y'=(y+t)/(y-t) (ED de este tipo se han resuelto explícitamente en el segundo cuaderno del curso). Como complemento al campo de direcciones, dibujamos las curvas donde las soluciones pasan de crecientes a decrecientes, de cóncavas a convexas, y varias isoclinas. Para ello combinamos "dfield" y "ezplot"



% Pinchando en "Proceed"



% Dibujamos las rectas que marcan cambio de concavidad de las soluciones

>> syms t y

>> ezplot('y-(1-sqrt(2))*t')

>> ezplot('y-(1+sqrt(2))*t')

*% a veces hay que indicar el intervalo de dibujo; e.g.: ezplot('y-(1-sqrt(2))*t',[-4,4])*

% Abajo, rectas donde hay cambios de crecimiento de las soluciones

>> ezplot('y-t')

>> ezplot('y+t')

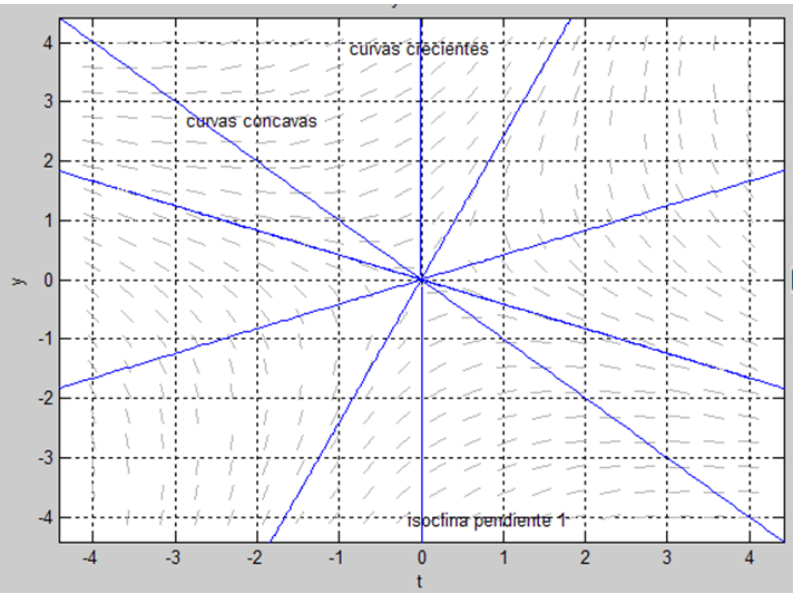
>> ezplot('((y+t)/(y-t))-1') *% isoclina para la pendiente 1*

% escribimos textos complementarios

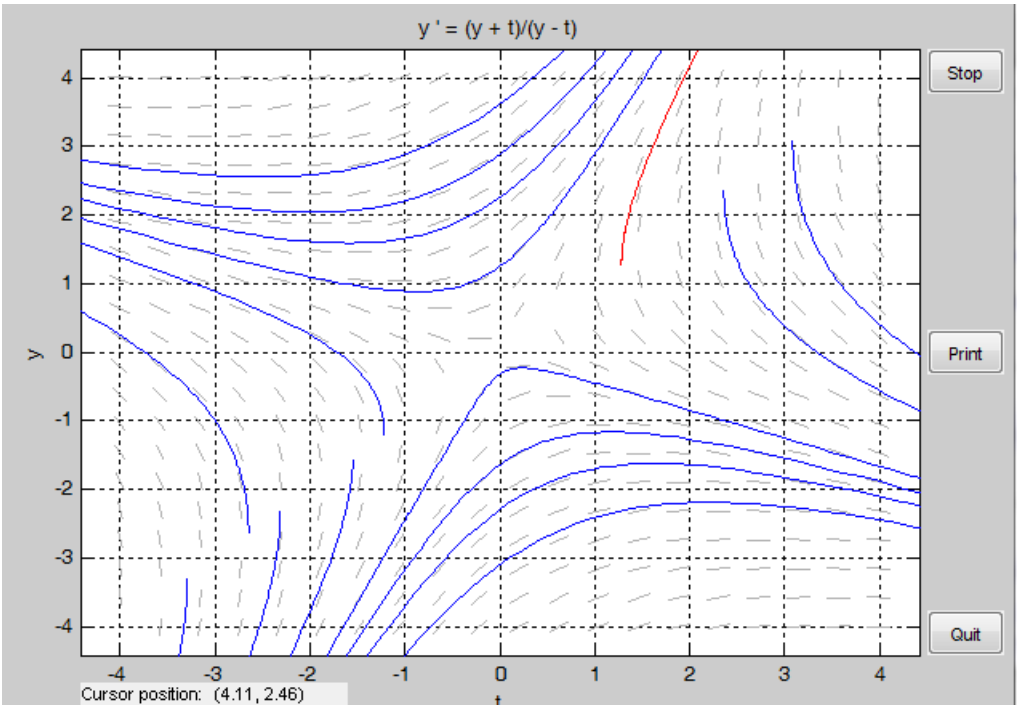
>> gtext('isoclina pendiente 1')

>> gtext('curvas concavas')

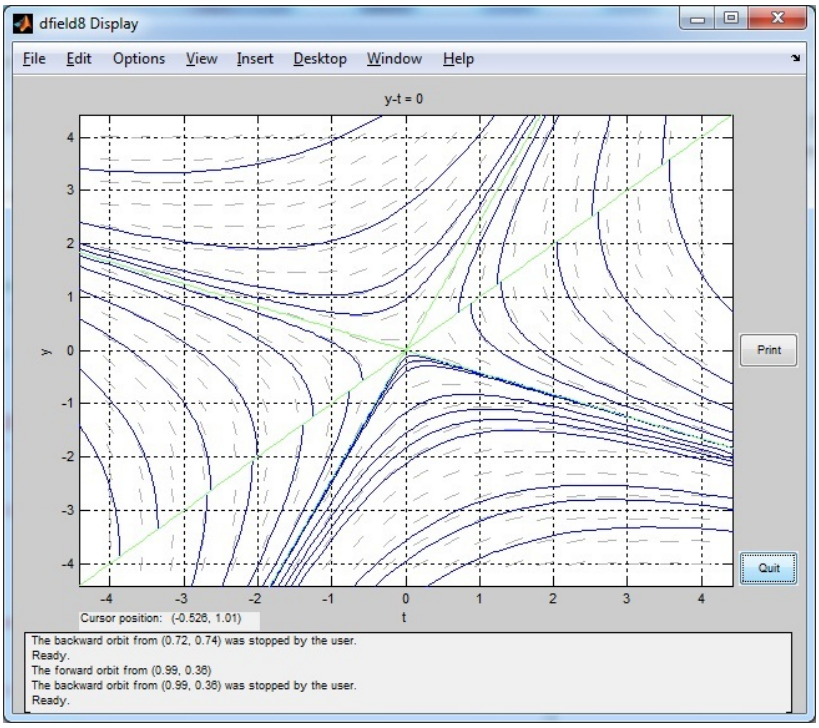
>> gtext('curvas concavas')



% Vemos que pinchando en distintos puntos tenemos la curva solución, aparentemente tangente a los vectores del campo, pero lo que realmente tenemos en el entorno son soluciones numéricas. Por eso cuando llegamos a los puntos donde la pendiente es infinito (en este caso la diagonal y=t del cuadrado) se tienen problemas en visualizar la aproximación (y la dibuja o no dependiendo de la versión del entorno. A veces hay que pinchar en "Stop": ver línea en rojo).



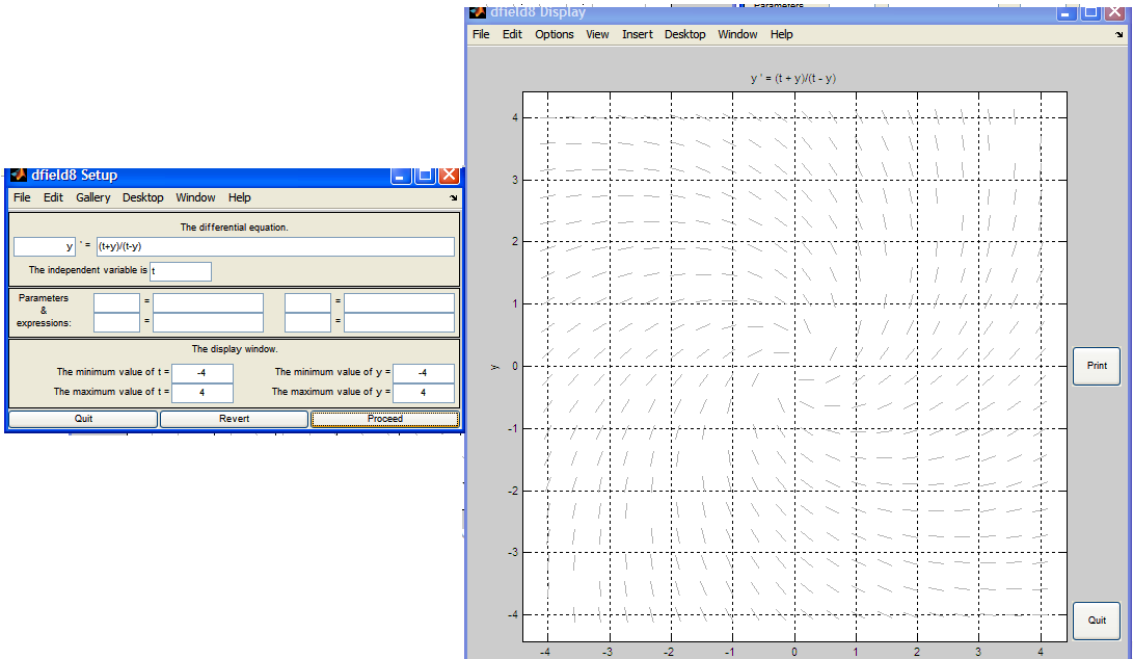
% Abajo, en verde, las líneas que marcan los cambios de concavidades en las soluciones (vemos que son dos posibles soluciones), y la diagonal t=y



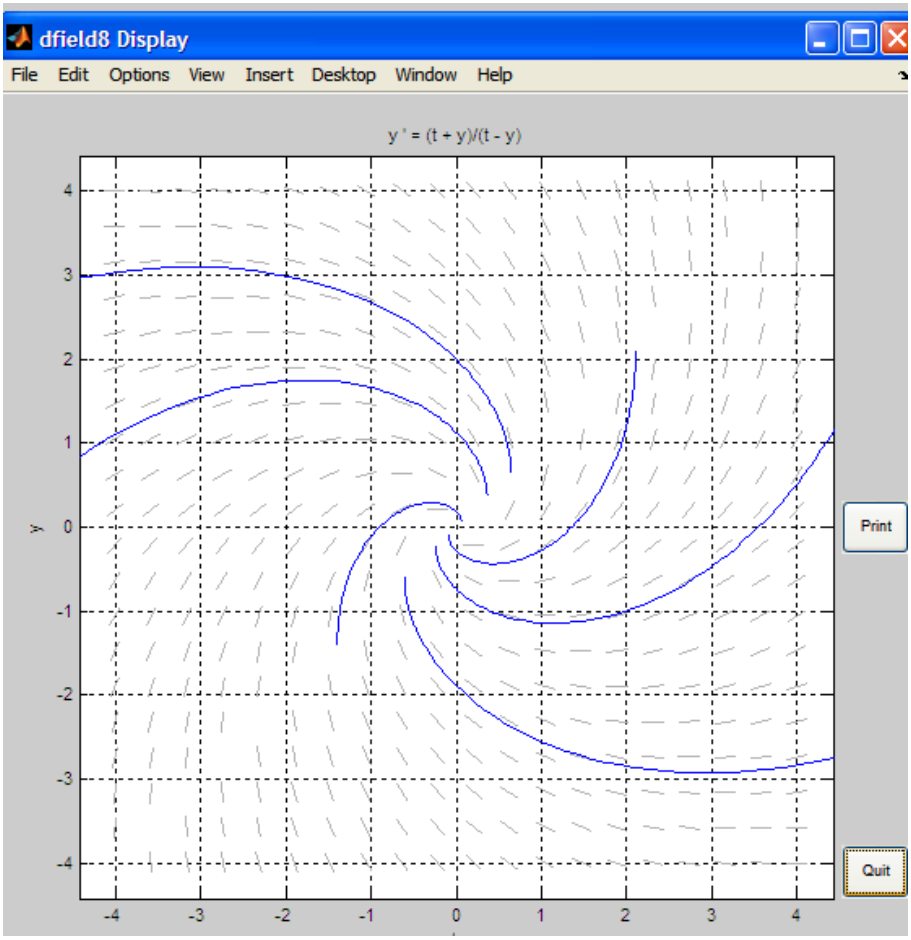
Ejercicios 4.4-4.5:

>> dfield8

% Se introduce en el entorno la ecuación homogénea y'=(y+t)/(t-y)

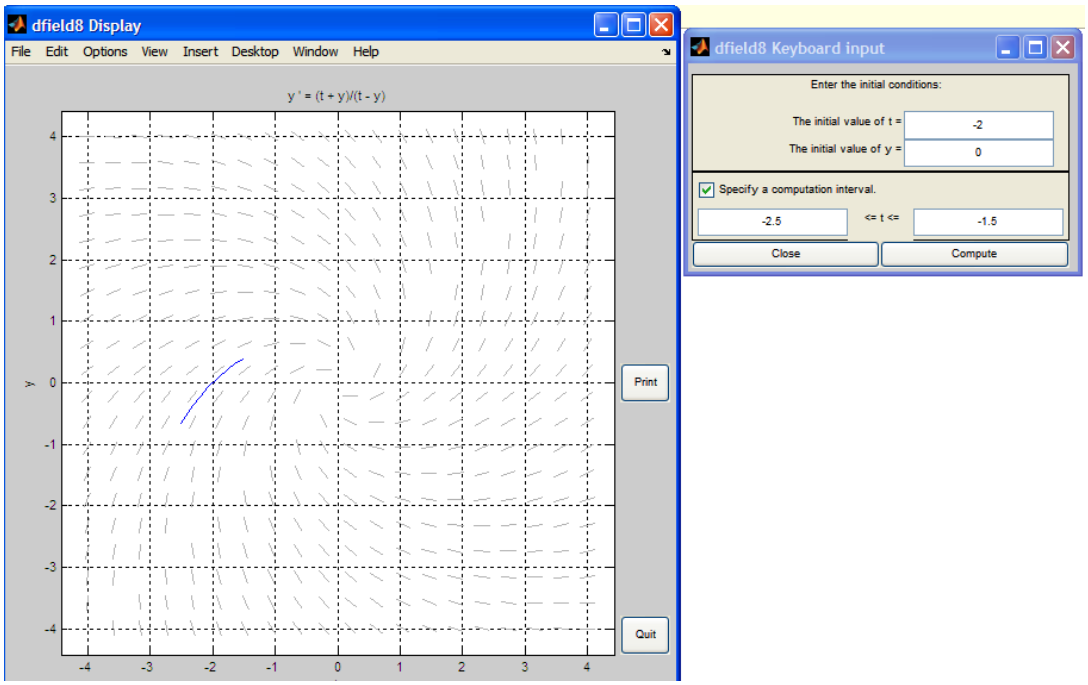


% Como en el ejercicio 4.3, se trata de un ejemplo en el que se pone de manifiesto de que visualizar el campo de direcciones puede ser mejor que intentar obtener la aproximación de las curvas integrales pinchando en distintos puntos de la interfaz gráfica: la solución que intenta darnos el entorno es numérica, y no puede en los puntos de la diagonal, donde no tenemos garantizado que exista una única solución (en forma explícita)

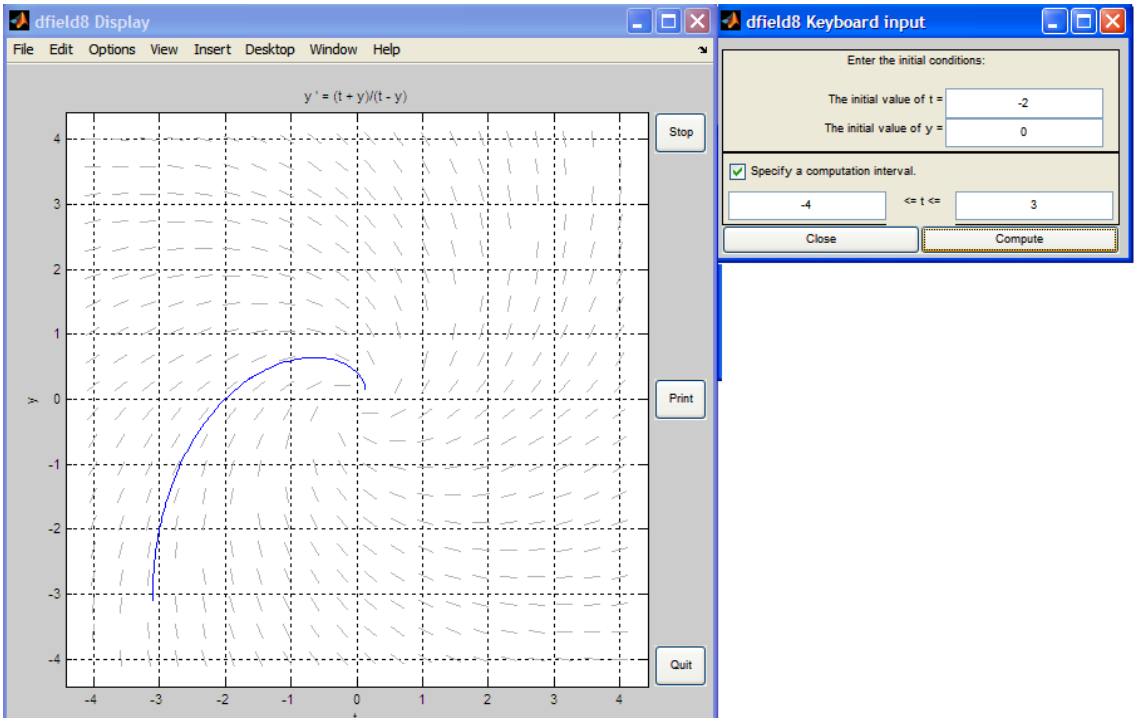


% Si el punto (t_0,y_0) que leemos no está en la diagonal t=y, se sabe que hay un intervalo, conteniendo a t_0, en el que hay definida una solución en forma explícita, y que se puede aproximar numéricamente, pero al aumentar el intervalo llega un momento en que la gráfica de la solución llega a la diagonal, y no puede aproximarse numéricamente (la pendiente es infinito en estos puntos de la diagonal)

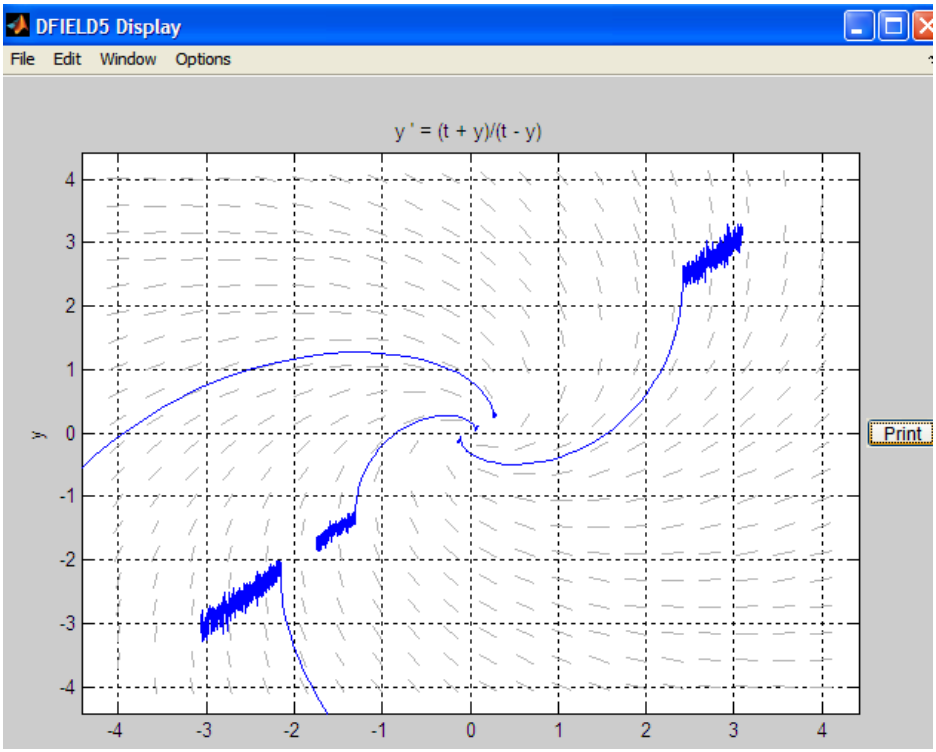
% Por ejemplo, leyendo del teclado el punto (-2,0), pedimos al entorno que dibuje la aproximación de la solución en el intervalo [-2.5,-1.5], que vamos ampliando a [-3,-1], y a un intervalo más grande; vemos que al llegar la gráfica a la diagonal y=t ya no puede haber una aproximación numérica



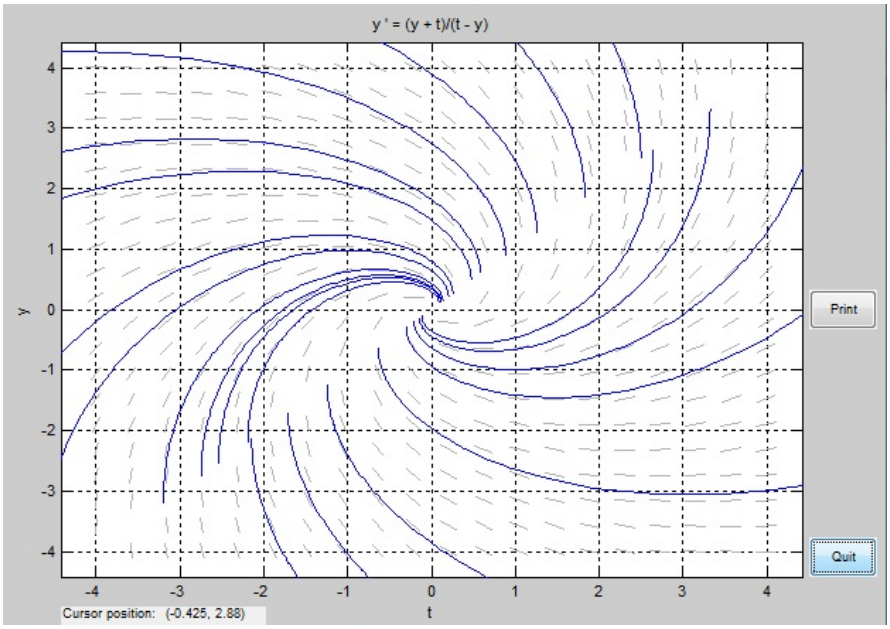
% La solución explícita no está definida en (-4,3) y por tanto como vemos abajo tenemos que indicar (pinchando en "Stop") que se pare proceso…



% Con versiones previas de dfield el entorno nos da errores más notables; por ejemplo abajo con "dfield5" hay que pedirle que pare (pinchando en Stop) para evitar las "oscilaciones" de las gráficas al llegar a la diagonal y=t



% con otras versiones del entorno, como dfield8, las oscilaciones no aparecen



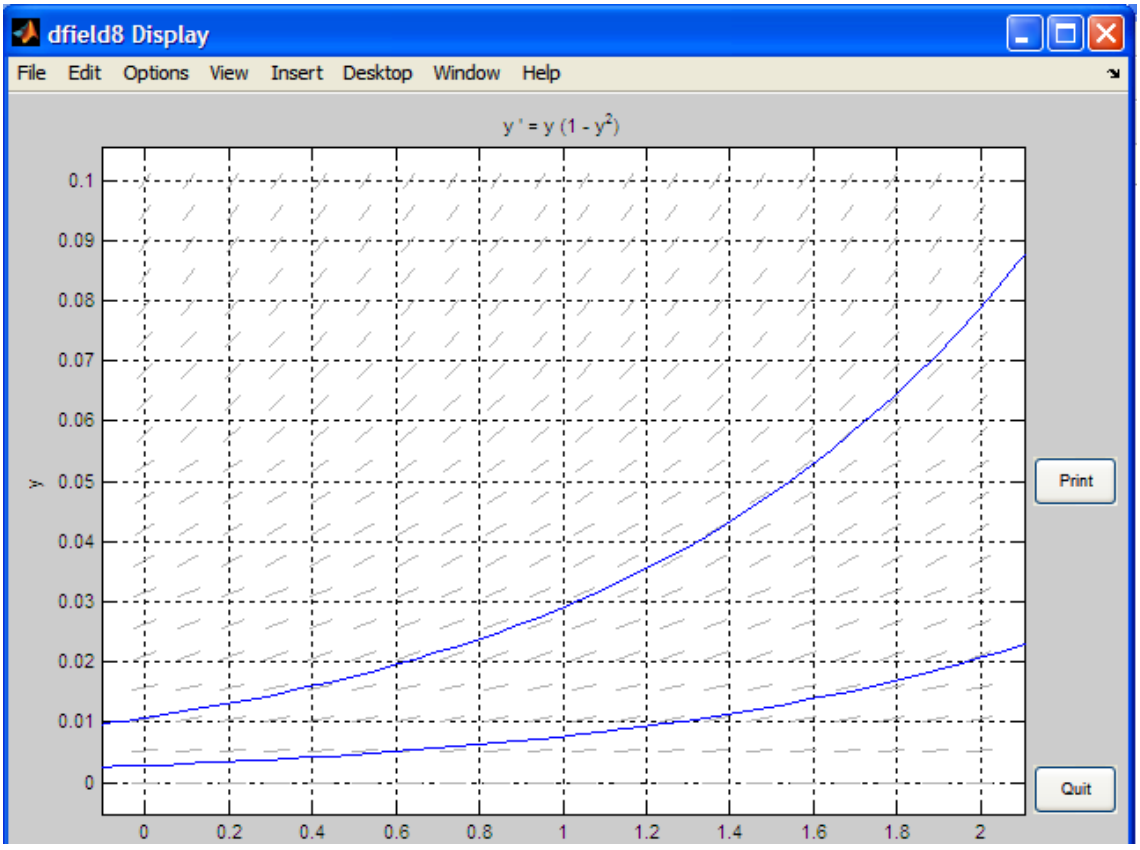
*% **Observación:** para la ecuación homogénea y'=(y-t)/(y+t), las pendientes infinitas se encuentran en la diagonal y=-t*

Ejercicio 4.6

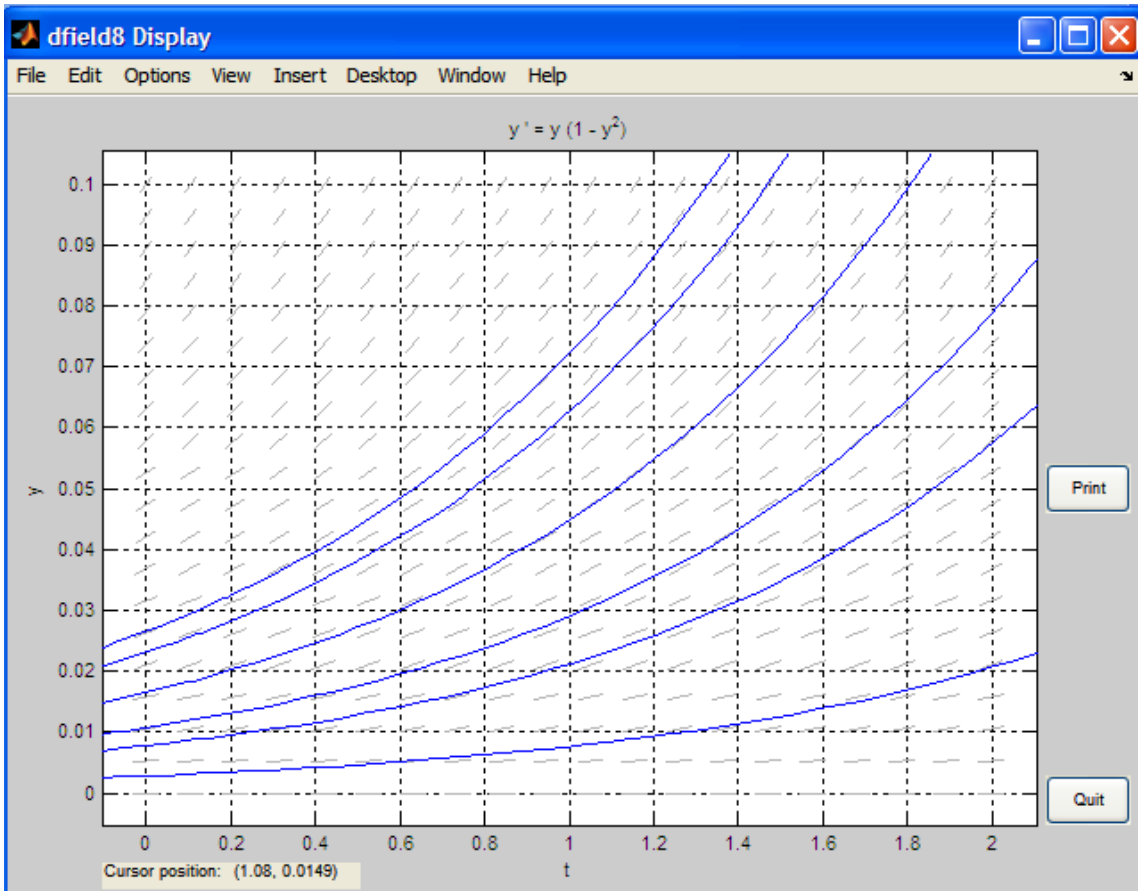
% La ecuación de Bernouilli y'=y(1-y^2) sirve como ejemplo para ilustrar cómo pequeños errores en datos iniciales pueden afectar de manera importante a la solución en puntos alejados del dato inicial.

>> dfield8

% Abajo, con dfield8, en el rectángulo [0,2]x[0,0.1], observamos que las soluciones que pasan por puntos muy cercanos entre sí, como (0,0.003) y (0,0.01), son muy distintas en t=2



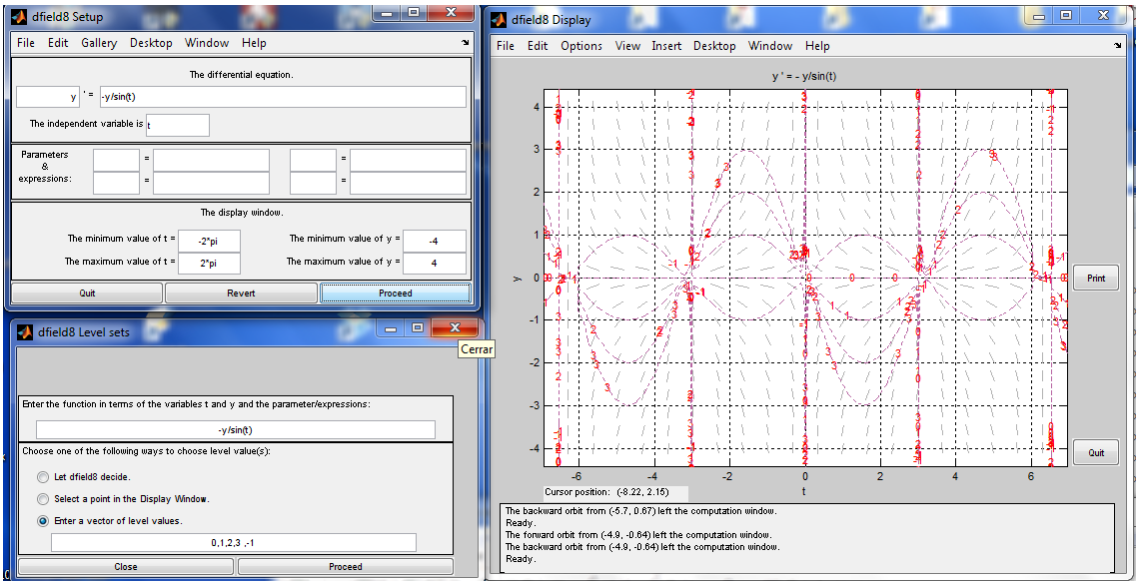
% Abajo varias curvas solución mostrando el mismo efecto: pinchando cerca del punto (0,0), las soluciones varian poco cerca de este punto pero son muy disintas en puntos alejados del (0,0)

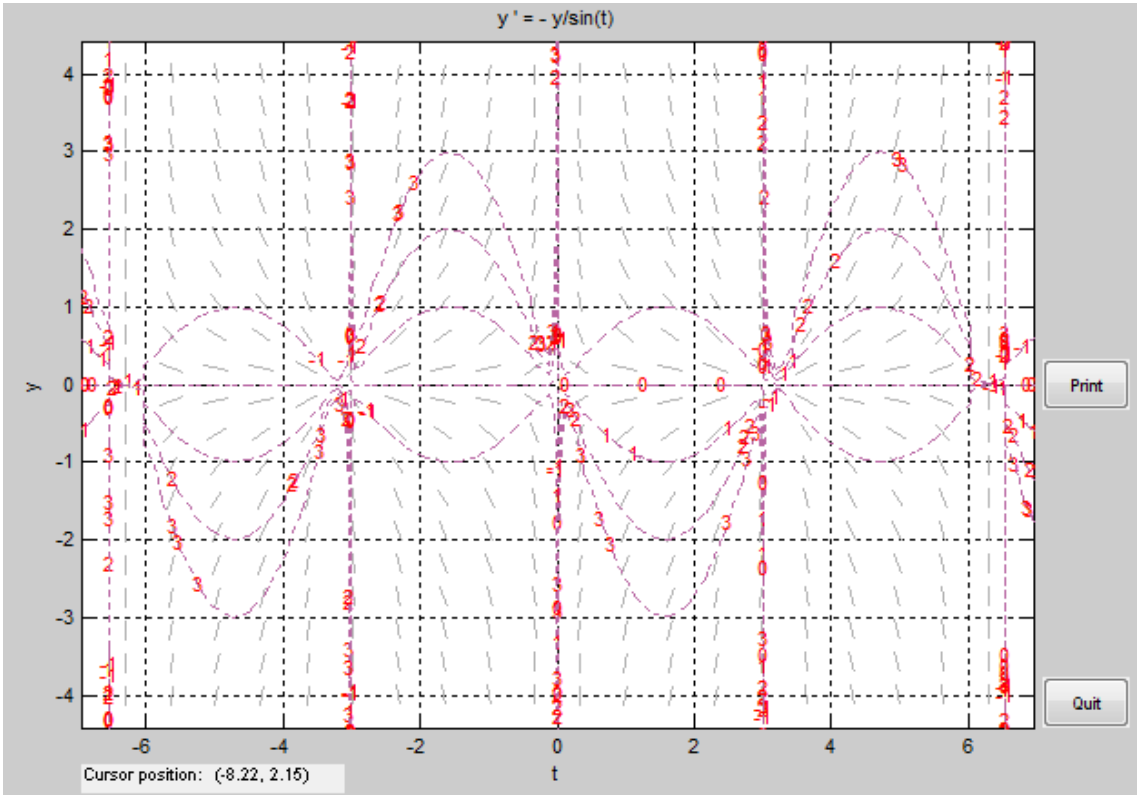


Ejercicio 4. 7

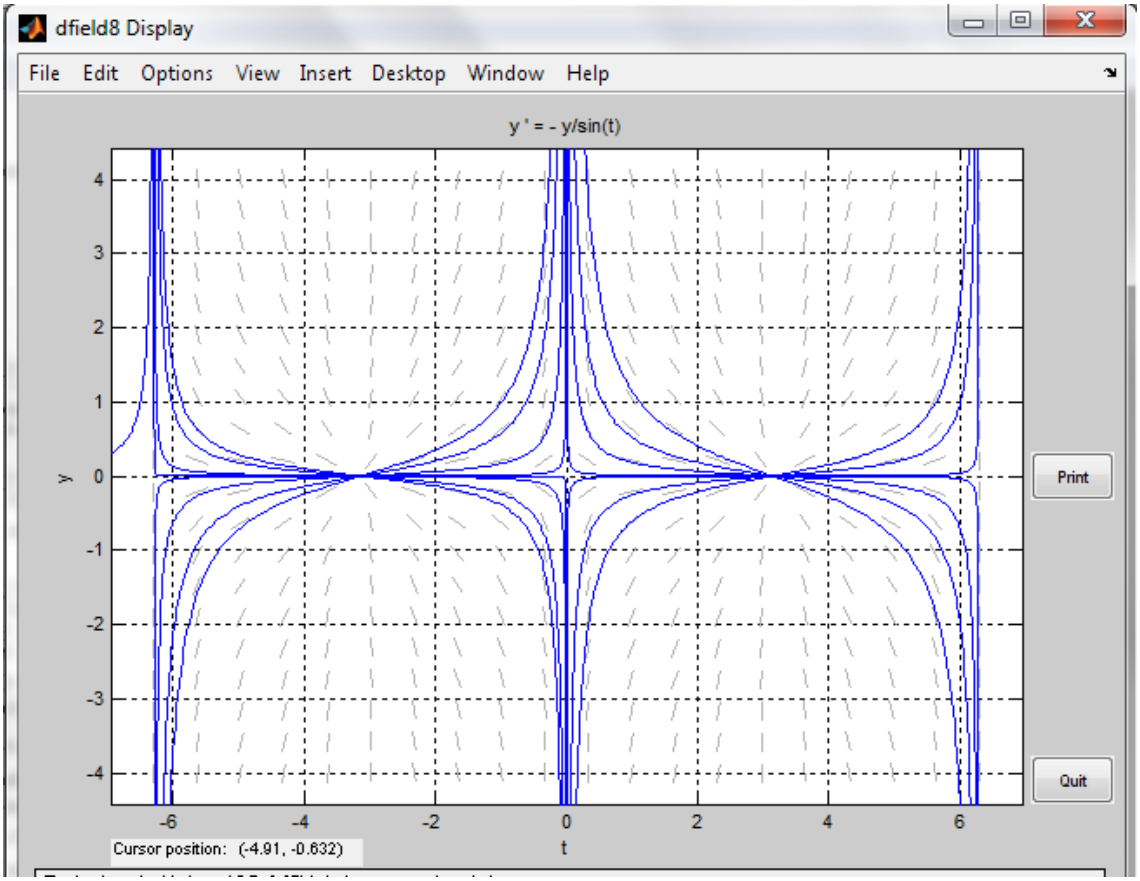
% En la ecuación y'=-y/sin(x), de variables separadas, se observa que el campo de direcciones no está definido en los puntos (kpi,0), con k entero. Las curvas x=kpi e y=0, fuera de esos puntos (kpi,0) (se trata de trozos de rectas), son isoclinas para pendientes infinito y 0 respectivamente, y por tanto, su pendiente coincide con la del vector del campo (la de la ecuación diferencial): se trata de soluciones. Unas definidas en forma inversa, y las otras (y=0) definidas en forma explícita. El resto de las isoclinas para distintas pendientes K son las curvas y=-K sin(x).

% Dibujamos varias con las opciones de dfield8





% Abajo, las curvas integrales, que son tangentes a los vectores del campo



*% **Observación:** dado que la ED y'=-y/sin(x), se puede resolver y encontrar soluciones explícitas y=C cotan(t/2), como comprobamos abajo con "dsolve", dando valores a C, vemos que en efecto el dibujo aproximado que proporciona el campo coincide con el de las curvas solución. Las rectas y=0 y x=kpi son también soluciones salvo en los puntos donde el campo no está definido.*

>> dsolve('Dy=-y/sin(t)')

ans =

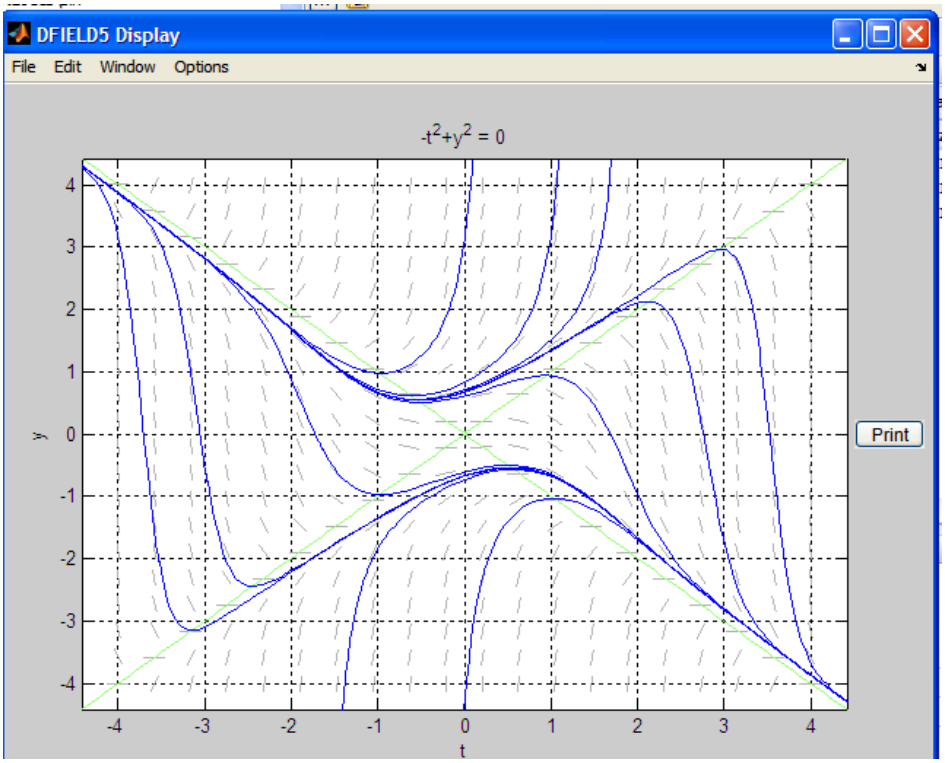
C2/tan(t/2)

Ejercicio 4. 8

% Para la ecuación de Riccati y'= y^2-t^2 dibujamos con dfield y ezplot el campo de direcciones, varias curvas integrales y la isoclina para la pendiente 0.

>> dfield8

>> ezplot('y^2-t^2') *% isoclina para la pendiente cero*



% Observamos que las rectas y=t e y=-t (isoclinas, gráficas en verde) marcan un cambio en el crecimiento de las curvas solución para la ED y'= y^2- t^2.

% En cambio, para la ecuación de Riccati y'=t^2+y^2, el único punto donde la pendiente es 0 es el (0,0); todas las curvas integrales son crecientes. En otras ecuaciones como y'=sqrt(abs(1-t^2-y^2)), las curvas integrales son siempre crecientes y como consecuencia la isoclina para la pendiente 0 no marca un cambio de crecimiento en dichas curvas. Esto se observa en los próximos ejemplos .

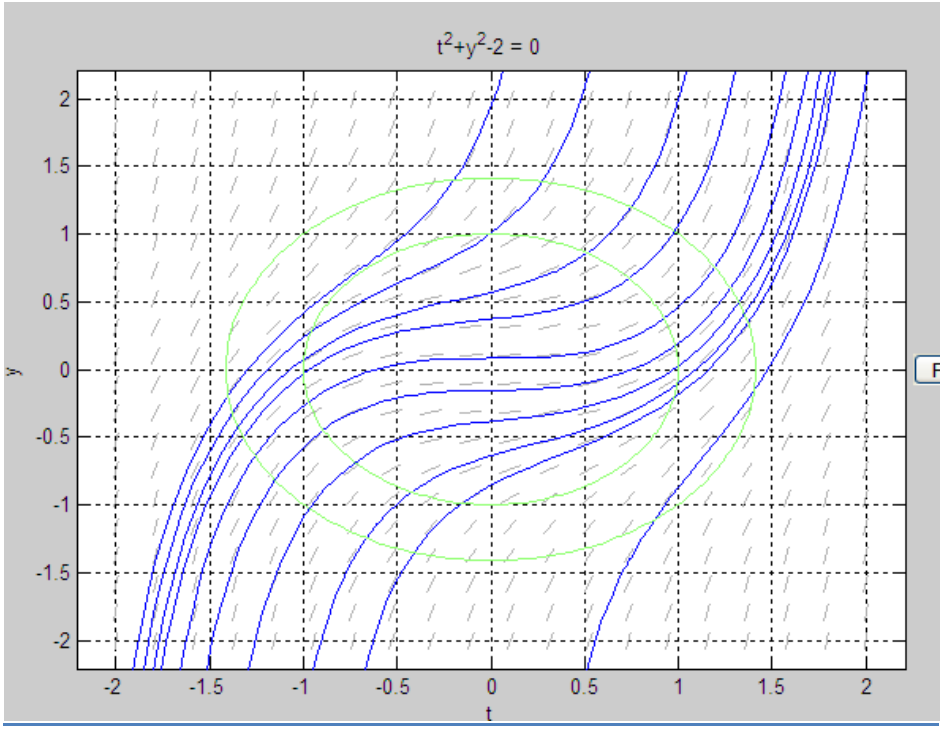
Ejercicio 4. 9

% Ecuación de Riccati y'=t^2+y^2. Dibujo del campo de direcciones / curvas integrales / isoclinas para pendientes 1 y 2 para t e y en el intervalo [-2,2]

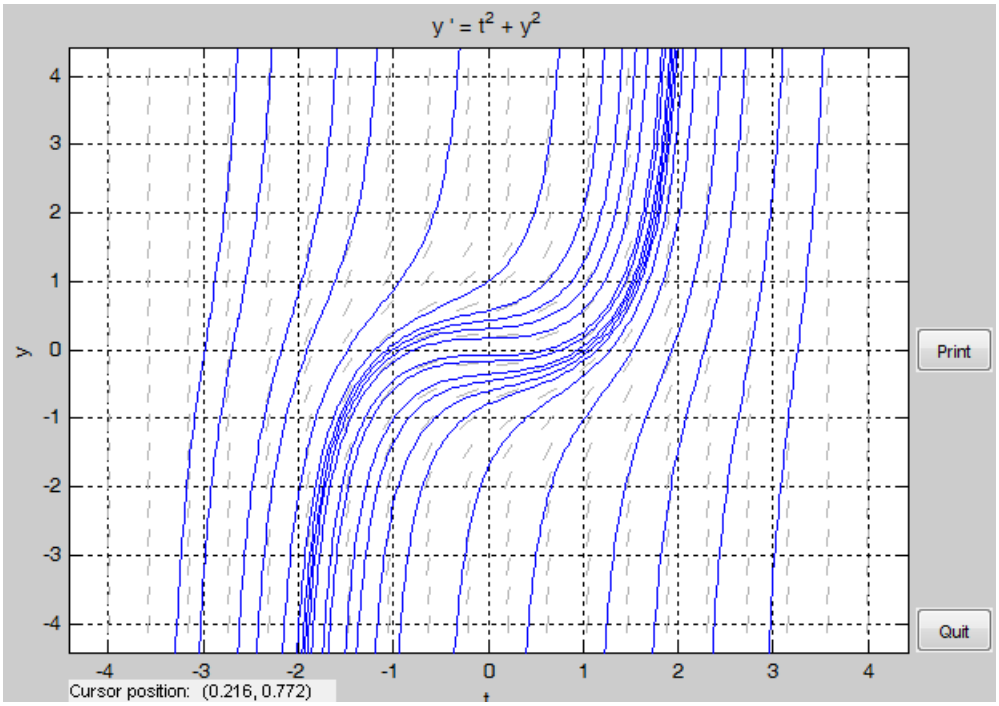
>> dfield8

>> ezplot('t^2+y^2=1')

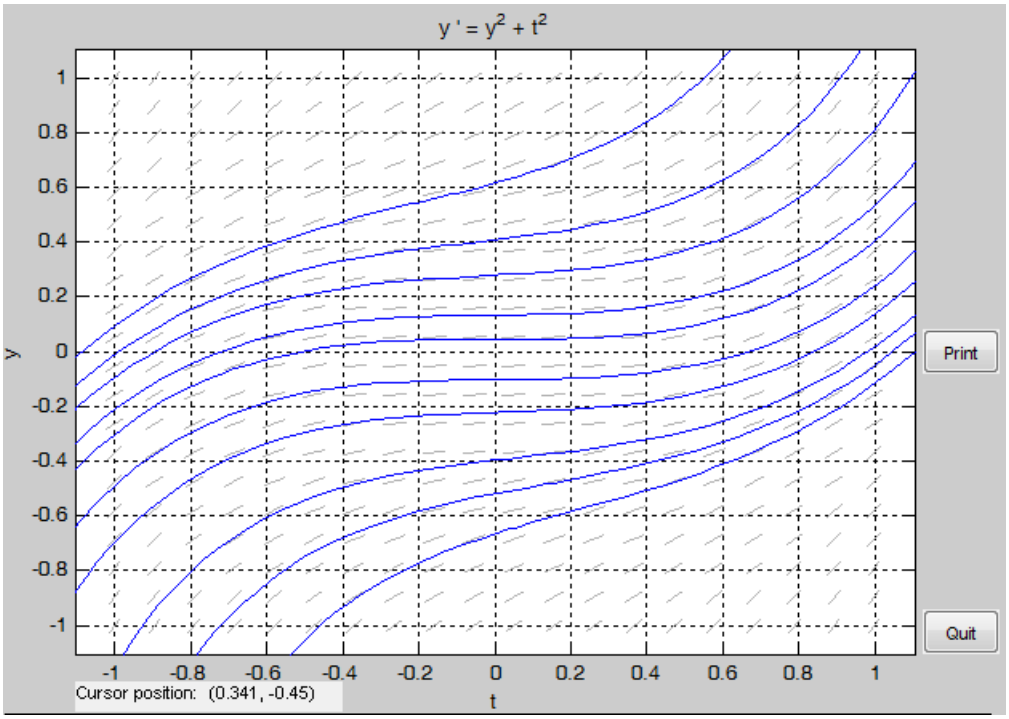
>> ezplot('t^2+y^2=2')



% Bosquejo de las curvas integrales para t e y en los intervalos [-4,4] y [-1,1] respectivamente

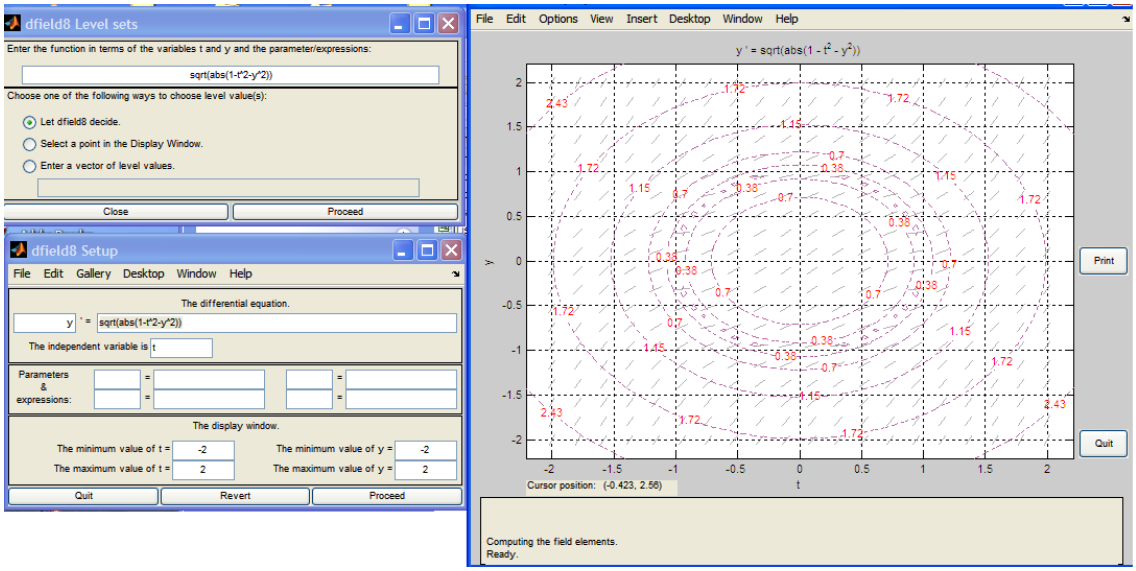


% el gráfico en [-1,1]x[-1,1] es como hacer un zoom cerca del origen

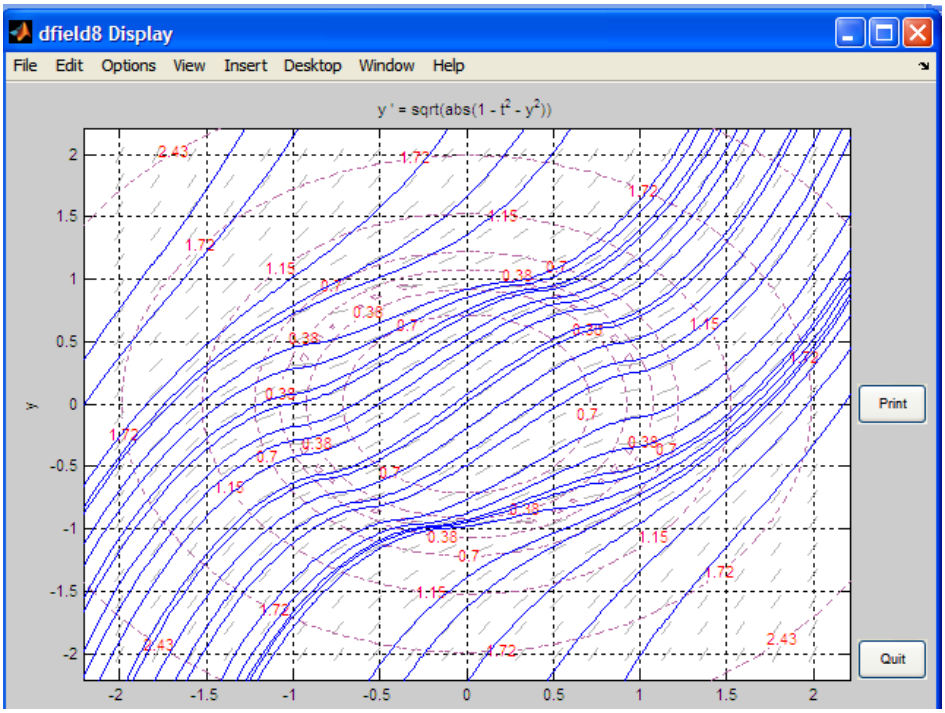


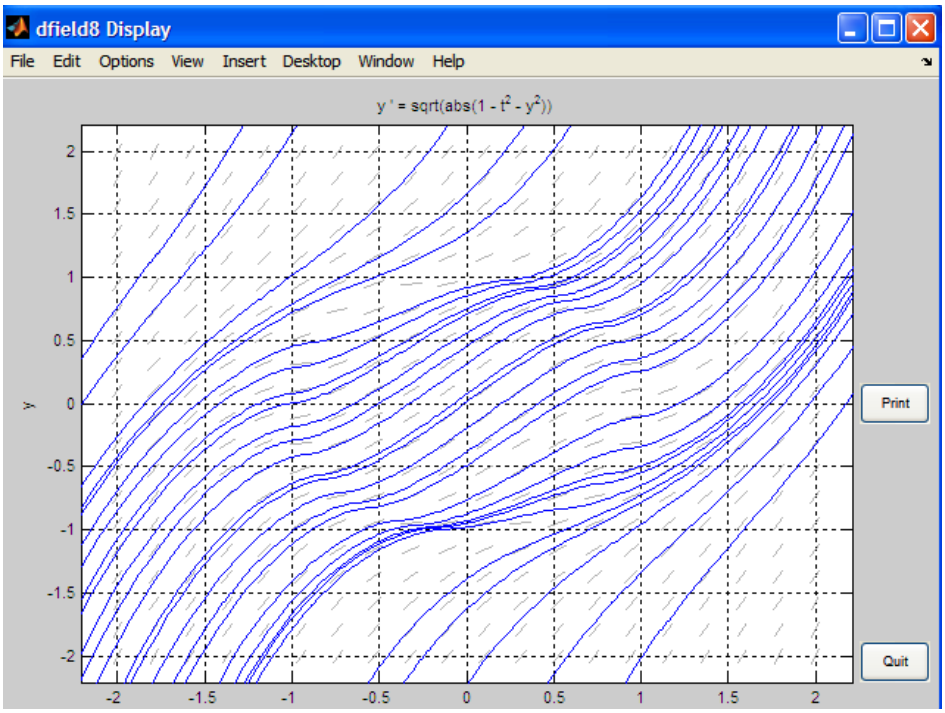
Ejercicio 4. 10

% Para la ecuación diferencial y'=sqrt(abs(1-t^2-y^2)), dibujamos varias isoclinas con las opciones del "Display" de dfield8; abajo, las isoclinas que dfield elige



% Abajo varias isoclinas generadas automáticamente con dfield8 y las curvas solución con y sin isoclinas

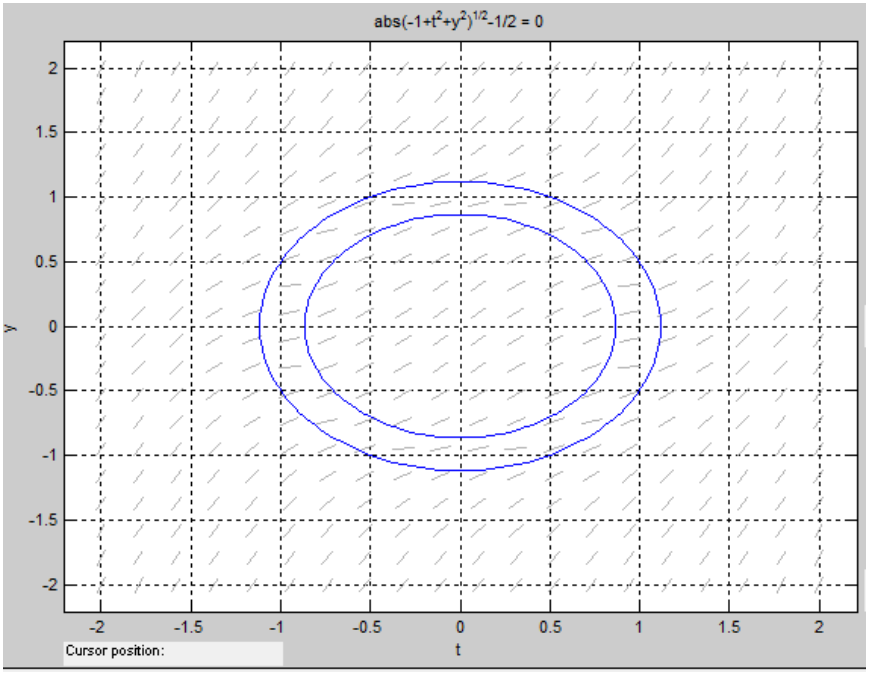




% La isoclina para la pendiente 1/2 con "ezplot": se trata de dos circunferencias

>> dfield8

>> ezplot('sqrt(abs(1-t^2-y^2))=1/2')

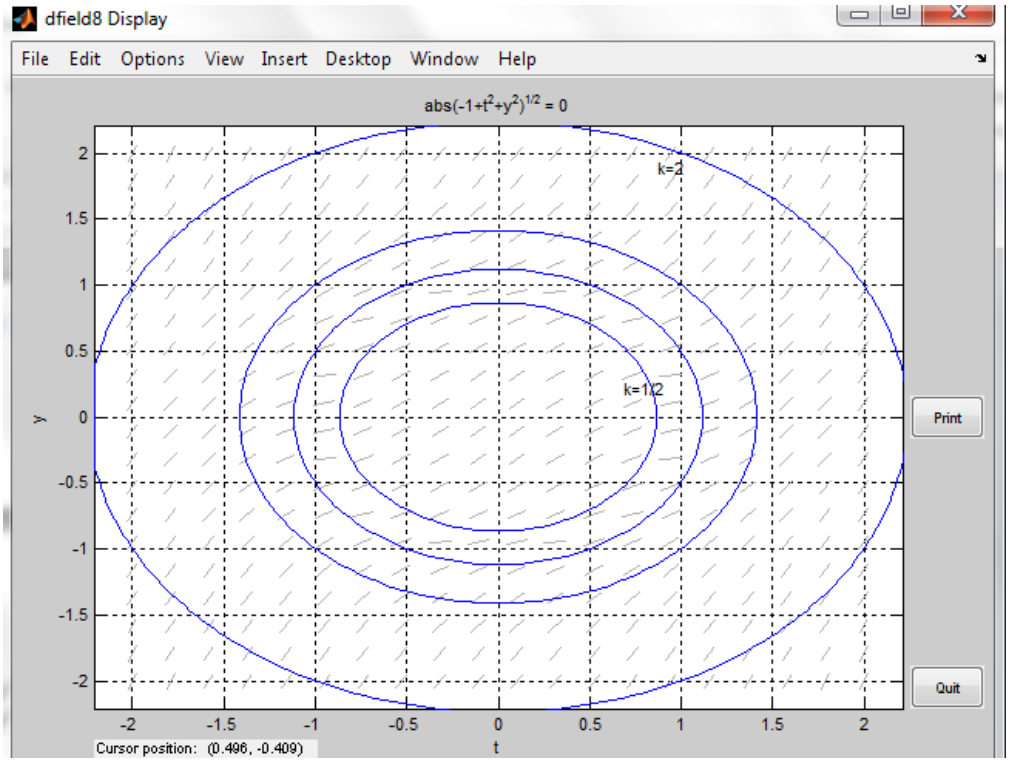


% isoclinas para las pendientes 1, 1/ 2 y 2

>> ezplot(sqrt(abs(1-t^2-y^2))-1/2)

>> ezplot(sqrt(abs(1-t^2-y^2))-1)

>> ezplot(sqrt(abs(1-t^2-y^2))-2)



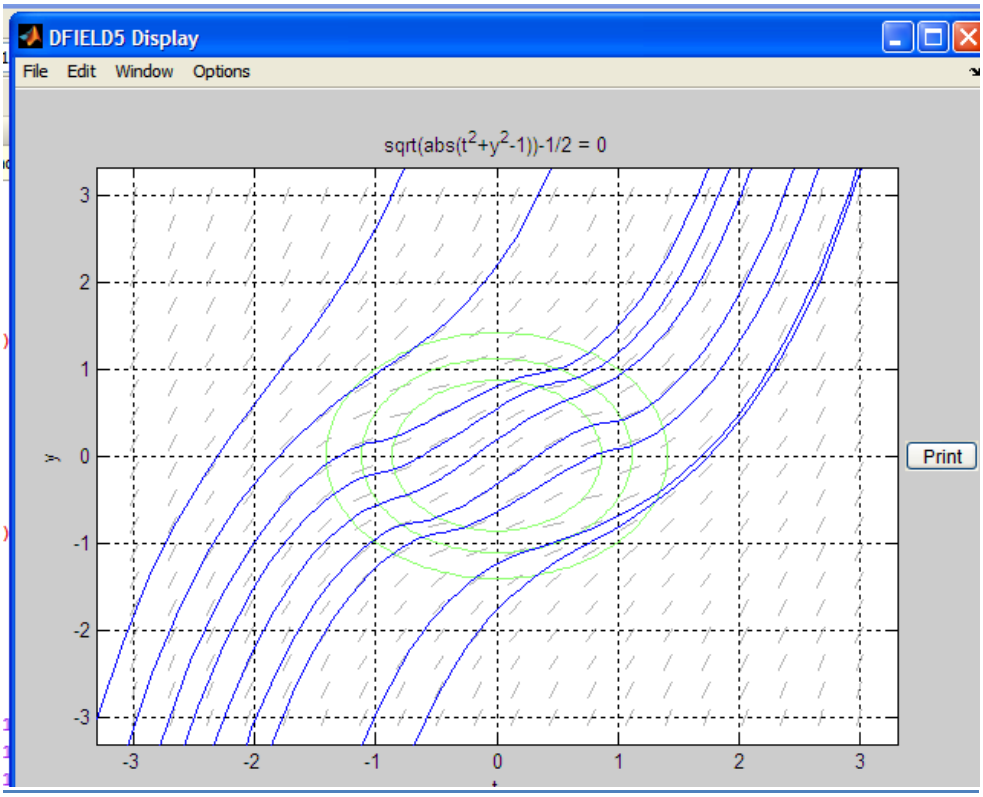
% los mismos dibujos se tienen con

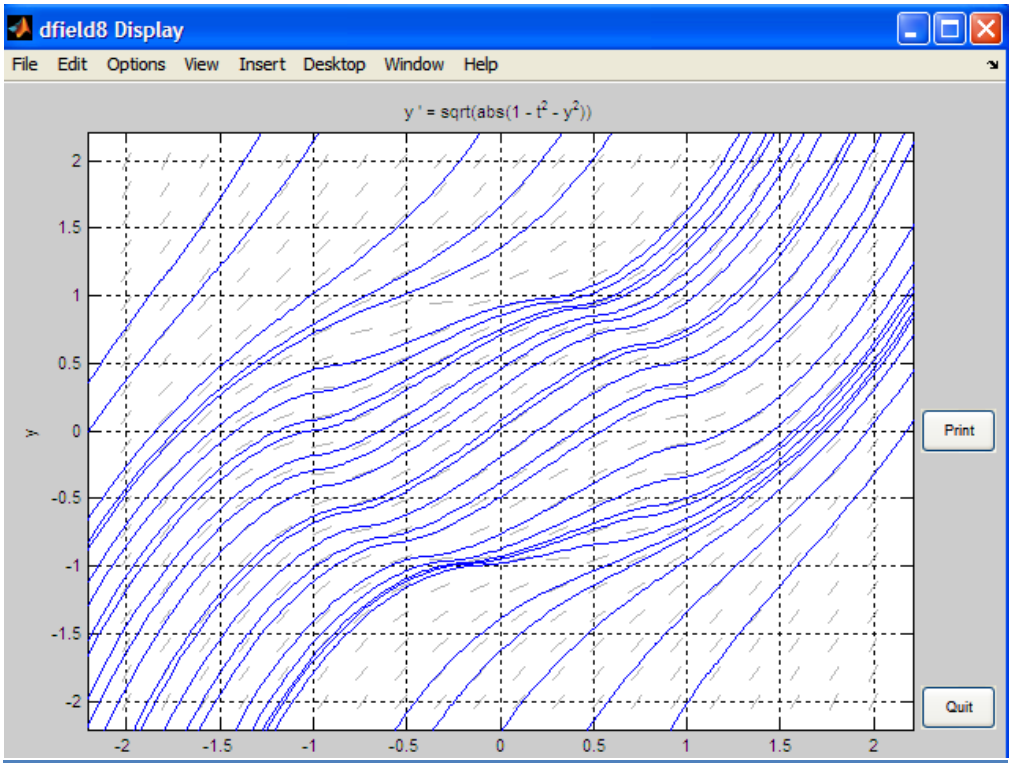
>> ezplot('sqrt(abs(1-t^2-y^2))=1/2')

>> ezplot('sqrt(abs(1-t^2-y^2))=1')

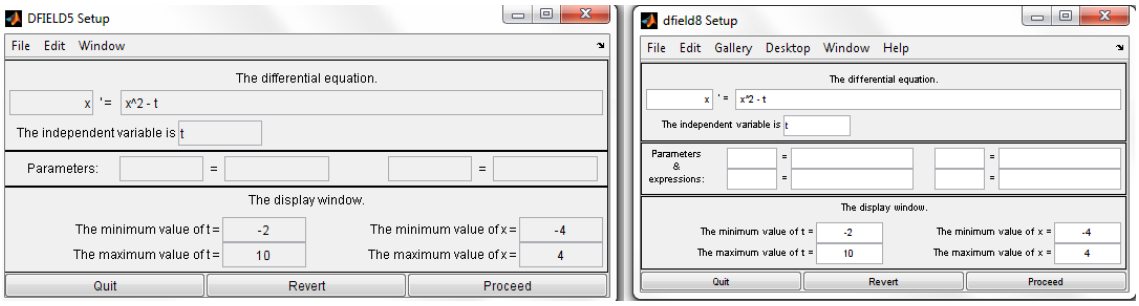
>> ezplot('sqrt(abs(1-t^2-y^2))=2')

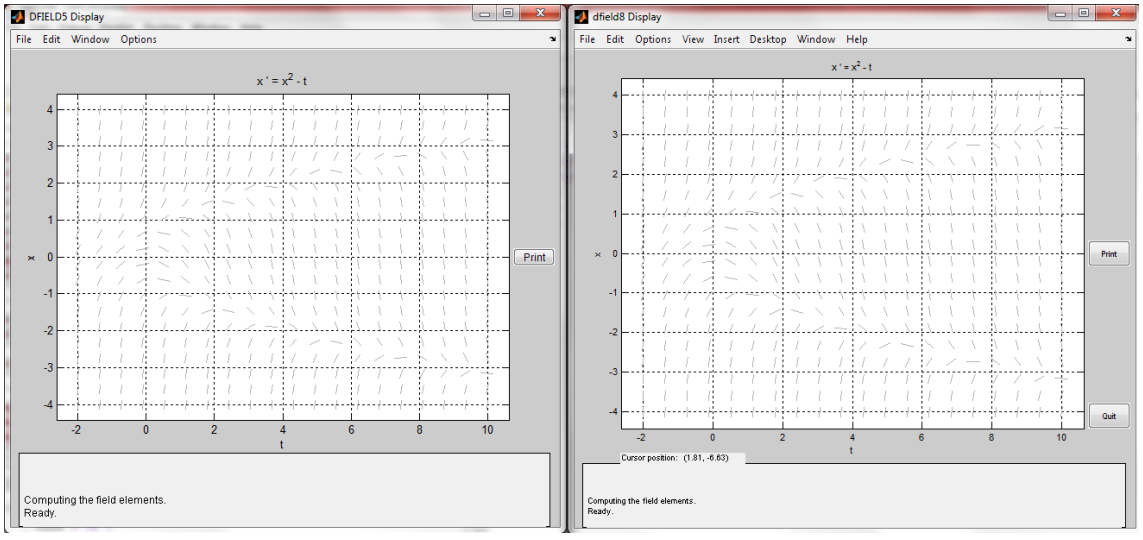
*% **Observación:** para esta ED, y' es siempre mayor o igual que cero, las soluciones son crecientes, y la circunferencia de radio 1 es la isoclina para la pendiente 0. Obviamente en ésta isoclina las curvas integrales no pueden pasar a decrecientes. Abajo, dibujos para distintos dominios y con distintas versiones de dfield.*


DFIELD5 Display
File Edit Window Options
sqrt(abs(t^2+y^2-1))-1/2 = 0
Print


dfield8 Display
File Edit Options View Insert Desktop Window Help
y ' = sqrt(abs(1 - t^2 - y^2))
Print
Quit

*% **Observación** sobre la interfaz del entorno en las distintas versiones: se ve tanto en "Setup" como en "Display" la diferencia de opciones en los desplegables. Aunque cuanto más avanzada la versión, se tienen más opciones, una misma opción o posibilidad puede encontrarse en distintos desplegables, dependiendo de la versión. Lo mismo pasa con las posibilidades de editar, salvar gráficas, u otras. De cualquier manera, la información del entorno es autocontenida.*





*Diseño y Maquetación: **Antonio J. González Pérez***