

# Algunos modelos matemáticos y el plano de fases.

[Capítulo 2 – Libro \(2.5\)](#) + [Capítulo 4 - Libro](#) + [Hoja de problemas 5](#)

Resumen de contenidos:

- **Modelos diferenciales lineales y no lineales: soluciones explícitas y numéricas**
- **Modelos de resortes lineales: solución explícita**
- **ED del péndulo y de resortes no lineales: el proceso de la linealización**
- **Otros modelos con sistemas diferenciales**
- **Representaciones en el plano de fases: entorno “pplane”**

*% Se consideran modelos diferenciales gobernados por ecuaciones diferenciales o sistemas diferenciales. Se resuelven, si se puede, encontrando la solución explícita. Si esto no es posible se consideran soluciones numéricas, o se analizan comportamientos cualitativos de soluciones. Utilizamos el entorno gráfico “**pplane**” (que funciona de manera análoga a “dfield”; ver tercer cuaderno) para experimentar con planos de fases de sistemas o ecuaciones autónomas. Hay varias versiones de “pplane” (pplane5—pplane8) diseñadas por [J. Polking \(Rice University, Texas, USA\)](#). Se presta especial atención a la linealización de ED. También se analiza el efecto de una pequeña constante amortiguación en un modelo.*

*% Este cuaderno se complementa con los cuadernos de curso anteriores, y en particular, está relacionado con algunos ejercicios de la [Hoja de problemas 4](#) del curso, relativos a ED de segundo orden y sistemas.*

## Modelos lineales y no lineales: resolución explícita de ED

*% Comenzamos con algunos modelos que se obtienen de aplicar la segunda ley de Newton  $F=m*a$ , y de los que se conoce la solución explícita: el modelo de caída libre de cuerpos y el modelo del resorte lineal.*

*% Modelo de caída libre de cuerpos (considerado en el cuaderno dos de curso; ver sección 1.6.2 del libro de apuntes). Las variables que intervienen en el problema son: t tiempo, v=v(t) velocidad, h=h(t) altura, h0 altura inicial, v0 velocidad inicial, m la constante de masa, grav la constante de gravedad, k la constante de amortiguación*

*% Modelo no lineal: amortiguación proporcional a v<sup>2</sup>*

**>> syms t m k v0 h0 grav**

**>> altura=dsolve('m\*D2y=-m\*grav+k\*(Dy)^2','y(0)=h0','Dy(0)=-v0')**

altura =

$$\frac{m \log\left(-\frac{\text{grav} \cdot m \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot h_0 \cdot k}{m}\right) \cdot \left(\tanh\left(\frac{\text{grav}^{1/2} \cdot k^{3/2} \cdot t}{k} + \frac{m^{1/2} \cdot \text{atanh}\left(\frac{k^{1/2} \cdot v_0}{\text{grav}^{1/2} \cdot m^{1/2}}\right)}{\text{grav}^{1/2} \cdot k^{3/2}}\right)}{m^{1/2}}\right)^2 - 1}{-k \cdot v_0^2 + \text{grav} \cdot m}\right)}{2 \cdot k}$$

**>> pretty(altura)**

$$\frac{m \log\left(\frac{\exp\left(\frac{2 h_0 k}{m}\right) \tanh\left(\frac{\text{grav}^{1/2} k^{3/2} t}{k} + \frac{\text{atanh}\left(\frac{k^{1/2} v_0}{\text{grav}^{1/2} m^{1/2}}\right)}{\frac{\text{grav}^{1/2} k^{3/2}}{m^{1/2}}}\right)}{m^{1/2}}\right)^2 - 1}{-k v_0^2 + \text{grav} m}\right)}{2 k}$$

*% Modelo lineal: amortiguación proporcional a v*

**>> altura\_lineal=dsolve('m\*D2y=-m\*grav-k\*Dy','y(0)=h0','Dy(0)=-v0')**

altura\_lineal =

$$\frac{(\text{grav} \cdot m^2 + k \cdot (h_0 \cdot k - m \cdot v_0) - \text{grav} \cdot k \cdot m \cdot t)}{k^2} - \frac{(\text{grav} \cdot m^2 + k \cdot v_0 \cdot m)}{k^2 \cdot \exp\left(\frac{k \cdot t}{m}\right)}$$

>> pretty(altura\_lineal)

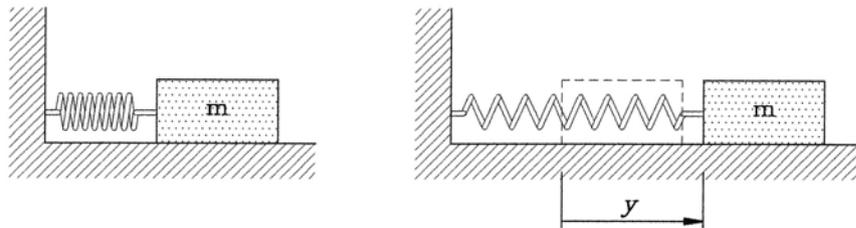
$$\frac{\text{grav}^2 m^2 + k (h_0 k - m v_0) - \text{grav} k m t}{k} \quad \frac{\text{grav}^2 m^2 - k v_0 m}{k \exp\left(-\frac{k t}{m}\right)}$$

% Aquí hemos usado Matlab 2011 para la resolución, y aunque aparentemente se tienen distintas soluciones que en el cuaderno dos, con Matlab 2008, una simple verificación nos muestra que las dos fórmulas que definen la variable altura\_lineal son la misma.

% En la resolución de las ED no aparecen constantes de integración pues se han introducido las condiciones iniciales h0 y v0. Las constantes k y m también dependen del problema, mientras grav puede substituirse por la constante de la gravedad. Observamos que se trata de ED de segundo orden en las que no aparece y'(t), y por lo tanto se puede reducir a una ED de primer orden.

% **Ejercicio 1: el sistema resorte-masa. Modelos de resortes lineales**

my''+ky'+cy=p(t), donde m, k y c son constantes positivas. y(t) representa el alargamiento del muelle, m la constante de masa, k la constante de amortiguación, c la constante de recuperación y p(t) el conjunto de fuerzas externas actuando sobre el sistema (ver sección 2.5 del libro de apuntes)



Representación esquemática del resorte que se mueve en un plano horizontal

% Dando valores a k, m y c resolvemos distintas ecuaciones homogéneas y no homogéneas.

>> clear all

>> syms t

```
>> dsolve('D2y+4*Dy+y=0') % m=1, k=4, c=1
```

ans =

```
C2*exp(t*(3^(1/2) - 2)) + C3/exp(t*(3^(1/2) + 2))
```

```
>> pretty(ans)
```

$$C2 \exp(t (3^{1/2} - 2)) + \frac{C3}{\exp(t (3^{1/2} + 2))}$$

*% es la solución general de la ED homogénea. El polinomio característico asociado a la ED tiene raíces reales distintas; C2 y C3 son las dos constantes de integración*

```
>> dsolve('D2y+2*Dy+y=0') % m=1, k=2, c=1
```

ans =

```
C5/exp(t) + (C6*t)/exp(t)
```

```
>> pretty(ans)
```

$$\frac{C5}{\exp(t)} + \frac{C6 t}{\exp(t)}$$

*% el polinomio característico asociado a la ED tiene una raíz doble; C5 y C6 son las dos constantes de integración*

```
>> dsolve('D2y+Dy+2*y=0') % m=1, k=1, c=2
```

ans =

```
(C8*cos((7^(1/2)*t)/2))/exp(t/2) + (C9*sin((7^(1/2)*t)/2))/exp(t/2)
```

>> **pretty(ans)**

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 / \quad 1/2 \quad \backslash \\
 | \quad 7 \quad t \quad | \\
 C8 \cos | \text{-----} | \\
 \backslash \quad 2 \quad /
 \end{array}
 \quad + \quad
 \begin{array}{c}
 / \quad 1/2 \quad \backslash \\
 | \quad 7 \quad t \quad | \\
 C9 \sin | \text{-----} | \\
 \backslash \quad 2 \quad /
 \end{array} \\
 \text{-----} \\
 \begin{array}{c}
 / \quad t \quad \backslash \\
 \exp | \text{---} | \\
 \backslash \quad 2 \quad /
 \end{array}
 \quad + \quad
 \begin{array}{c}
 / \quad t \quad \backslash \\
 \exp | \text{---} | \\
 \backslash \quad 2 \quad /
 \end{array}
 \end{array}$$

*% el polinomio característico asociado a la ED tiene raíces complejas conjugadas; C8 y C9 son las dos constantes de integración*

>> **dsolve('D2y+4\*y=0')** % m=1, k=0, c=4

ans =

$$C11*\cos(2*t) + C12*\sin(2*t)$$

*% el polinomio característico asociado a la ED tiene raíces imaginarias; C11 y C12 son las dos constantes de integración.*

>> **dsolve('D2y+4\*y=cos(t)')** % m=1, k=0, c=4, p(t)=cos(t)

ans =

$$C14*\cos(2*t) + C15*\sin(2*t) + \sin(2*t)*(\sin(3*t)/12 + \sin(t)/4) + (2*\cos(2*t)*(3*\tan(t/2)^4 + 1))/(3*(\tan(t/2)^2 + 1)^3)$$

>> **simplify(ans)**

ans =

$$\cos(2*t)/3 + \cos(t)/3 + C14*\cos(2*t) + C15*\sin(2*t)$$

>> **pretty(ans)**

$$\begin{array}{c}
 \cos(2 \ t) \quad \cos(t) \\
 \text{-----} + \text{-----} + C14 \cos(2 \ t) + C15 \sin(2 \ t) \\
 3 \quad 3
 \end{array}$$

*% es la solución general de la ED no homogénea; cos(2\*t)/3 + cos(t)/3 es la solución particular.*

*% Imponemos condiciones iniciales (alargamiento inicial  $y(0)=y_0$ , velocidad inicial  $y'(0)=v_0$ ), y hacemos la gráfica de las soluciones. En particular, comprobamos que si  $p(t)=0$ , dependiendo de las relaciones entre  $m$ ,  $k$  y  $c$ , se tiene un movimiento fuertemente amortiguado, débilmente amortiguado o periódico (no amortiguado,  $k=0$ ). Las oscilaciones son fuertemente amortiguadas si  $k^2-4mc>0$ , o si  $k^2-4mc=0$ ; son débilmente amortiguadas si  $k^2-4mc<0$ . Estas situaciones se corresponden con los diferentes casos considerados antes (raíces reales distintas, coincidentes o complejas conjugadas).*

*% Caso de amortiguación fuerte  $k^2-4mc>0$ : el resorte tiende a pararse rápidamente*

```
>> dsolve('D2y+4*Dy+y=0','y(0)=-0.5','Dy(0)=-0.3')
```

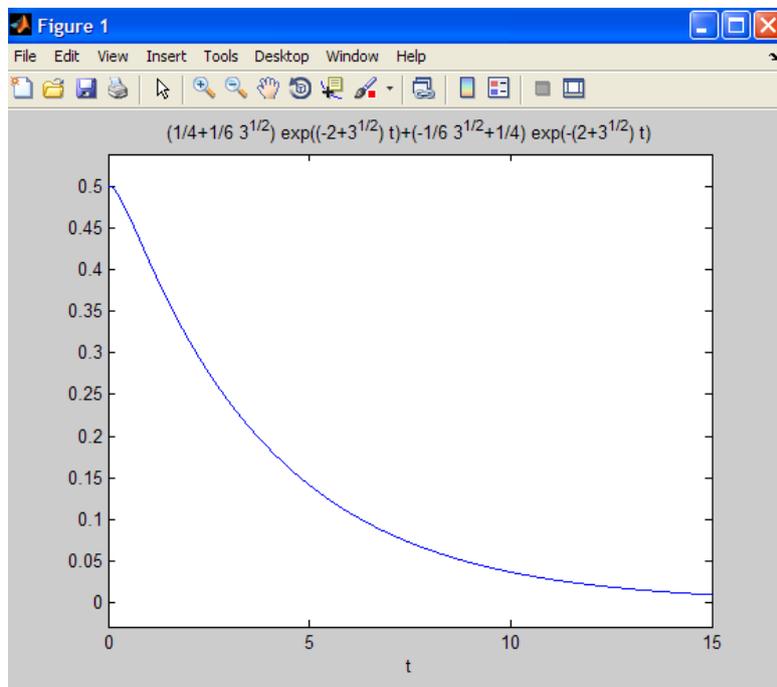
ans =

$$-(3^{1/2} \exp(t(3^{1/2} - 2)) (5 \cdot 3^{1/2} + 13)) / 60 - (3^{1/2} (5 \cdot 3^{1/2} - 13)) / (60 \exp(t(3^{1/2} + 2)))$$

```
>> pretty(ans)
```

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} 3^{1/2}\right) \exp((-2 + 3^{1/2}) t) + \left(-\frac{1}{6} 3^{1/2} + \frac{1}{4}\right) \exp(-(2 + 3^{1/2}) t)$$

```
>> ezplot(ans,[0,15])
```



*% si cambiamos las condiciones iniciales se tiene el mismo tipo de resultado*

```
>> dsolve('D2y+4*Dy+y=0','y(0)=-0.5','Dy(0)=-0.3')
```

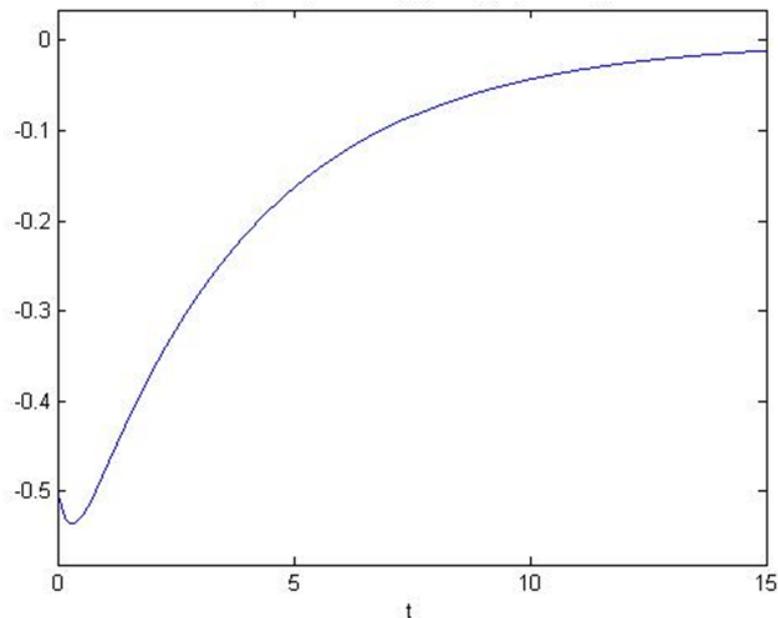
ans =

$$-(3^{1/2} \exp(t(3^{1/2} - 2))(5 \cdot 3^{1/2} + 13))/60 - (3^{1/2} (5 \cdot 3^{1/2} - 13))/(60 \exp(t(3^{1/2} + 2)))$$

```
>> pretty(ans)
```

$$-\exp\left(t\left(3^{1/2}-2\right)\right) \frac{13 \cdot 3^{1/2}+13}{60} + \frac{1}{4} - \frac{3^{1/2}\left(5 \cdot 3^{1/2}-13\right)}{60 \exp\left(t\left(3^{1/2}+2\right)\right)}$$

```
>> ezplot(ans,[0,15])
```



*% Caso de amortiguación fuerte k<sup>2</sup>-4mc=0*

```
>> dsolve('D2y+2*Dy+y=0','y(0)=-0.5','Dy(0)=-0.3')
```

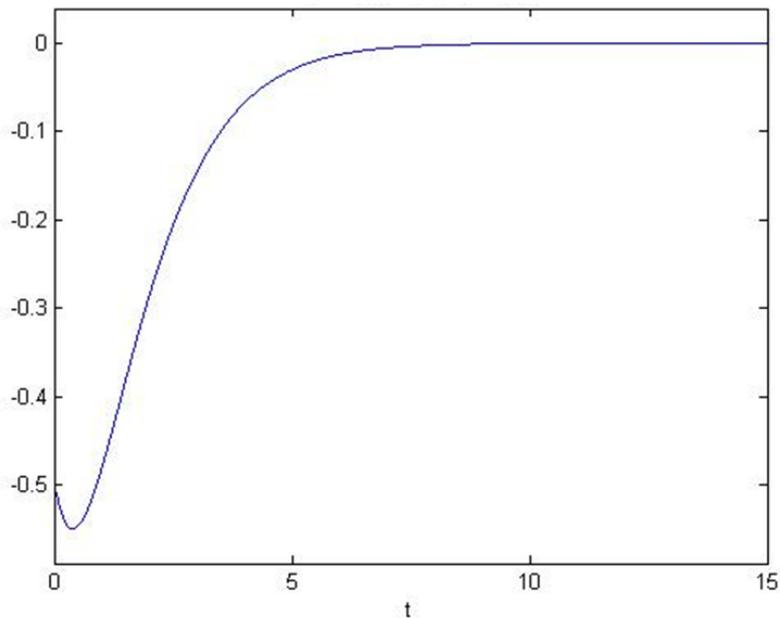
ans =

$$-1/(2 \exp(t)) - (4 \cdot t)/(5 \exp(t))$$

>> pretty(ans)

$$\frac{1}{2 \exp(t)} - \frac{4 t}{5 \exp(t)}$$

>> ezplot(ans,[0,15])



*% Caso de amortiguación débil  $k^2-4mc<0$ : el resorte/el bloque tiende a pararse (oscilando), es decir “pasa indefinidamente” por la posición  $y=0$ , pero disminuyendo el alargamiento (que tiende a cero, cuando  $t$  tiende a infinito).*

>> dsolve('D2y+Dy+2\*y=0','y(0)=-0.5','Dy(0)=-0.3')

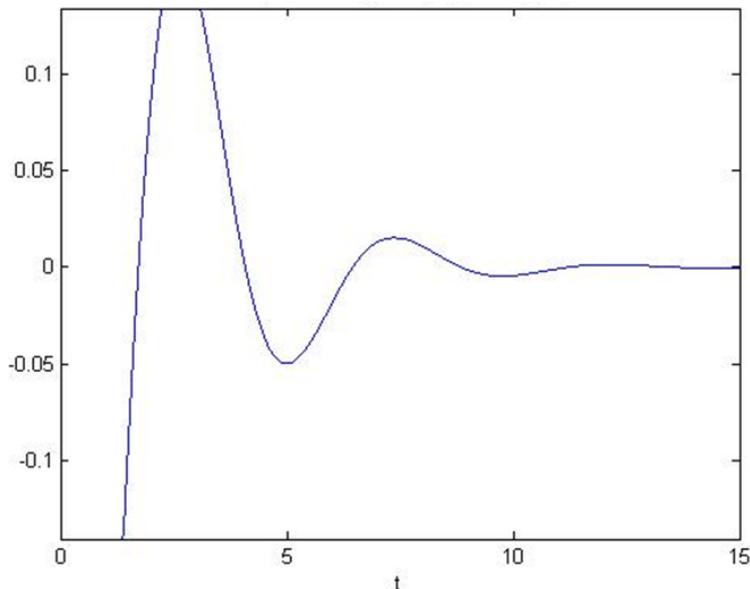
ans =

$$-\cos((7^{1/2}*t)/2)/(2*\exp(t/2)) - (11*7^{1/2}*\sin((7^{1/2}*t)/2))/(70*\exp(t/2))$$

>> `pretty(ans)`

$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)}{\sqrt{2}} - \frac{11}{70}\sqrt{7}\sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) - \frac{2}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right)$$

>> `ezplot(ans,[0,15])`



*% el comportamiento oscilatorio de la solución se puede observar mejor ajustando intervalos, ejes, etc. Las gráficas de abajo nos muestran distintas escalas (para y(t)) en distintos intervalos de tiempo: aunque en las gráficas la solución parece anularse enseguida, no es así, sino que oscila indefinidamente pero con menor amplitud (ver más adelante gráficas del entorno pplane, relativas al ejercicio 3).*

>> `dsolve('D2y+Dy+2*y=0','y(0)=-0.5','Dy(0)=-0.3')`

ans =

$$-11/70*7^{(1/2)}*\exp(-1/2*t)*\sin(1/2*7^{(1/2)}*t)-1/2*\exp(-1/2*t)*\cos(1/2*7^{(1/2)}*t)$$

>> **pretty(ans)**

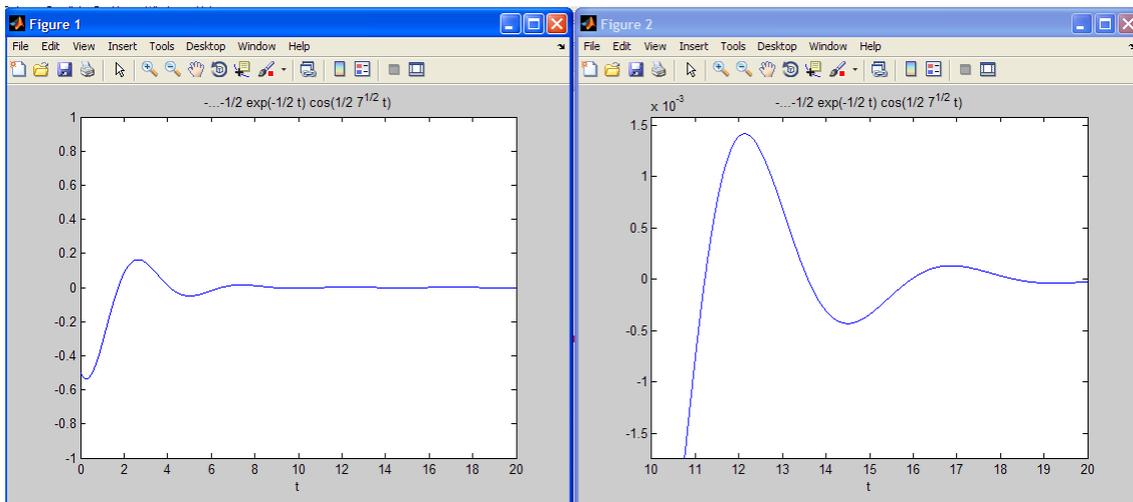
$$\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right)}{2\sqrt{2}} - \frac{11}{70}\sqrt{2}\exp\left(-\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{7}t\right) + \frac{70}{2\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)$$

>> **ezplot(ans,[0,20])**

>> **axis([0,20,-1,1])**

>> **figure(2)**

>> **ezplot(ans,[10,20])**



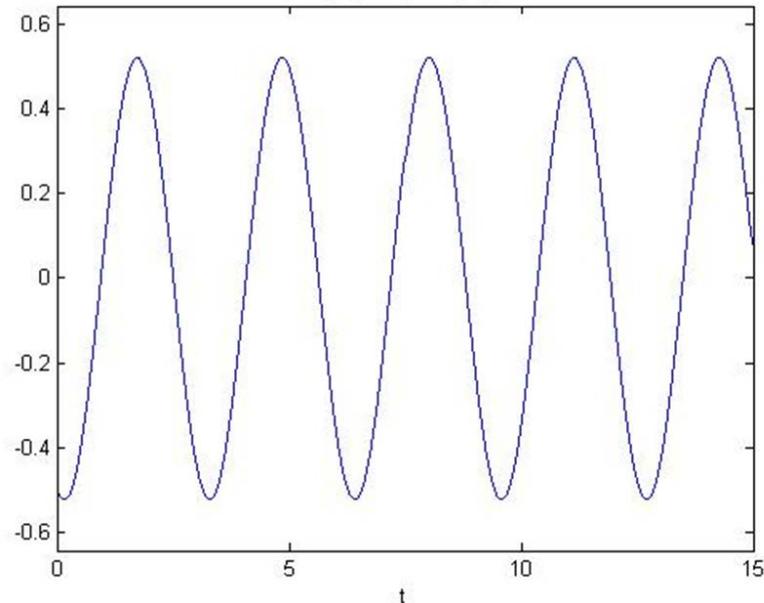
*% Caso no amortiguado: k=0. El movimiento es periódico. La frecuencia natural de la oscilación es sqrt(c/m), y el periodo 2pi/sqrt(c/m)*

>> **dsolve('D2y+4\*y=0','y(0)=-0.5','Dy(0)=-0.3')**

ans =

- cos(2\*t)/2 - (3\*sin(2\*t))/20

**>> ezplot(ans,[0,15])**



*% Consideramos el modelo de resorte lineal no amortiguado, con fuerzas externas sinusoidales actuando sobre el sistema. Se trata de vibraciones forzadas”, y de fuerzas externas representadas por funciones periódicas*

*% Suponemos primero que la “fuerza oscilante” tiene distinta frecuencia de la natural del resorte*

**>> dsolve('D2y+4\*y=cos(t)', 'y(0)=-0.5', 'Dy(0)=-0.3') % p(t)=cos(t)**

ans =

$\sin(2*t)*(\sin(3*t)/12 + \sin(t)/4) - (3*\sin(2*t))/20 - (7*\cos(2*t))/6 + (2*\cos(2*t)*(3*\tan(t/2)^4 + 1))/(3*(\tan(t/2)^2 + 1)^3)$

**>> simplify(ans)**

ans =

$\cos(t)/3 - (3*\cos(t)*\sin(t))/10 - (5*\cos(t)^2)/3 + 5/6$

>> **pretty(ans)**

$$\frac{\cos(t)}{3} - \frac{3 \cos(t) \sin(t)}{10} - \frac{5 \cos^2(t)}{3} + \frac{5}{6}$$

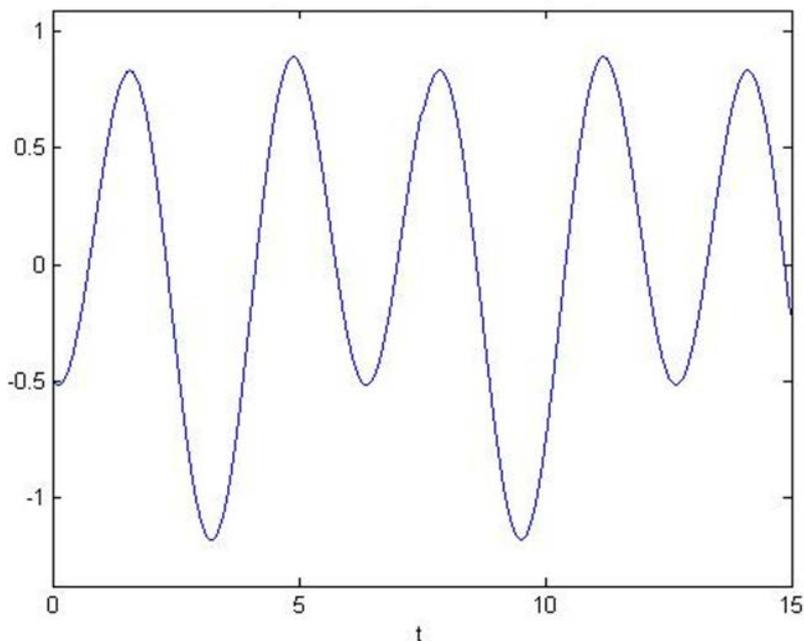
*% Estas soluciones que nos devuelve Matlab, en ocasiones pueden simplificarse con "simplify" o "simple"; la solución es periódica*

>> **simplify(ans)**

ans =

$$\cos(t)/3 - (3*\sin(2*t))/20 - (5*\cos(2*t))/6$$

>> **ezplot(ans,[0,15])**



*% Abajo, la misma ED (la frecuencia natural no coincide con la de la fuerza oscilante aplicada) con distintas condiciones iniciales y la gráfica de la solución en otro intervalo de tiempo.*

```
>> dsolve('D2y+4*y=cos(t)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0')
```

```
ans =
```

```
sin(2*t)*(sin(3*t)/12 + sin(t)/4) - (2*cos(2*t))/3 + (2*cos(2*t)*(3*tan(t/2)^4 + 1))/(3*(tan(t/2)^2 + 1)^3)
```

```
>> pretty(ans)
```

$$\sin(2t) \left[ \frac{\sin(3t)}{12} + \frac{\sin(t)}{4} \right] - \frac{2 \cos(2t)}{3} + \frac{2 \cos(2t) \sqrt{3 \tan(t/2)^4 + 1}}{3 \sqrt{2} \sqrt{3}}$$

*% también el resultado se puede simplificar considerablemente*

```
>> simplify(ans)
```

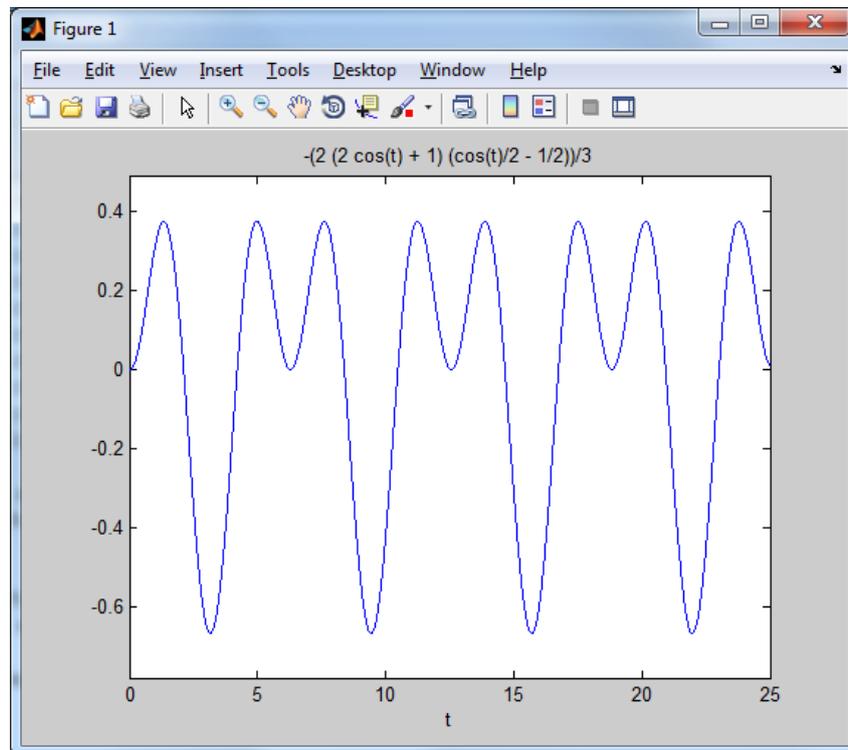
```
ans =
```

```
-(2*(2*cos(t) + 1)*(cos(t)/2 - 1/2))/3
```

```
>> pretty(ans)
```

$$-\frac{2(2 \cos(t) + 1) \left( \frac{\cos(t)}{2} - \frac{1}{2} \right)}{3}$$

**>> ezplot(ans,[0,25])**



*% Abajo, el mismo efecto con otra fuerza oscilante*

**>> dsolve('D2y+4\*y=cos(t)+sin(t)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0')**

ans =

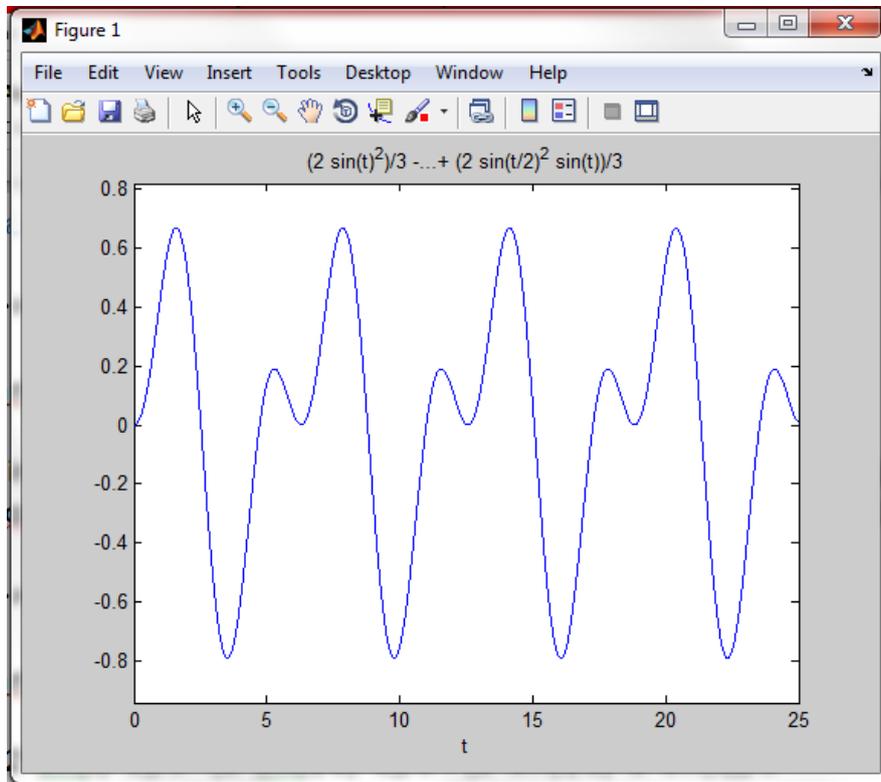
$\sin(2*t)*(\sin(3*t)/12 - \cos(3*t)/12 + \cos(t)/4 + \sin(t)/4) - \sin(2*t)/6 - (2*\cos(2*t))/3 + (\cos(2*t)*(2*\tan(t/2)^4 - (8*\tan(t/2)^3)/3 + 2/3))/(\tan(t/2)^2 + 1)^3$

**>> simplify(ans)**

ans =

$(2*\sin(t)^2)/3 - (2*\sin(t/2)^2)/3 + (2*\sin(t/2)^2*\sin(t))/3$

**>> ezplot(ans,[0,25])**



*% Suponemos que p(t) es solución de la ecuación homogénea*

**>> dsolve('D2y+4\*y=cos(2\*t)', 'y(0)=-0.5', 'Dy(0)=-0.3') % p(t)=cos(2t)**

ans =

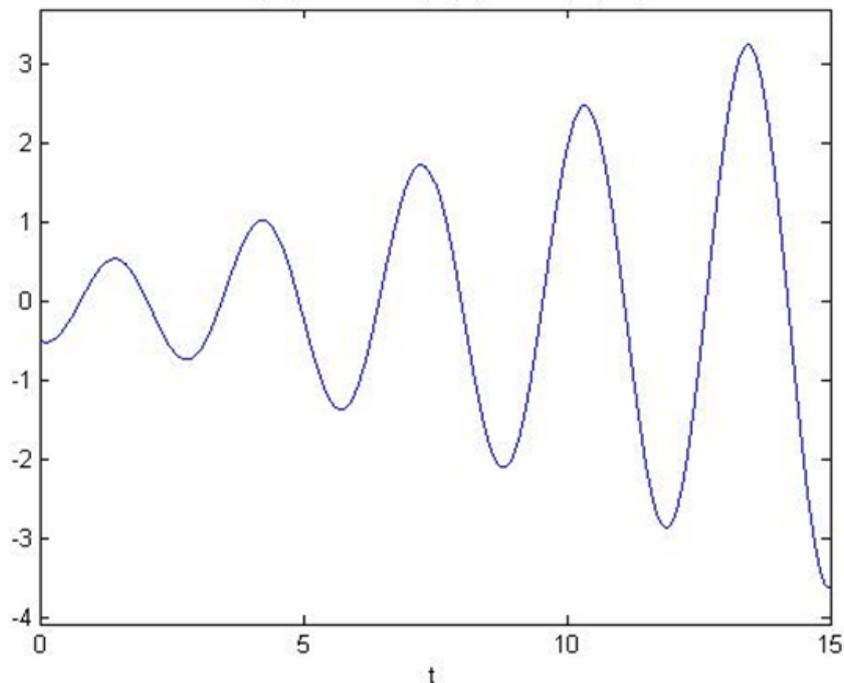
$\cos(6*t)/32 - (17*\cos(2*t))/32 - (3*\sin(2*t))/20 + \sin(2*t)*(t/4 + \sin(4*t))/16$

**>> simplify(ans)**

ans=

$-3/20*\sin(2*t)-1/2*\cos(2*t)+1/4*\sin(2*t)*t$

**>> ezplot(ans,[0,15])**



*% Se tiene el fenómeno de la resonancia: “el resorte/el bloque pasa por la posición y=0 indefinidamente pero alargándose cada vez más”. Obviamente, el resorte llegaría a romperse, y a partir de aquí, el modelo no sería válido.*

*% Abajo, la misma ED (caso de resonancia) con distintas condiciones iniciales, y gráfica de solución en otro intervalo de tiempo.*

**>> dsolve('D2y+4\*y=cos(2\*t)', 'y(0)=0', 'Dy(0)=0')**

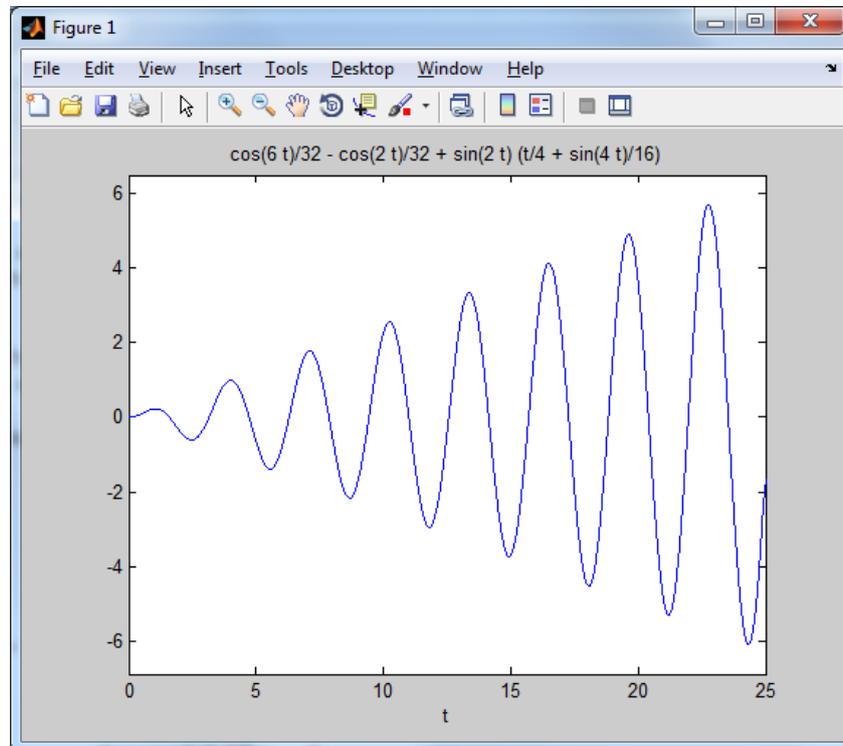
ans =

$\cos(6*t)/32 - \cos(2*t)/32 + \sin(2*t)*(t/4 + \sin(4*t)/16)$

**>> pretty(ans)**

$$\frac{\cos(6 t)}{32} - \frac{\cos(2 t)}{32} + \sin(2 t) \left| \frac{t}{4} + \frac{\sin(4 t)}{16} \right|$$

>> `ezplot(ans,[0,25])`



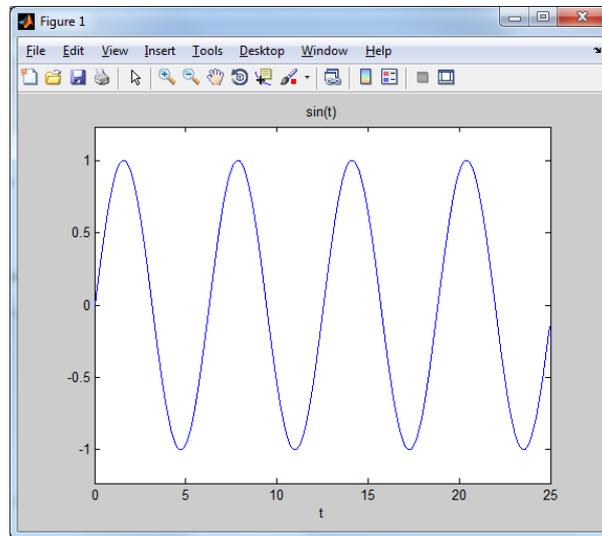
## Resorte lineal no amortiguado: representaciones de soluciones

### % Ejercicio 2.1.

Tomando  $m=c=1$ ,  $k=0$  y  $p(t)=0$ , se tiene el modelo  $y''+y=0$ , donde  $y(t)$  representa el alargamiento del muelle. Obviamente, sin fuerzas externas actuando sobre el sistema, se necesita alguna perturbación inicial para que se inicie el movimiento: por ejemplo, posición inicial  $y(0)=y_0$ , y velocidad inicial  $y'(0)=z_0$  (alguna de ellas no nula). La solución general de la ecuación homogénea es  $y= c_1 \cos(t)+c_2 \sin(t)$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son las constantes de integración, que se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales. Abajo, seguimos la idea de la sección 4.1 del libro de apuntes.

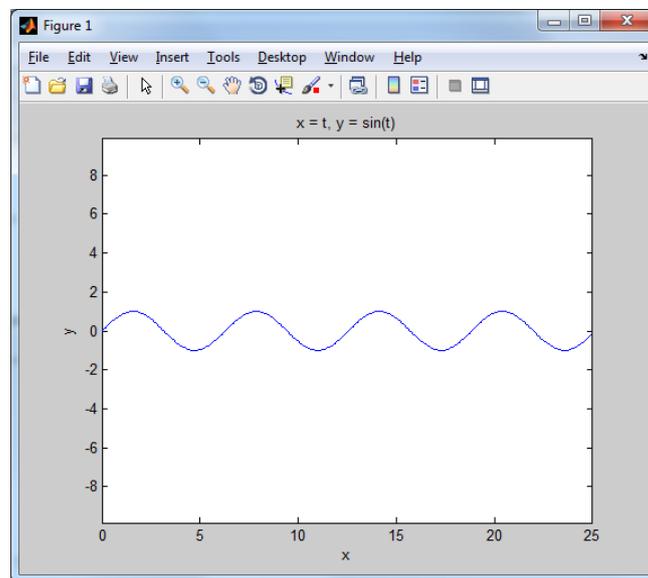
% Una solución es  $y=\sin(t)$ , que implica  $y'=\cos(t)$ . Dicha solución verifica las condiciones iniciales  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=1$ . Hacemos las gráficas del alargamiento y de la velocidad en los planos  $ty$  y  $ty'$ , respectivamente.

**>> ezplot(sin(t),[0,25])** % alargamiento para t en [0,25]



*% Alternativamente, con "ezplot", se puede dibujar la curva en paramétricas (t,sin(t))*

**>> ezplot(t,sin(t),[0,25])** % alargamiento para t en [0,25]



**>> ezplot(sin(t),[0,25])** % alargamiento para t en [0,25]

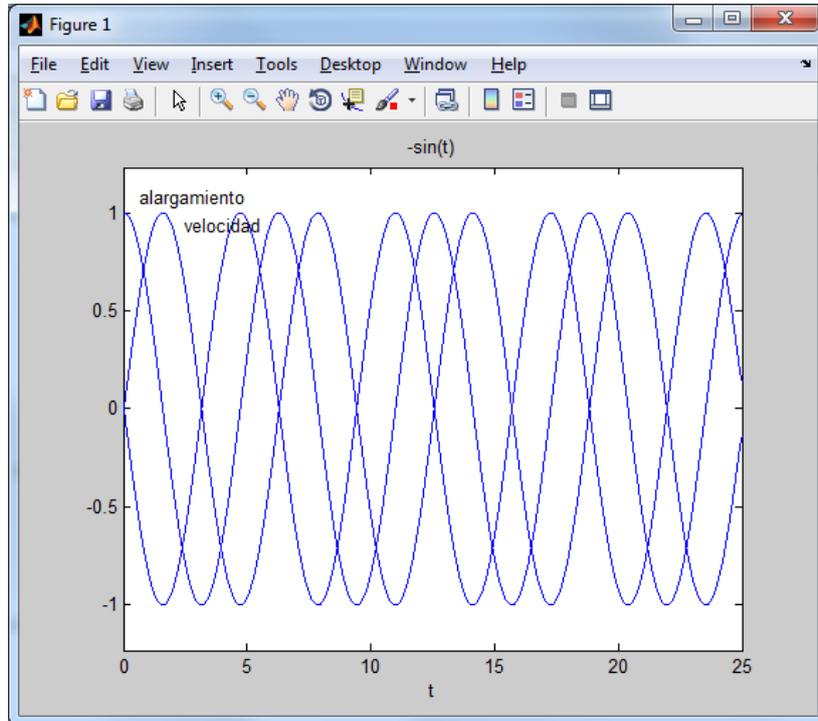
**>> gtext('alargamiento')**

**>> hold on**

```
>> ezplot(cos(t),[0,25]) % velocidad para t en [0,25]
```

```
>> gtext('velocidad')
```

```
>> hold off
```

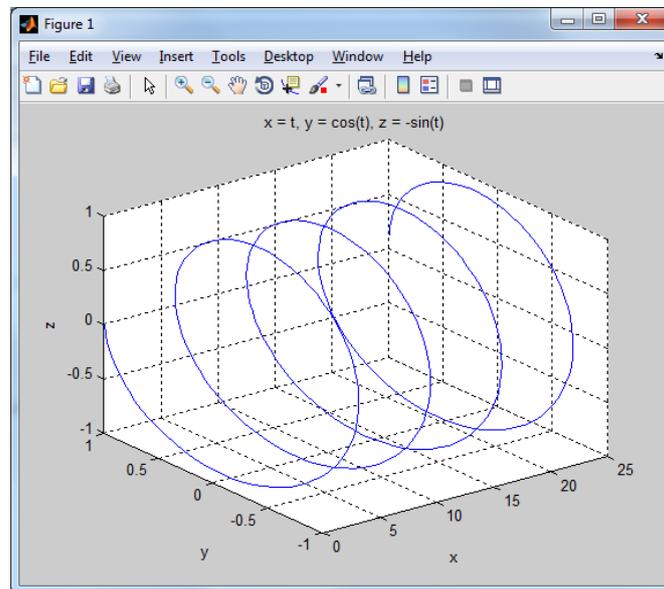


*% Se puede hacer lo mismo con la solución  $y=\cos(t)$ , que verifica las condiciones iniciales  $y(0)=1$ ,  $y'(0)=0$ .*

*% Ahora, si hacemos el cambio de variable  $y'=z$ , podemos escribir  $y''+y=0$  como un sistema diferencial  $y'=z$ ,  $z'=-y$  con incógnitas  $y(t)$ ,  $z(t)$  (es decir alargamiento y velocidad).*

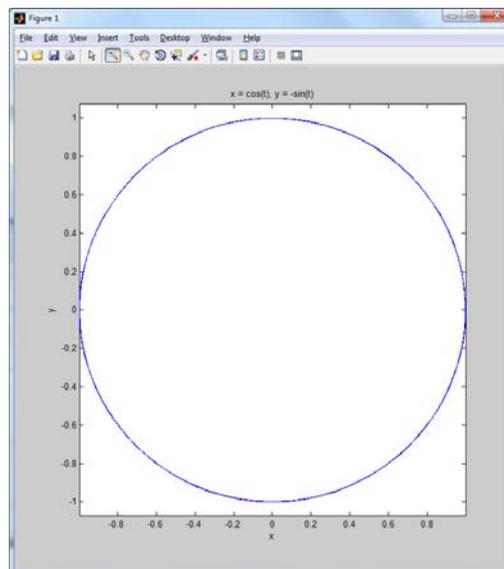
*%  $y=\cos(t)$ ,  $z=-\sin(t)$  es una solución de dicho sistema que verifica las condiciones iniciales  $y(0)=0$ ,  $z(0)=1$ . Se puede representar cada componente en un plano y superponer como se hace arriba, pero también se puede representar una curva en el espacio ( $tyy'$ ), dado que se tiene una ecuación diferencial de primer orden  $Y'=F(t,Y)$  con  $Y(t)$  un vector de dos componentes. Para este dibujo en dimensión 3 usamos "ezplot3"*

**>> ezplot3(t,cos(t),-sin(t),[0,25])**



*% La proyección de esta curva sobre el plano yz es una circunferencia de radio 1: es la "trayectoria de la solución". Podemos dibujar esta trayectoria como una curva en paramétricas  $(y(t),z(t))$  en el plano y,z.*

**>> ezplot(cos(t),-sin(t),[0,25])**

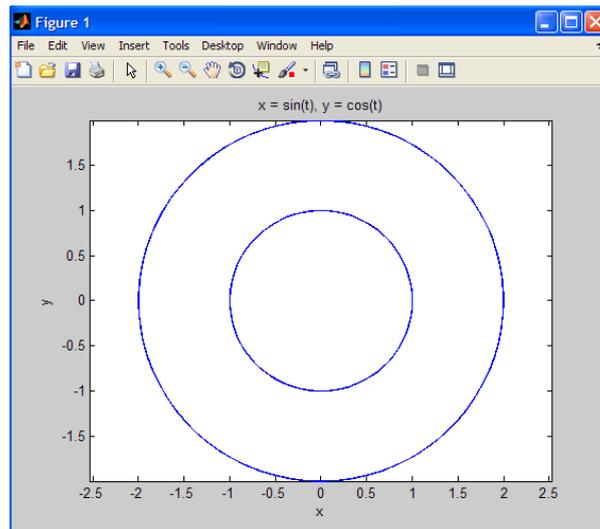


*% En este caso se trata de una circunferencia de radio 1, que nos indica el alargamiento máximo del resorte. Sería la misma trayectoria si consideramos la solución del sistema  $y=\sin(t), z=\cos(t)$ . Asimismo, sería la misma trayectoria si se consideran las condiciones iniciales  $(y_0,z_0)$  puntos de la circunferencia de radio 1 ( $y_0^2+z_0^2=1$ ).*

*% Si  $y(0)=A$ ,  $y'(0)=0$ , la trayectoria es una circunferencia de radio  $A$ ; e.g.  $A=2$  nos muestra el alargamiento máximo del resorte. Abajo las dos trayectorias correspondientes a las condiciones iniciales  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=1$ , e  $y(0)=2$ ,  $y'(0)=0$*

**>> hold on**

**>> ezplot(2\*cos(t),-2\*sin(t),[0,25])**



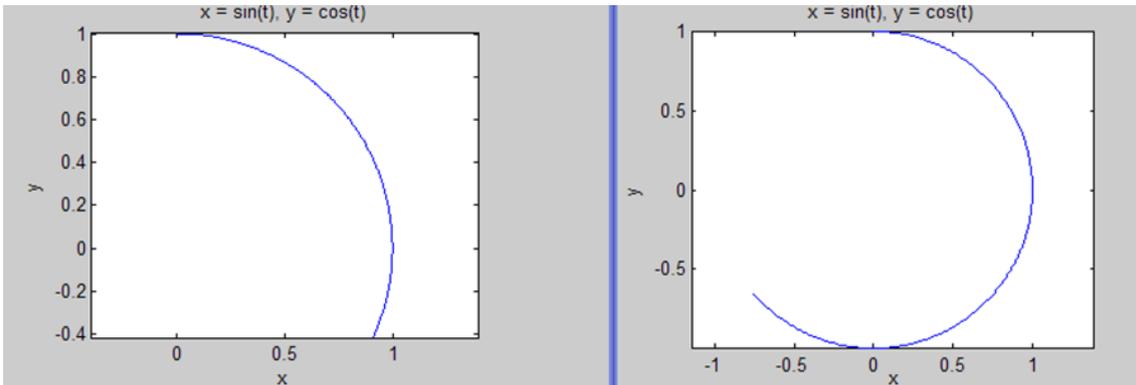
*% Entre otras cosas, se observa que no necesitamos hacer la gráfica para  $t$  en  $[0,25]$ , sino para  $t$  en  $[0,2\pi]$ , y luego, es como si recorriéramos la circunferencia de nuevo. Además, el hecho de que la trayectoria sea una curva cerrada ya nos muestra que la solución es periódica: partimos del punto  $(0,1)$ , e.g., y para  $t$  en  $[0,2]$  tenemos un trozo de circunferencia, esto es  $(y(t),z(t))$  va recorriendo la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj. Pasado un tiempo mayor,  $t$  en  $[0,4]$  la trayectoria se va cerrando, y cuando llegamos a  $t=2\pi$ , la trayectoria se ha cerrado: esto implica  $(y(2\pi),z(2\pi))=(0,1)$ . Así, si seguimos aumentando el tiempo, vamos a recorrer la circunferencia pero ya no avanzamos más, tal y como nos muestran las gráficas de abajo. Tenemos una dirección asociada al crecimiento de  $t$ , el de las agujas del reloj (se suele dibujar una flecha sobre la trayectoria que indica este crecimiento)*

**>> hold off**

**>> ezplot(sin(t),cos(t),[0,2])**

**>> figure(2)**

**>> ezplot(sin(t),cos(t),[0,4])**

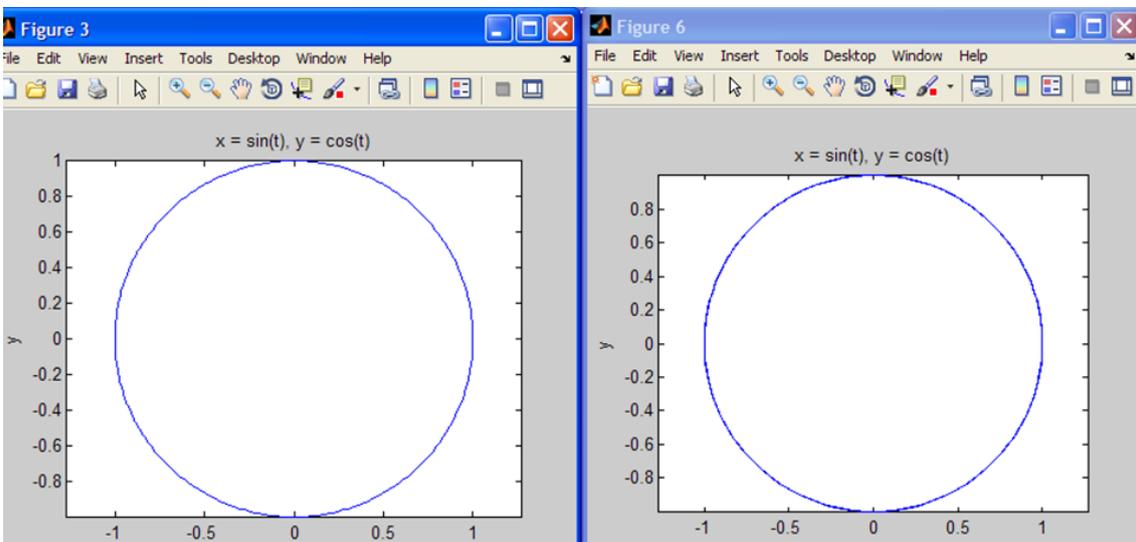


**>> figure(3)**

**>> ezplot(sin(t),cos(t),[0,2\*pi])**

**>> figure(6)**

**>> ezplot(sin(t),cos(t),[0,4\*pi])**



*% Observamos que el sistema lineal, al que se ha reducido la ED, es de coeficientes constantes y se puede resolver con Matlab, como lo hacemos a continuación*

```
>> dsolve('Dy=z','Dz=-y')
```

```
ans =
```

```
y: [1x1 sym]
```

```
z: [1x1 sym]
```

*% para poder leer la solución tenemos que escribir las variables en las que almacenamos la solución*

```
>> [Y,Z]=dsolve('Dy=z','Dz=-y')
```

```
Y =
```

```
C8*cos(t) + C7*sin(t)
```

```
Z =
```

```
C7*cos(t) - C8*sin(t)
```

*% las constantes C7 y C8 se resuelven al considerar el problema de Cauchy*

```
>> [Y,Z]=dsolve('Dy=z','Dz=-y','y(0)=2','z(0)=0')
```

```
Y =
```

```
2*cos(t)
```

```
Z =
```

```
-2*sin(t)
```

*% Podemos hacer la gráfica de la solución Y (alargamiento), de la derivada Z (velocidad), de las trayectorias, y de la curva solución en el espacio (tYZ), igual que arriba: si no damos un intervalo, por defecto, dibuja en [0,2pi]*

```
>> ezplot(Y)
```

```
>> figure(2)
```

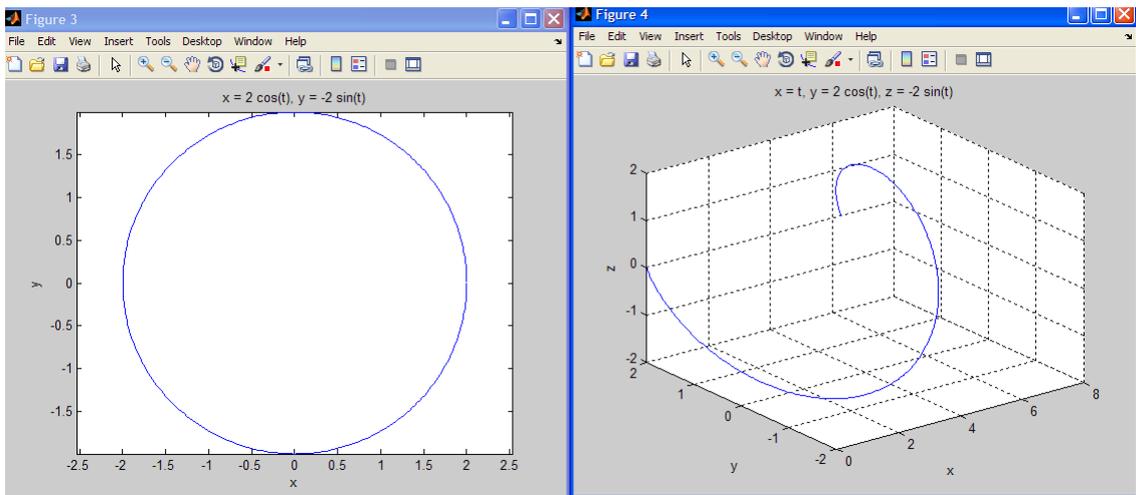
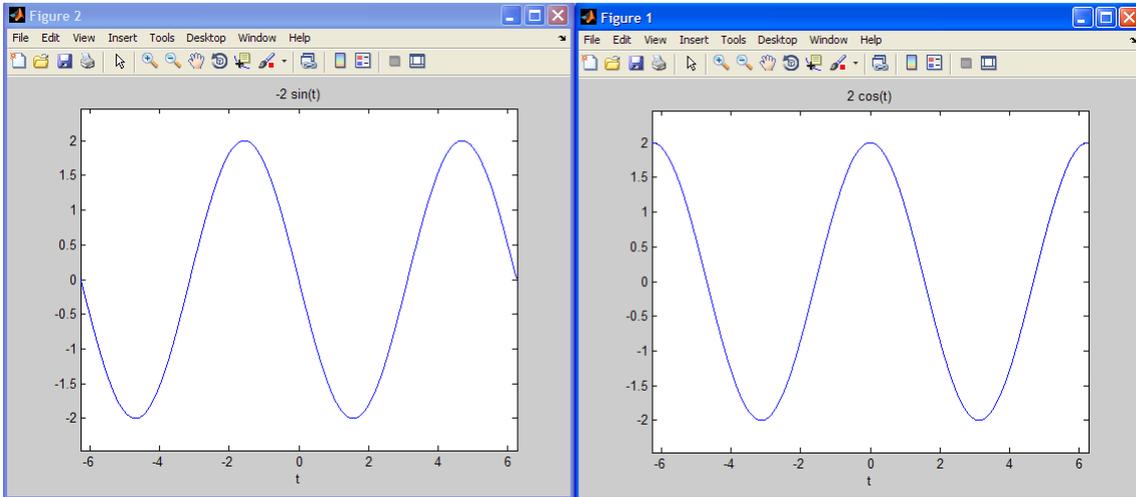
```
>> ezplot(Z)
```

```
>> figure(3)
```

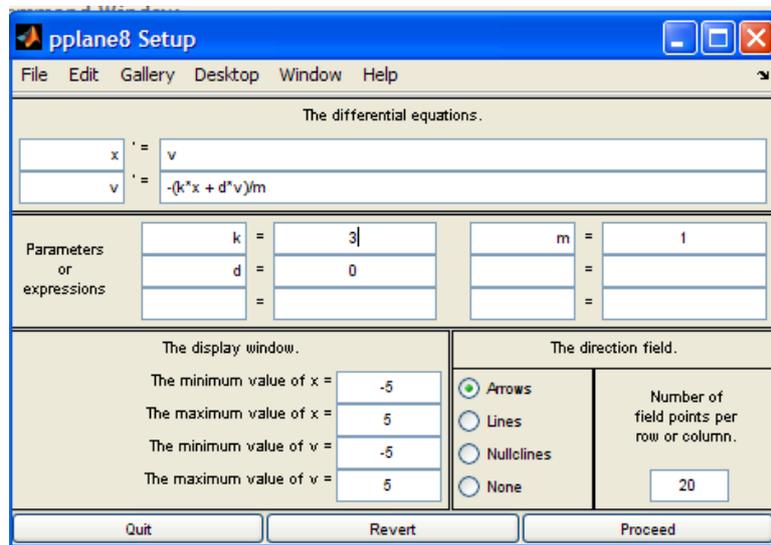
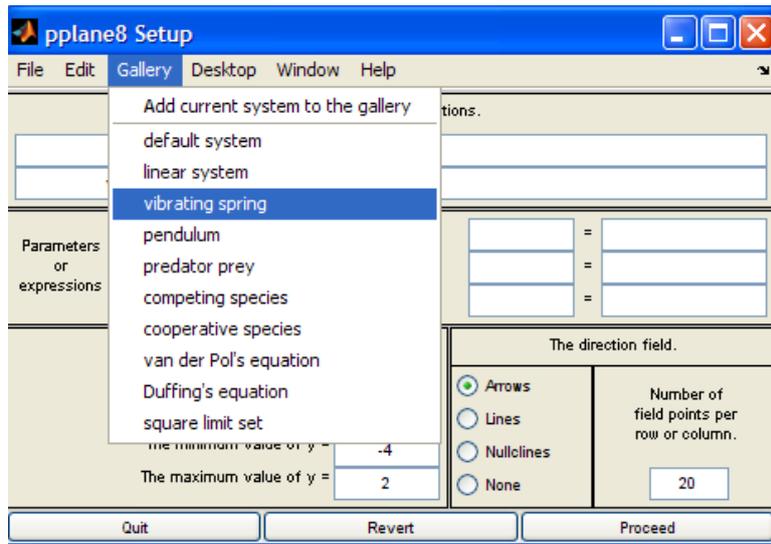
```
>> ezplot(Y,Z)
```

**>> figure(4)**

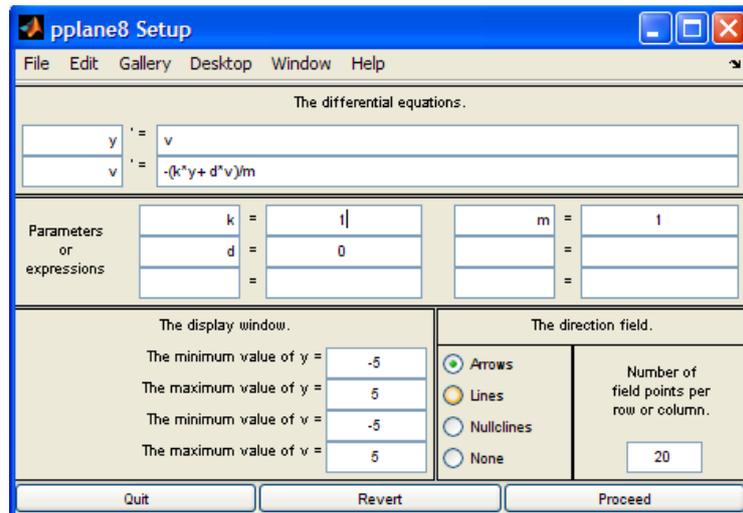
**>> ezplot3(t,Y,Z)**



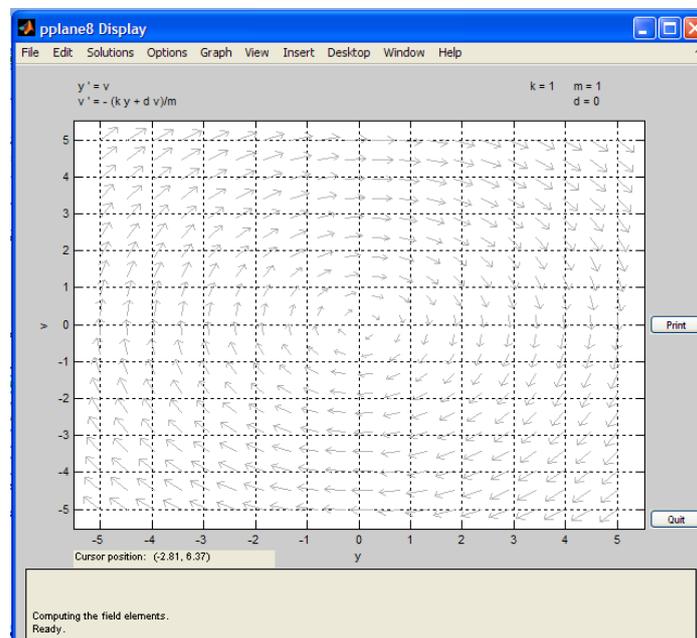
*% Todo esto se puede hacer con el entorno “pplane8” (y con las versiones anteriores de pplane). En la interfaz o carátula de dicho entorno (“Setup”), en “Gallery” se encuentran introducidas ecuaciones y sistemas importantes desde el punto de vista de la modelización matemática. Eligiendo una de ellas (en este caso “vibrating spring”), podemos ajustar los parámetros*



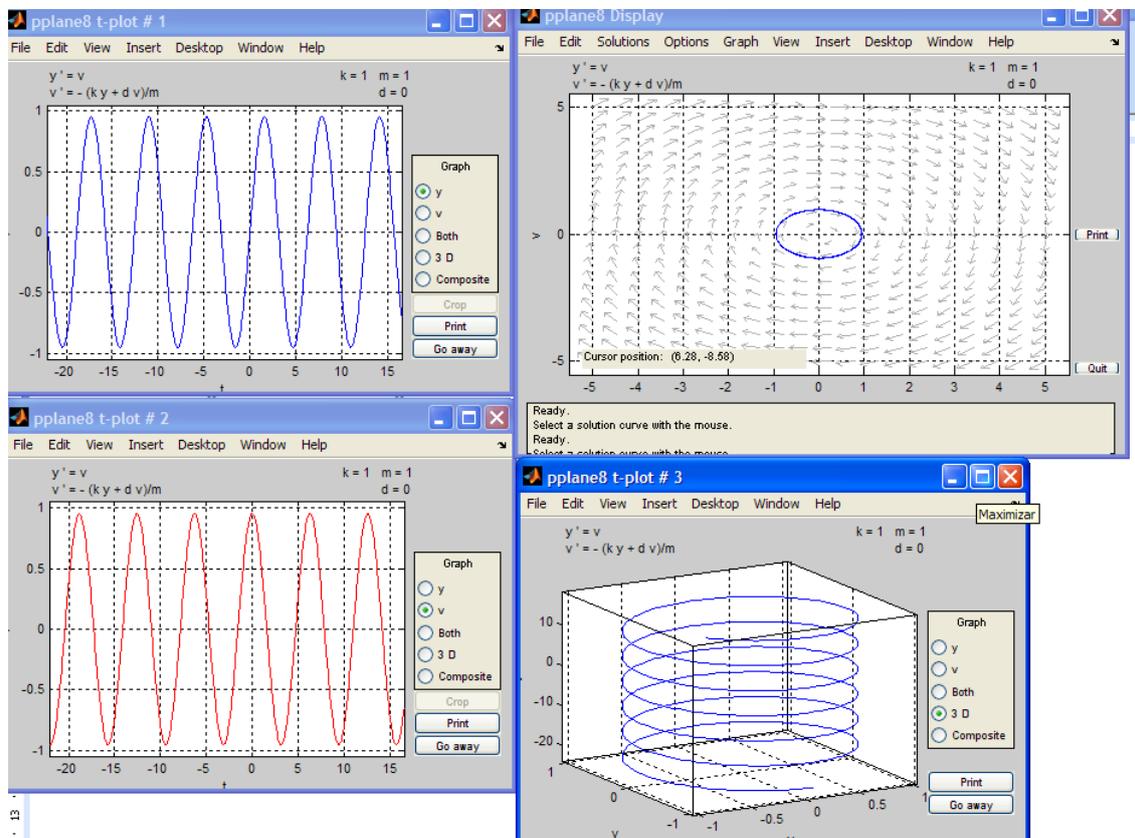
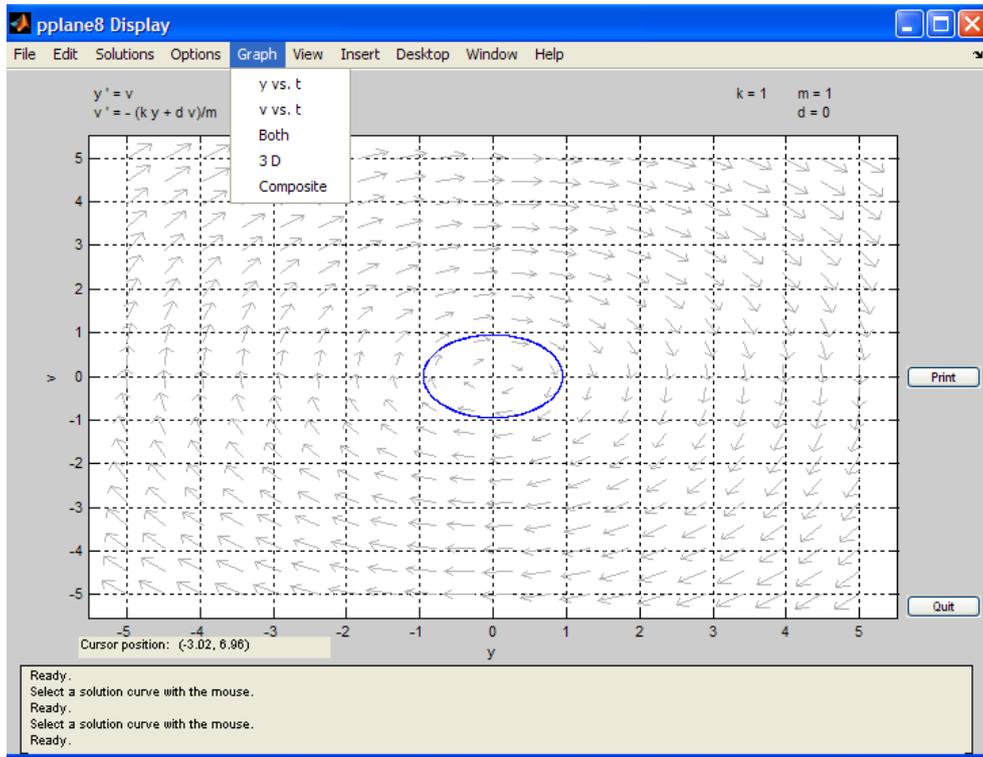
*% En este entorno de "Gallery", por defecto, la x y la v son las funciones incógnita, k es la constante de recuperación, d amortiguación y m masa. También, por defecto, el entorno toma  $k=3$ ,  $m=1$ , e intervalos de variación de x y v [-5,5]. Todo esto se puede cambiar: sugiero cambiar al menos  $x(t)$  por  $y(t)$  ( $v(t)$  es la velocidad, la notación es intuitiva), e introducir nuestros valores de las constantes del resorte  $d=0$ ,  $k=m=1$ . Comparando con la notación elegida en el libro de apuntes (arriba, fuera del entorno pplane), estas variables del entorno son amortiguación k (k es d en la carátula), c constante del resorte (k en la carátula), y la función incógnita  $z(t)$  es  $v(t)$ .*



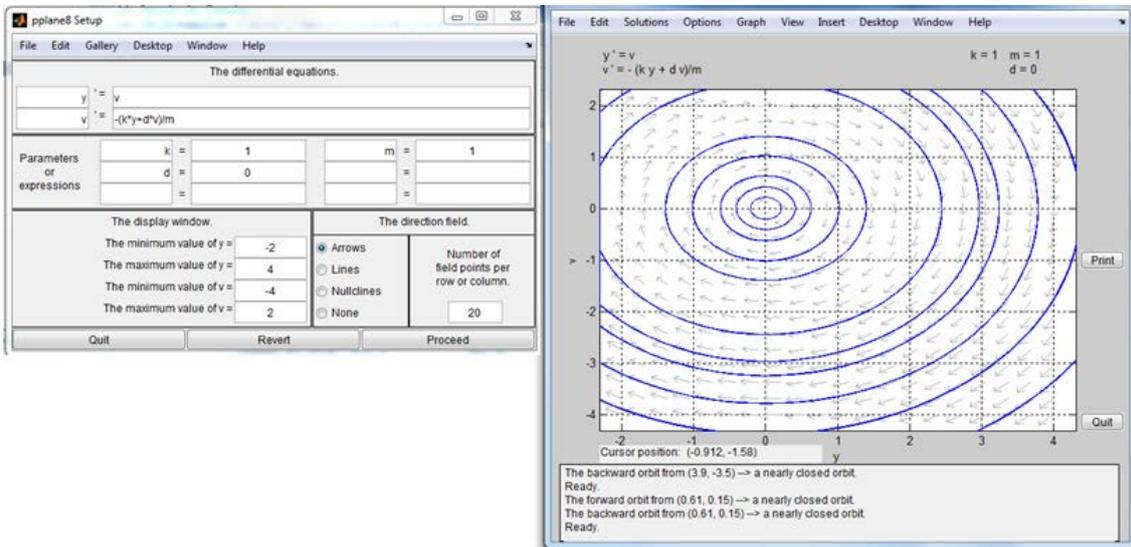
*% Ejecutando “Proceed”, tenemos el campo de direcciones asociado a las trayectorias del sistema. La ecuación diferencial de las trayectorias es  $dz/dy = -y/z$ , las soluciones son las circunferencias centradas en el origen (en el plano  $yz$ ). Si esta ED no se sabe resolver (que no es el caso), se puede dibujar el campo de direcciones que nos da idea de dichas trayectorias (curvas tangentes a los vectores del campo); esto es lo que nos da “pplane”*



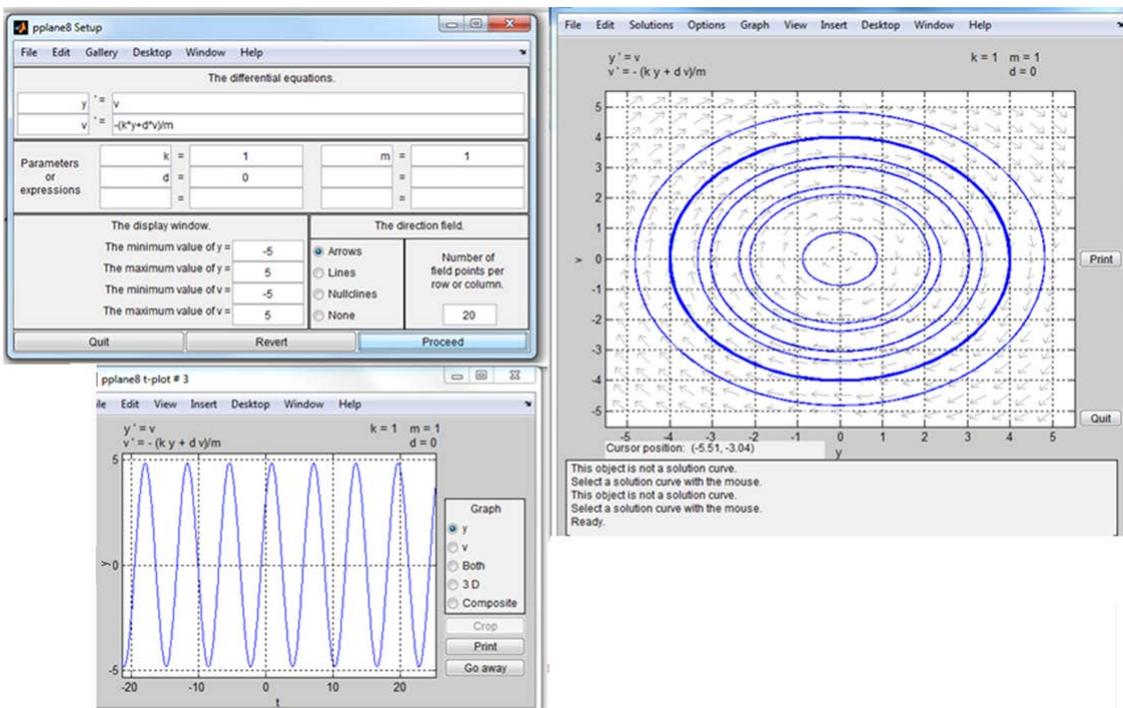
*% Finalmente, pinchando en un punto del plano  $yz$  se obtiene la trayectoria que pasa por él; e.g., abajo la trayectoria que pasa por  $(0,1)$ . Además, en los desplegados del “Display”, “Graph” nos proporciona las gráficas del alargamiento  $y(t)$ , de la velocidad  $v(t)$ , las dos, o la gráfica de la curva solución en el espacio (para unas determinadas condiciones iniciales).*



>> **pplane8**



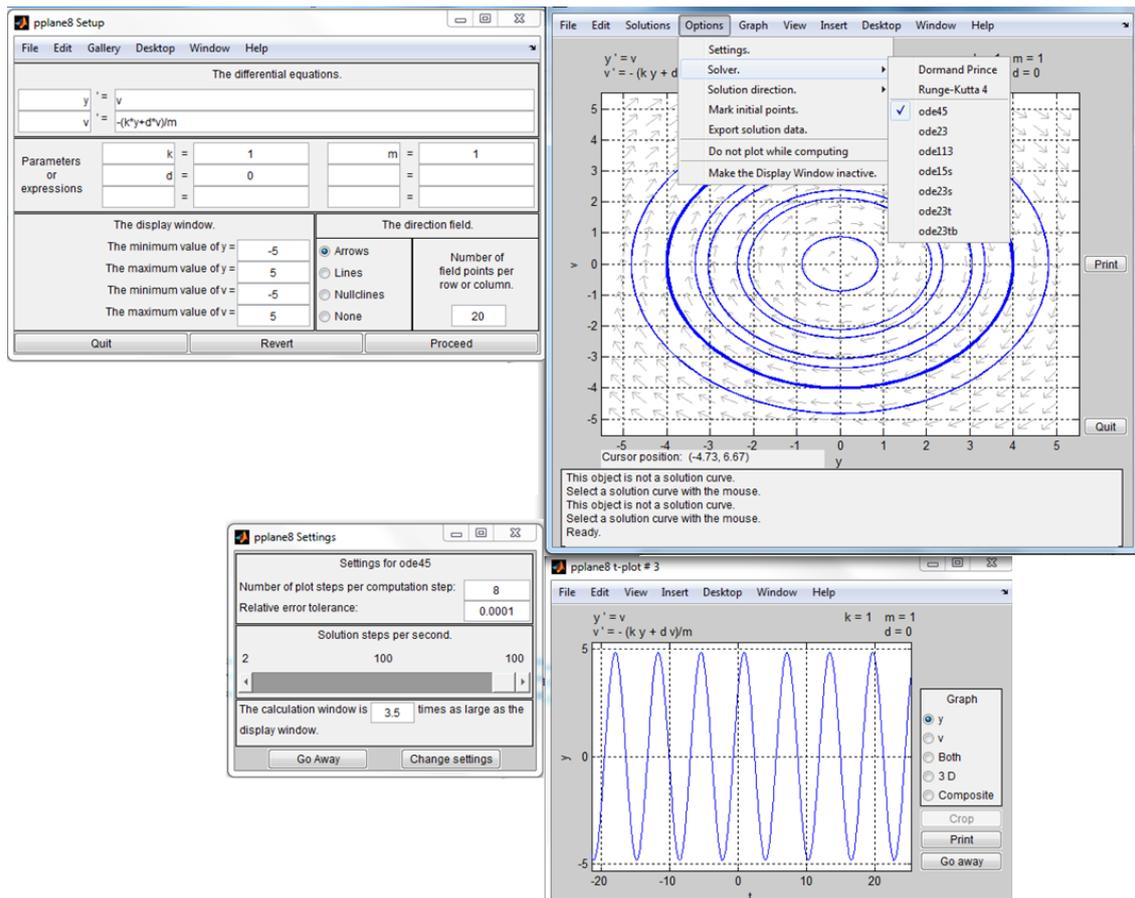
% Podemos combinar diferentes graficas en distintos planos (ty,tz,yz,... o, ty,tv,yv,...)



% Notamos que el campo de direcciones de la ED de las trayectorias no está definido en el origen (0,0). Este es el único punto crítico o estado de equilibrio del sistema: partiendo de condiciones iniciales alargamiento y velocidad inicial nulas, el resorte no se mueve (esto es,  $y(t)=0$ ,  $y'(t)=0$ , para todo  $t>0$ ).

% También podemos utilizar y experimentar con diferentes métodos numéricos, tal y como hemos hecho con el entorno dfield (ver tercer cuaderno del curso).

% De entre todos los métodos a elegir en "Solver" del desplegable "Options", probamos hacer las gráficas con "ode45" (más adelante utilizamos esta función fuera del entorno pplane)

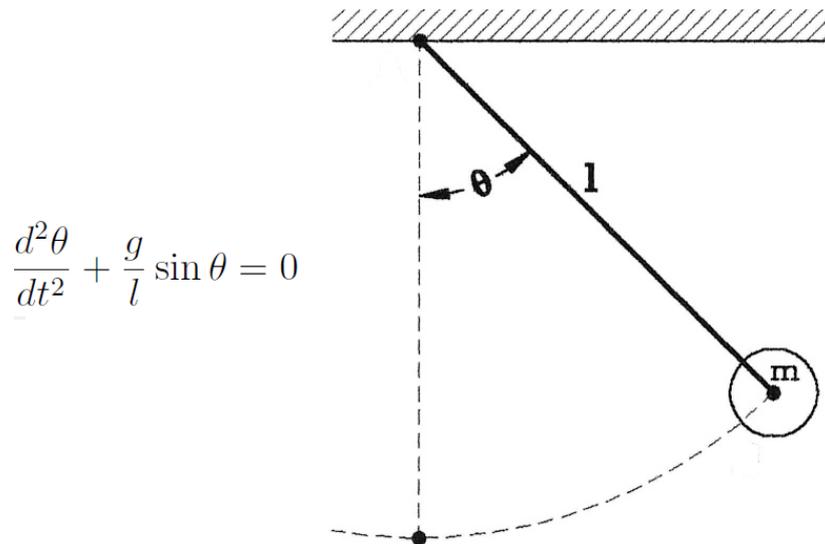


% **Observación:** en este modelo, sistema resorte-masa no amortiguado, hemos podido calcular soluciones y trayectorias (ver sección 4.1 del libro de apuntes). No obstante, la representación de las trayectorias en el plano  $yy'$  puede hacerse sin resolver la ED de segundo orden. De manera general, las trayectorias nos proporcionan información cualitativa sobre soluciones de ecuaciones o sistemas autónomos. El cálculo numérico de soluciones nos proporciona información cuantitativa (ver sección 2.1 del libro de apuntes). En particular, para aproximar y analizar el comportamiento de las soluciones empleamos tres métodos: aproximación numérica, aproximación por linealización cuando se puede, y estudio de las trayectorias en el plano de fases.

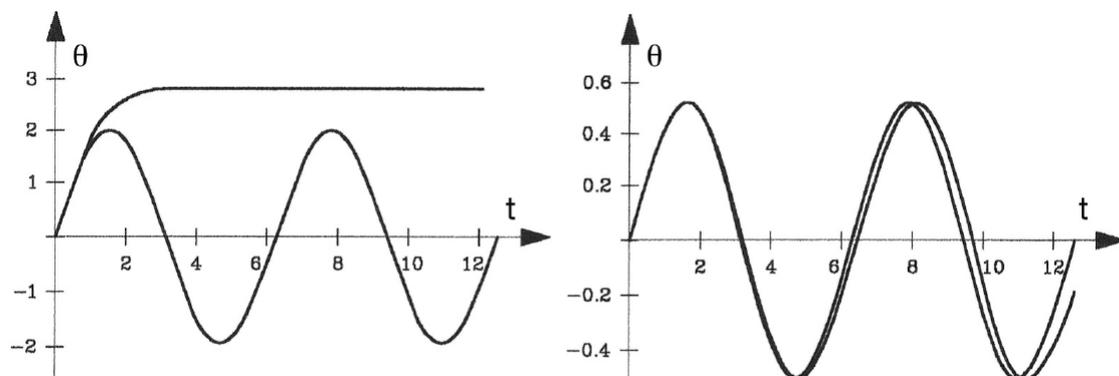
## Ecuación del péndulo: linealización y resolución numérica

### % Ejercicio 2.3

Consideramos la ecuación del péndulo no amortiguado:  $y'' + \sin(y) = 0$ , donde  $y=y(t)$  representa el ángulo con la vertical (ver sección 2.2 del libro de apuntes; también se puede considerar el caso en que hay amortiguación). Comparando con la notación de la figura, aquí denotamos  $y=\theta$ , y se toma  $g/l=1$  en la ED



% Al igual que en sistema resorte-masa, se necesita alguna perturbación inicial para que se inicie el movimiento; e.g., imponemos las condiciones iniciales: ángulo con la vertical  $y(0)=y_0$  y velocidad inicial  $y'(0)=z_0$ , alguna de ellas no nula. Sin embargo, para la ED  $y'' + \sin(y) = 0$  de manera general, no se conocen soluciones explícitas. Tratamos de reproducir y explicar las gráficas (ver figura 29 del libro de apuntes y condiciones iniciales asociadas a las ED en la sección 2.2)



Gráficas de soluciones de  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \theta = 0$  y  $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \sin \theta = 0$ .

*% Comenzamos con métodos numéricos, comparando con soluciones explícitas para ecuaciones lineales de coeficientes constantes que sí se pueden resolver. Tal es el caso de la ecuación del péndulo no amortiguado, que linealizamos, y comparamos las soluciones de la ecuación linealizada con la solución numérica de la ED no linealizada.*

*Consideramos los problemas de Cauchy (ver hoja de problemas 4 del curso)*

$$y'' + \sin(y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.2$$

$$y'' + \sin(y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

*que no se pueden resolver de manera explícita. Intentamos aproximar la solución por la de los problemas de Cauchy para la ecuación linealizada para valores de y cercanos a 0 ( $y''+y=0$ )*

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.2$$

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

*(se conoce la solución de estos problemas). Vemos que en el primer caso se trata de una buena aproximación, mientras que en el segundo no lo es (como consecuencia de la aproximación del desarrollo en serie de Taylor:  $\sin(y)$  se aproxima por  $y$  para valores de  $y$  cercanos a  $y=0$ ). Estos modelos lineales son los considerados ya en el cuaderno en relación al resorte lineal no amortiguado. En el modelo no lineal  $y''+\sin(y)=0$ ,  $y(t)$  representa el ángulo con la vertical en el tiempo  $t$  (ver figura arriba), mientras que en el modelo lineal  $y''+y=0$ ,  $y(t)$  representa el alargamiento. Comparamos soluciones*

*% De la ecuación del péndulo se puede obtener una fórmula integral que nos da  $t$  en términos de  $y$  (ver libro de apuntes); vemos el resultado con Matlab 2011*

**>> dsolve('D2y+sin(y)=0')** *% no encuentra la solución explícita de la ED*

**Warning: Explicit solution could not be found; implicit solution returned.**  
**> In dsolve at 168**

ans =

0

solve(C19 - t + int((2^(1/2)\*i)/(2\*(C17 - cos(y))^(1/2)), y, IgnoreAnalyticConstraints) = 0, y)

solve(C19 - t - int((2^(1/2)\*i)/(2\*(C17 - cos(y))^(1/2)), y, IgnoreAnalyticConstraints) = 0, y)

---

```
>> dsolve('D2y+sin(y)=0','y(0)=0','Dy(0)=0.2') % tampoco resuelve el P. de Cauchy
```

```
{Warning: Explicit solution could not be found.}
```

```
> In matlab:
```

```
opentoline('C:\MATLAB\R2010b\toolbox\symbolic\symbolic\dsolve.m',101,1)">dsolve  
at 101</a>
```

```
ans =
```

```
[ empty sym ]
```

```
% se considera la ED linealizada y los problemas de Cauchy asociados
```

```
>> dsolve('D2y+y=0') % solución general de la ED lineal
```

```
ans =
```

```
C24*cos(t) + C25*sin(t)
```

```
>> Ylineal=dsolve('D2y+y=0','y(0)=0','Dy(0)=0.2') % alargamiento para (y0,z0)=(0,0.2)
```

```
Ylineal =
```

```
sin(t)/5
```

```
>> diff(Ylineal) % velocidad
```

```
ans =
```

```
cos(t)/5
```

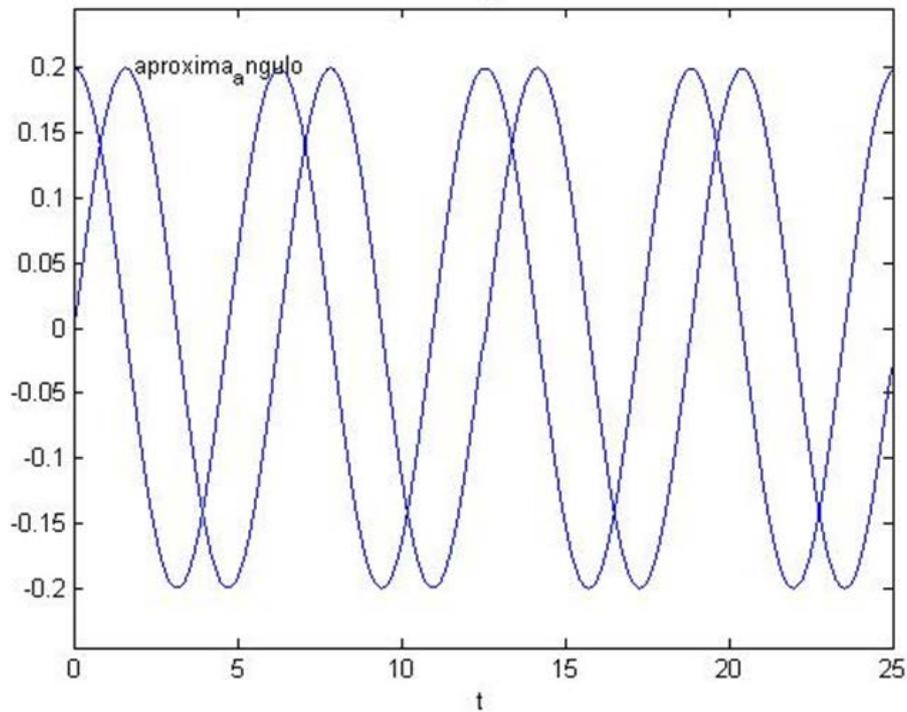
```
>> syms t
```

```
>> ezplot(Ylineal,[0,25]) % gráfica del alargamiento
```

```
>> hold on
```

```
>> ezplot(diff(Ylineal),[0,25]) % gráfica de la velocidad
```

```
>> gtext('aproxima_angulo')
```



*% Aproximamos numéricamente este problema lineal, utilizando ode45, para ello podemos modificar el fichero "fpendulo.m" introduciendo la función vectorial (y(2),-y(1)) y salvar con el nombre de "fpendulolineal.m", por ejemplo.*

**>> type fpendulolineal**

*% Comparamos las gráficas de la solución analítica con "dsolve" (alargamiento, velocidad) y la numérica con "ode45"*

**>> [t,y]=ode45('fpendulolineal',[0,25],[0,0.2]);[t,y]**

ans =

```
0 0 0.2000
0.0003 0.0001 0.2000
0.0005 0.0001 0.2000
0.0008 0.0002 0.2000
0.0010 0.0002 0.2000
.....
.....
11.4951 -0.1754 0.0960
11.6895 -0.1536 0.1281
11.8838 -0.1259 0.1553
```

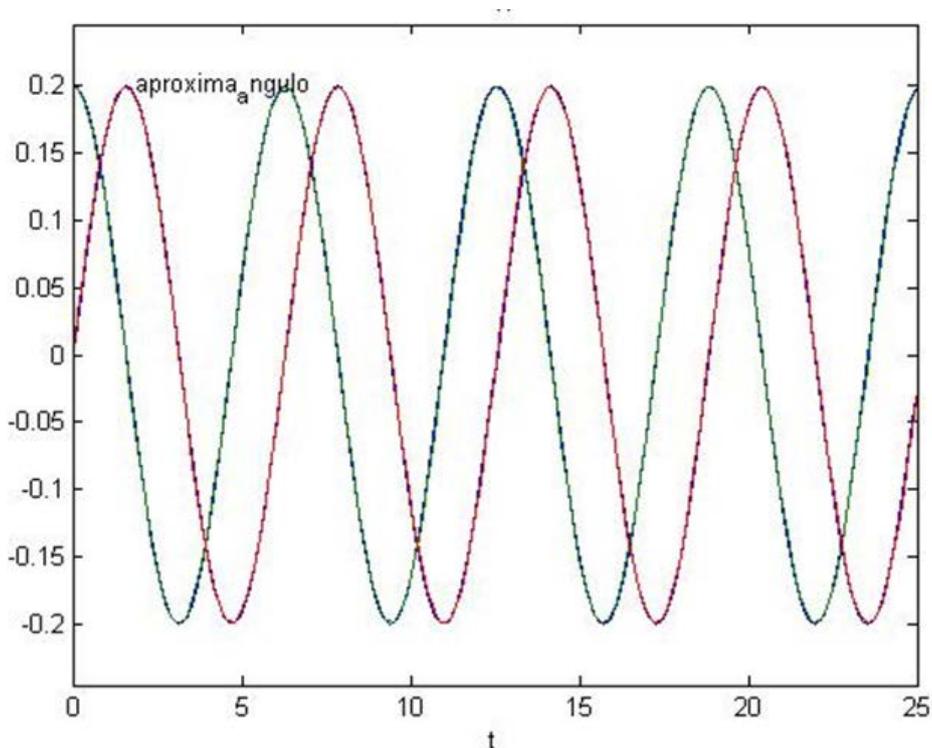
```
.....  
.....  
24.6727 -0.0883 0.1793  
24.7545 -0.0733 0.1859  
24.8364 -0.0579 0.1913  
24.9182 -0.0421 0.1954  
25.0000 -0.0259 0.1982
```

*% en la salida [t,y]: t es el vector “discretización” de la variable temporal, e y la matriz que contiene la aproximación de la solución y de la derivada (primera y segunda columna de dicha matriz, respectivamente) en el tiempo t.*

**>> plot(t,y)**

*% esta opción contiene dos gráficas, una para el alargamiento, y otra para la velocidad (gráficas en azul y en verde, respectivamente), que se confunden con las que teníamos con “dsolve” y “ezplot”*

**>> plot(t,y(:,1),'r')** *% dibuja sólo el alargamiento y(:,1), ahora en la gráfica en rojo*



*% Dado que la ecuación del péndulo no se resuelve, resolvemos los problemas de Cauchy numéricamente con “ode45”; la función para resolver la ED  $y'' + \sin(y) = 0$  está definida en el fichero Matlab fpendulo.m*

**>> type fpendulo**

*% A continuación, comparando con la solución de la ED del péndulo, con la lineal, para las mismas condiciones iniciales*

**>> [t,y]=ode45('fpendulo',[0,25],[0,0.2]);[t,y]**

ans =

0	0	0.2000
0.0003	0.0001	0.2000
0.0005	0.0001	0.2000
0.0008	0.0002	0.2000
0.0010	0.0002	0.2000
.....		
10.3249	-0.1538	-0.1279
10.5219	-0.1759	-0.0955
10.7253	-0.1916	-0.0582
10.9286	-0.1994	-0.0185
11.1320	-0.1991	0.0219
.....		
24.1725	-0.1704	0.1047
24.3619	-0.1477	0.1348
24.5514	-0.1196	0.1601
24.7408	-0.0873	0.1798
24.8056	-0.0755	0.1850
24.8704	-0.0634	0.1895
24.9352	-0.0510	0.1932
25.0000	-0.0383	0.1961

*% pedimos que se dibuje esta aproximación sobre las gráficas anteriores con círculos y nos damos cuenta que son prácticamente las mismas gráficas. Es decir, la aproximación de la solución de la ecuación lineal es muy buena para las condiciones iniciales (0,0.2). De hecho, las aproximaciones en t=25 con "fpendulolineal" ( $y''+y=0$ ) y con "fpendulo" ( $y''+\sin(y)=0$ ) se diferencian muy poco:*

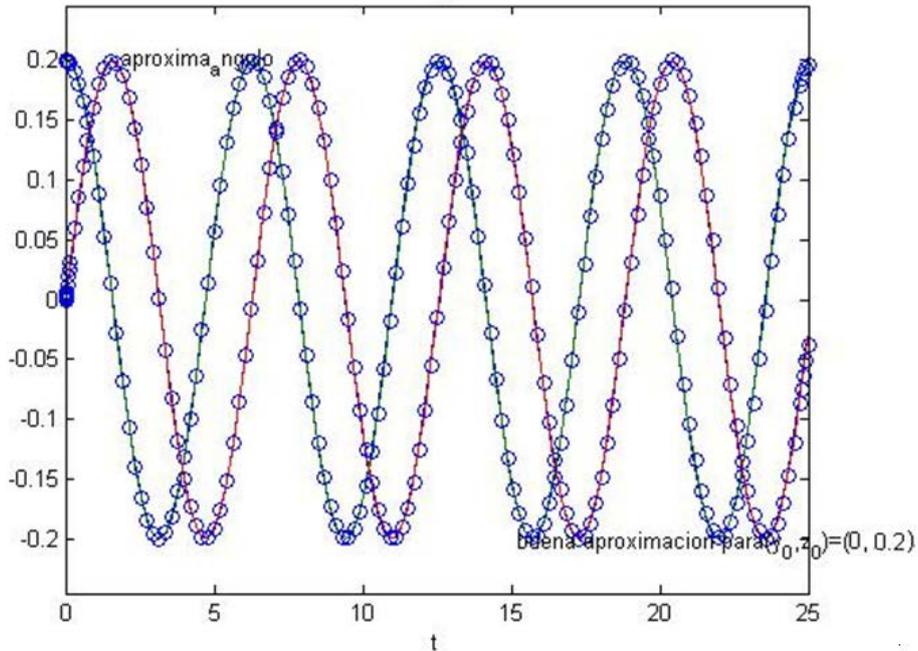
*"ode45('fpendulolineal',[0,25],[0,0.2])" nos da que en t=25.0000, y(t) se aproxima por -0.0259, e y'(t) se aproxima por 0.1982.*

*"ode45('fpendulo',[0,25],[0,0.2])" nos da que en t=25.0000, y(t) se aproxima por -0.0383, e y' se aproxima por 0.1961.*

**>> plot(t,y(:,1),'o')**

```
>> plot(t,y(:,2),'o')
```

```
>> gtext('buena aproximacion para (y_0,z_0)=(0,0.2)')
```



*% Pasamos a comparar soluciones de estos modelos lineal y no lineal, con las otras condiciones iniciales:  $y(0)=0, y'(0)=2$*

```
>> [t,y]=ode45('fpendulolineal',[0,25],[0,2]);[t,y]
```

ans =

```

    0      0  2.0000
  0.0000  0.0001  2.0000
  0.0001  0.0001  2.0000
  0.0001  0.0002  2.0000
  0.0001  0.0002  2.0000
  .....
 24.1066 -1.7071  1.0397
 24.2957 -1.4813  1.3421
 24.4848 -1.2027  1.5964
 24.6738 -0.8811  1.7939
 24.7554 -0.7321  1.8597
 24.8369 -0.5782  1.9131
 24.9185 -0.4204  1.9539
 25.0000 -0.2599  1.9816
    
```

```
>> plot(t,y,'y')  
  
axis([0,25,-2,2])  
  
>> [t,y]=ode45('fpendulo',[0,25],[0,2]);[t,y]
```

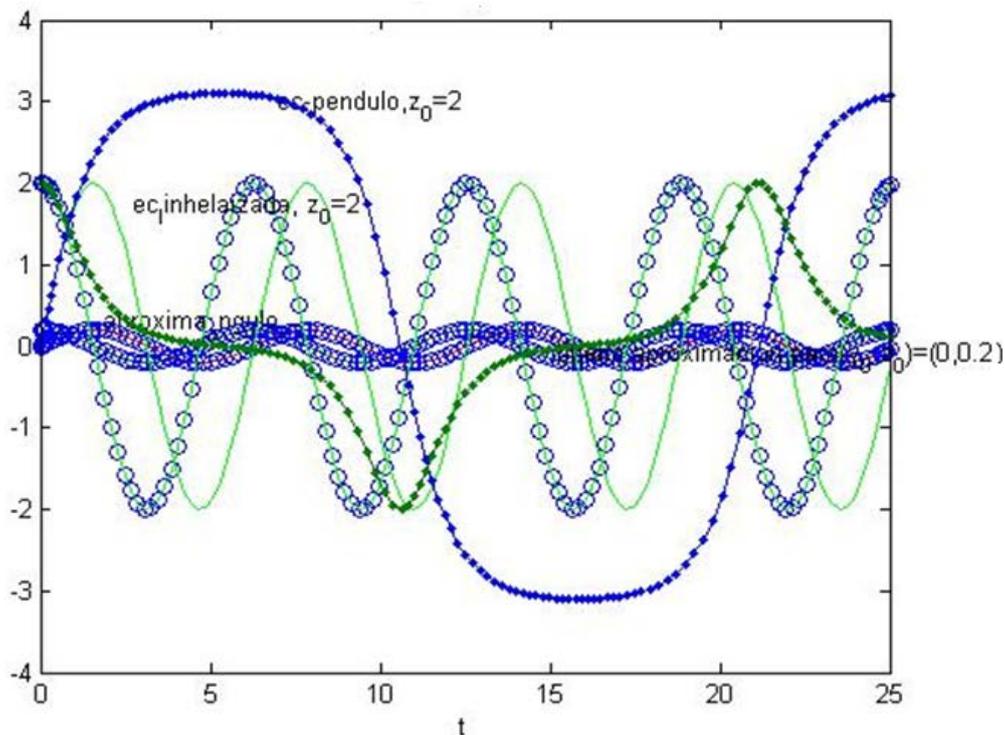
ans =

0	0	2.0000
0.0000	0.0001	2.0000
0.0001	0.0001	2.0000
0.0001	0.0002	2.0000
0.0001	0.0002	2.0000
0.0002	0.0005	2.0000
0.0004	0.0007	2.0000
0.0005	0.0010	2.0000

.....  
.....

23.8734	2.8862	0.2657
24.1226	2.9449	0.2104
24.3420	2.9868	0.1721
24.5613	3.0212	0.1421
24.7807	3.0496	0.1190
25.0000	3.0736	0.1016

```
>> plot(t,y,'g')  
  
>> axis([0,25,-3,3])  
  
>> axis([0,25,-4,4])  
  
>> gtext('ec_pendolo, z_0=2')  
  
>> gtext('ec_lienalizada, z_0=2')  
  
>> plot(t,y,'.-')
```

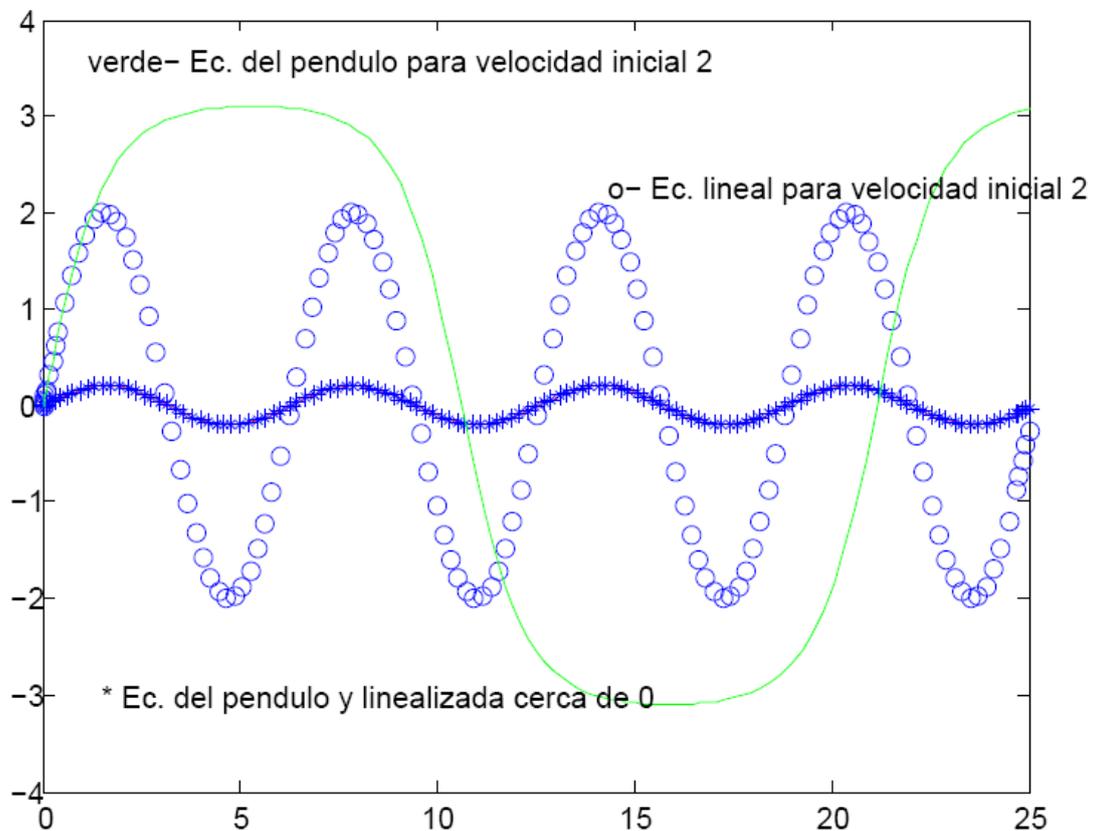


*% La gráfica de arriba representa soluciones alargamiento y velocidad para los dos tipos de condiciones iniciales. Para las segundas condiciones iniciales  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=2$ , vemos que las aproximaciones son pésimas. Esto es debido a que  $y(t)$  no se mantiene cerca de 0 ( dado que la velocidad inicial es  $y'(0)=2$  ). Las gráficas en verde corresponden a la solución de la ecuación lineal  $(y(t),z(t))=(-2\sin(t),2\cos(t))$ . En cambio, con condiciones iniciales  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=0.2$ ,  $y(t)$  se mantiene relativamente pequeña, y la aproximación de  $\sin(y(t))$  por  $y(t)$  es buena: las gráficas de la aproximación y de la solución coinciden prácticamente.*

*% Abajo, vemos mejor las gráficas de las soluciones analíticas o numéricas para la ED lineal y la ED del péndulo*

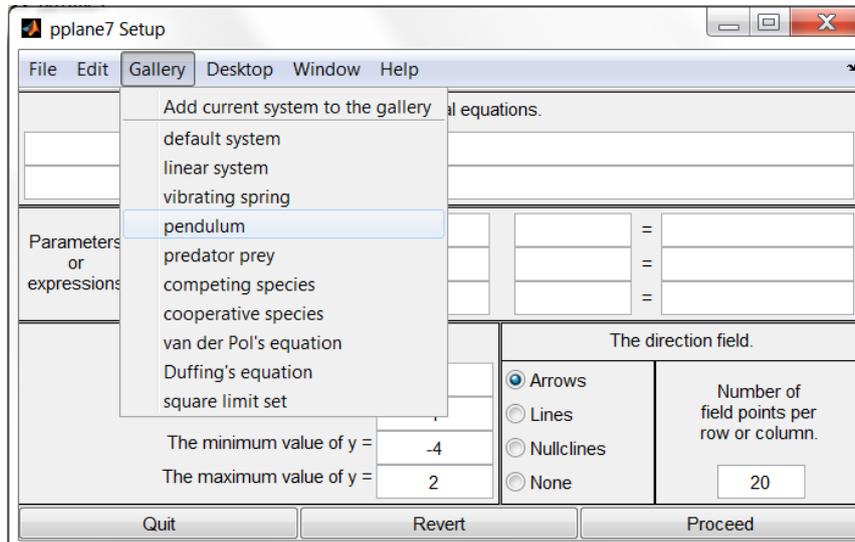
```
>> [t,y]=ode45('fpendulo',[0,25],[0,0.2]);
>> plot(t,y(:,1),'r') % solución numérica de la ED del péndulo,  $y(:,1) \ll 1$ 
>> [t,y]=ode45('fpendulolineal',[0,25],[0,0.2]);
>> hold on
>> plot(t,y(:,1),'*') % solución numérica de la ED lineal,  $y(:,1) \ll 1$ 
>> [t,y]=ode45('fpendulolineal',[0,25],[0,2]);
```

```
>> plot(t,y(:,1),'o')  
  
>> [t,y]=ode45('fpendulo',[0,25],[0,2]);  
  
>> plot(t,y(:,1),'g')  
  
>> gtext('* Ec. del pendulo y linealizada cerca de 0')  
  
>> gtext('verde- Ec. del pendulo para velocidad inicial 2')  
  
>> gtext('o- Ec. lineal para velocidad inicial 2')
```

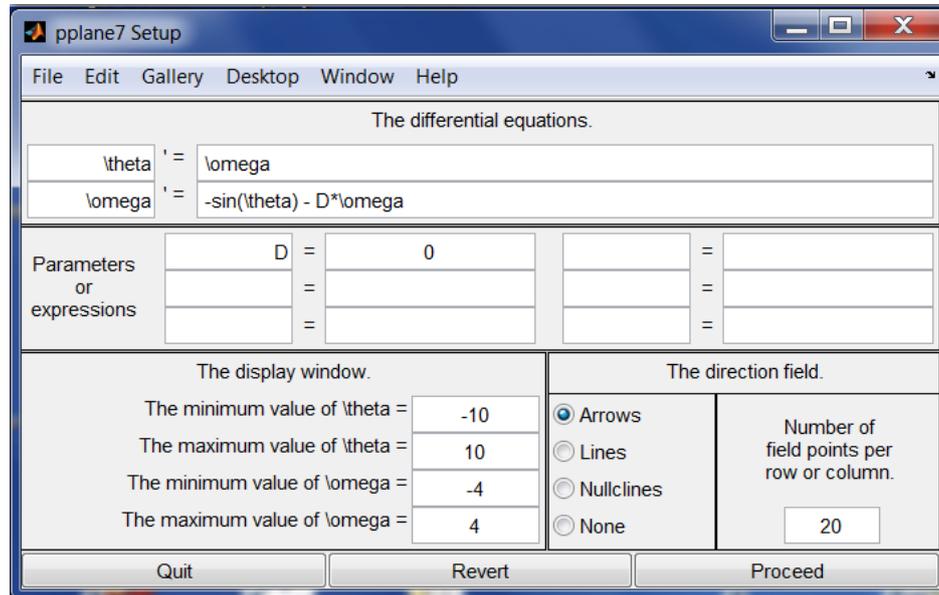


**% Representación de las trayectorias** asociadas a la ecuación del péndulo  $y'' + \sin(y) = 0$ .  
Esto es, las soluciones de la ED  $dz/dy = -\sin(y)/z$ , además de los puntos críticos  $(k\pi, 0)$ ,  
con  $k$  entero. Usamos el entorno "pplane7" o "pplane8"

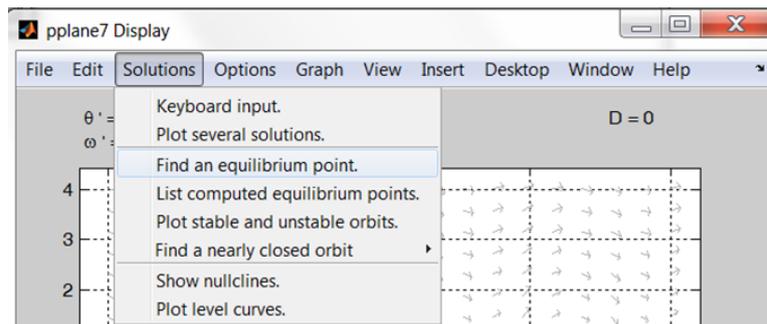
>> **pplane7**



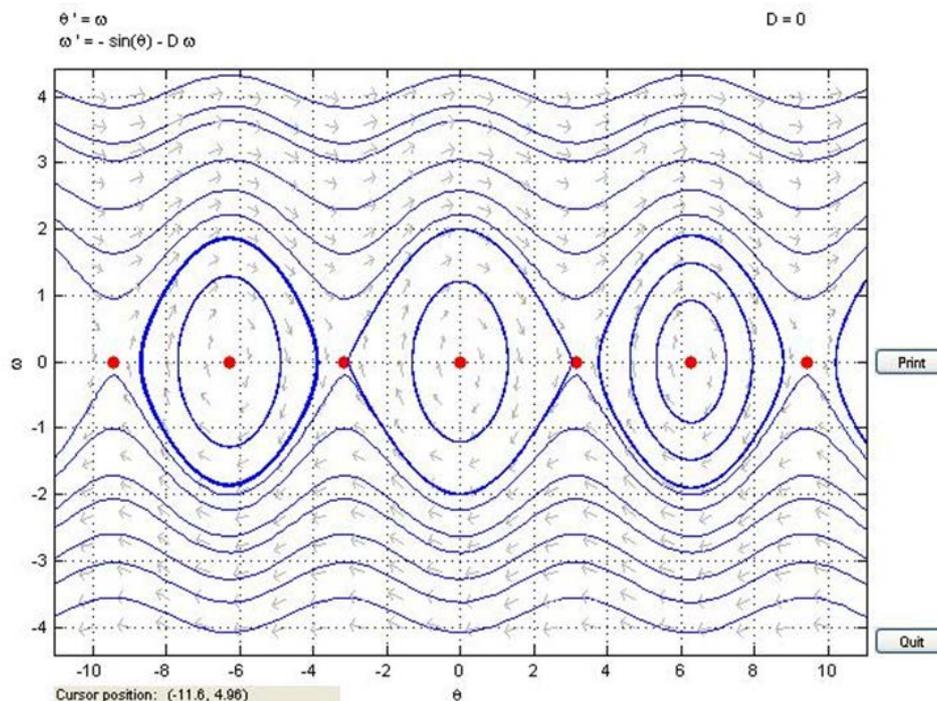
*% En la interfaz "Setup" elegimos "Gallery", y luego "pendulum" y "Proceed". Por defecto, las variables  $\theta$  y  $\omega$  que aparecen representan ángulo y velocidad (y e y' con nuestra notación previa), y el rectángulo donde se dibuja el campo de direcciones asociado a la ED de las trayectorias es:  $(\theta, \omega)$  en  $[-10,10] \times [-4,4]$ .*



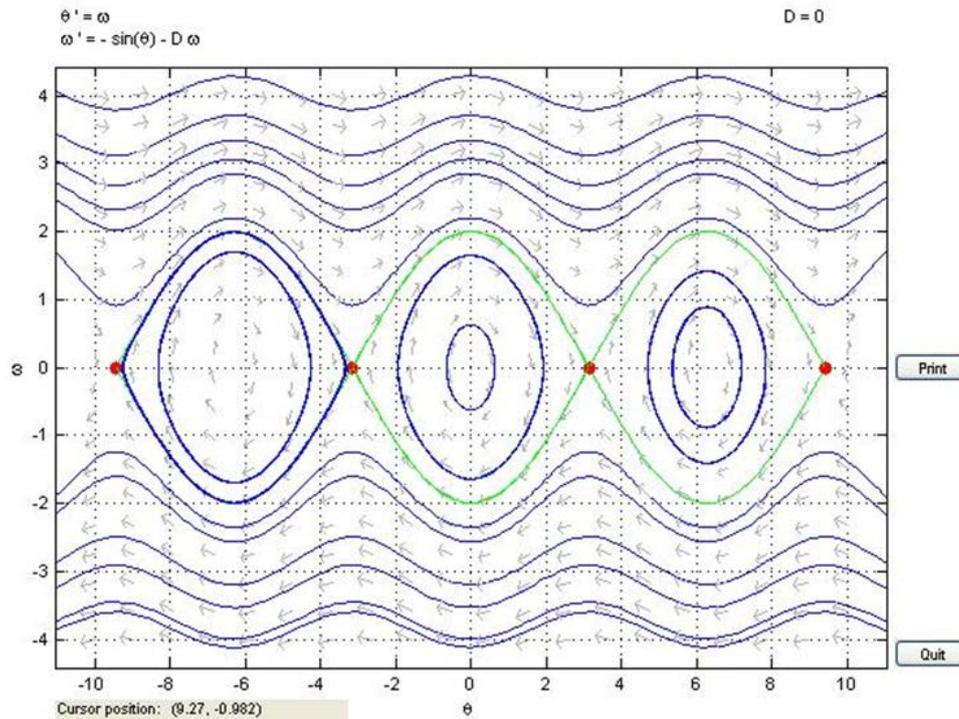
*% Para dibujar las distintas trayectorias basta con pinchar en distintos puntos, mientras que para dibujar los puntos críticos, debemos indicarlo en el desplegable de "Solutions", "Find an equilibrium point", y luego pinchar cerca de un punto de equilibrio para que le calcule numéricamente... El entorno es análogo a "dfield".*



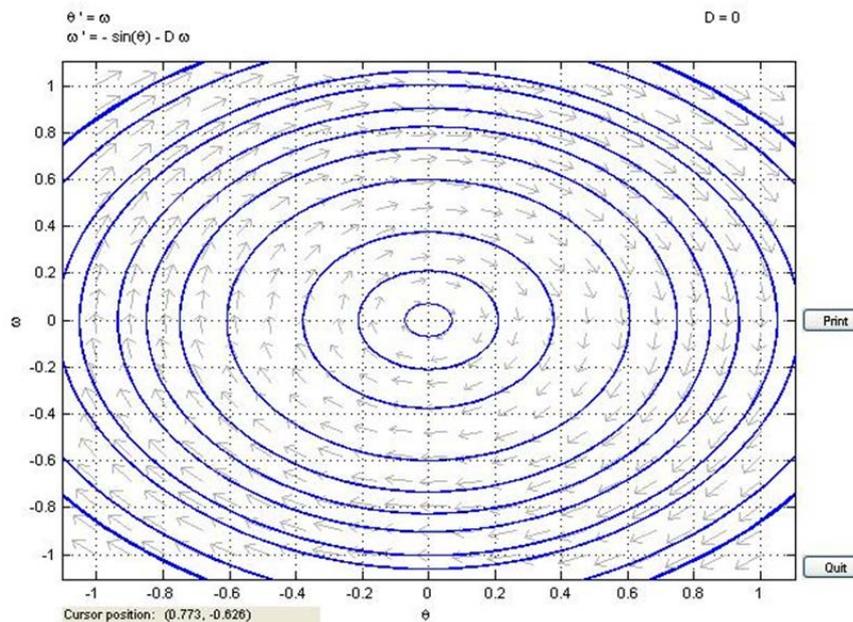
*% Abajo, trayectorias con puntos críticos estables  $(2k\pi, 0)$ , e inestables  $((2k+1)\pi, 0)$ . Cuando consideramos una trayectoria cerca de un punto crítico  $(2k\pi, 0)$ , vemos que se trata de una curva cerrada que se mantiene cerca de este punto, y por tanto, pasado un tiempo, el movimiento se repite: son puntos de equilibrio estables. Corresponden a posiciones del péndulo: ángulo cero con la vertical y velocidad cero. Mientras que los otros puntos de equilibrio  $((2k+1)\pi, 0)$  corresponden a posiciones del péndulo: ángulo  $\pi$  con la vertical y velocidad cero. Claramente en ellos el equilibrio es inestable: en cuanto el péndulo se desplaza un poco de esta posición de equilibrio, se tienen comportamientos de soluciones muy distintos dependiendo de que las trayectorias asociadas queden dentro de las líneas en verde (abajo) o fuera (ver ejemplo 38 del libro de apuntes, sección 3.4.4)*



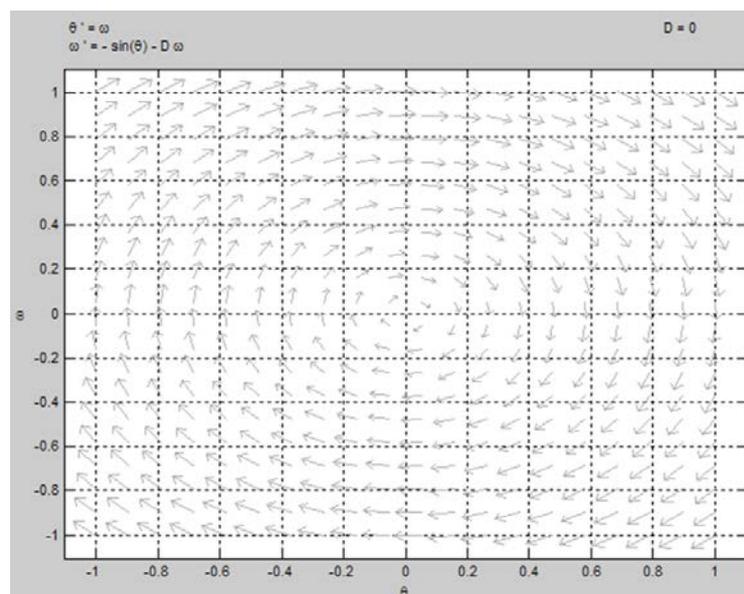
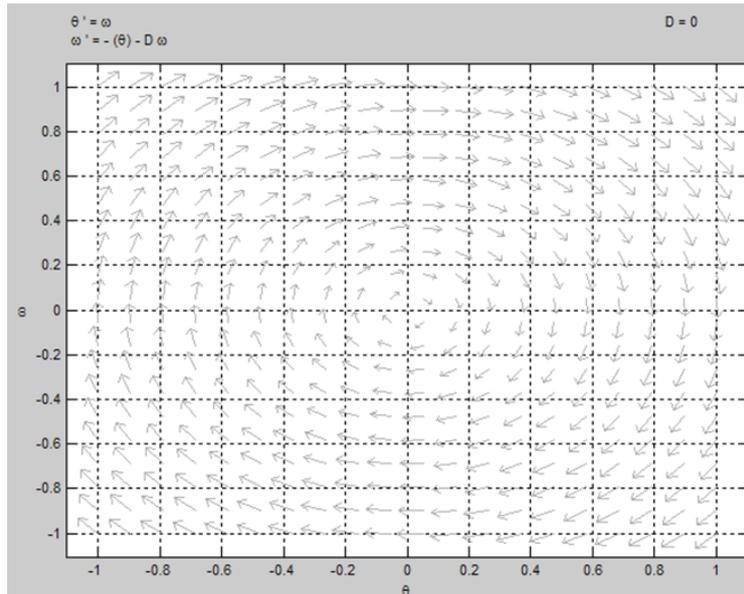
*% Abajo, trayectorias que aparentemente “unen” dos puntos de equilibrio inestables (en verde, trozos de curva  $z^2 - 2\cos(y) = 2$ )*



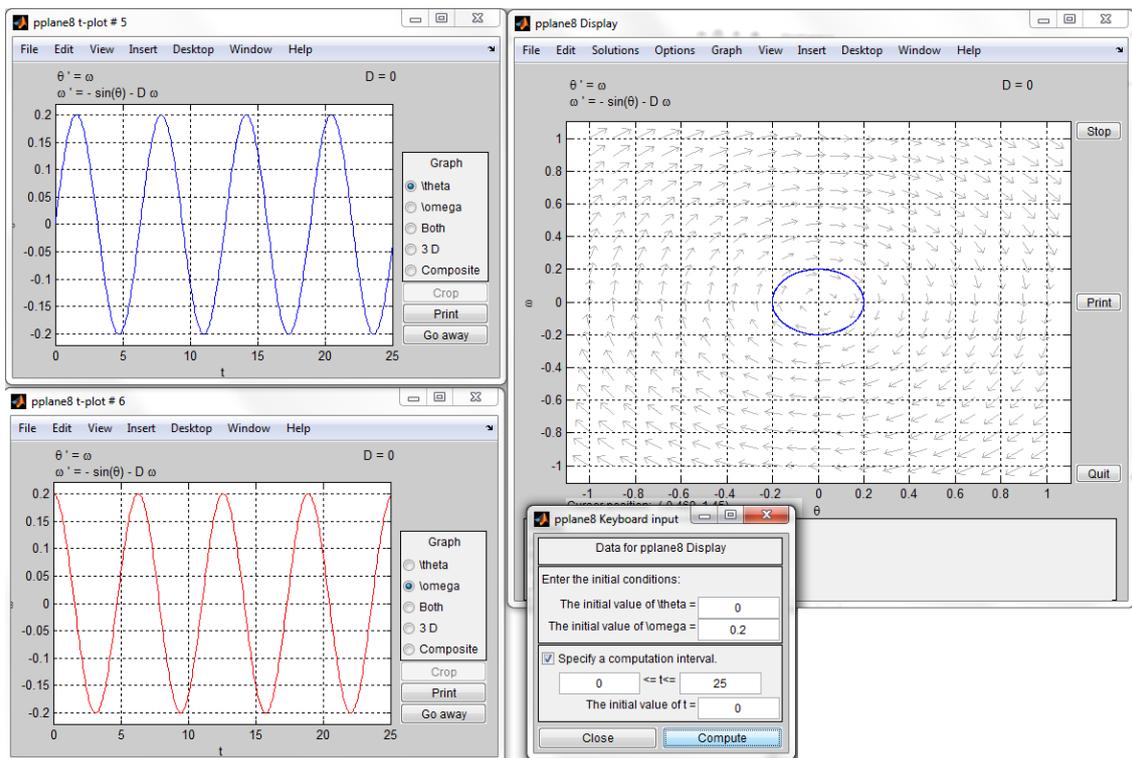
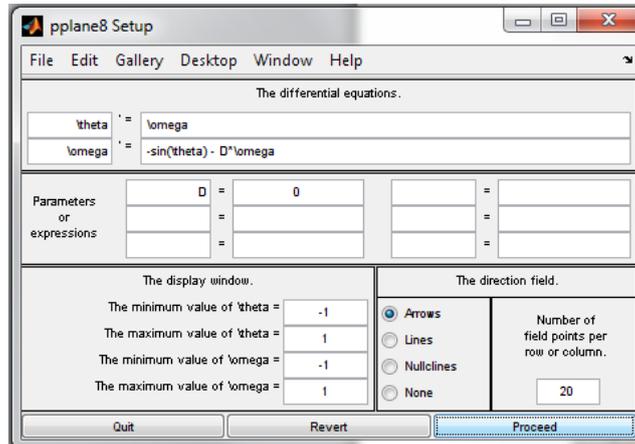
*% El plano de fases cerca de un punto de equilibrio estable (0,0): ecuación del péndulo y ecuación linealizada. Se comprueba la similitud del campo de direcciones, y de las trayectorias, en el plano de fases para  $y'' + \sin(y) = 0$  y para  $y'' + y = 0$  en  $[-1,1] \times [-1,1]$ .*



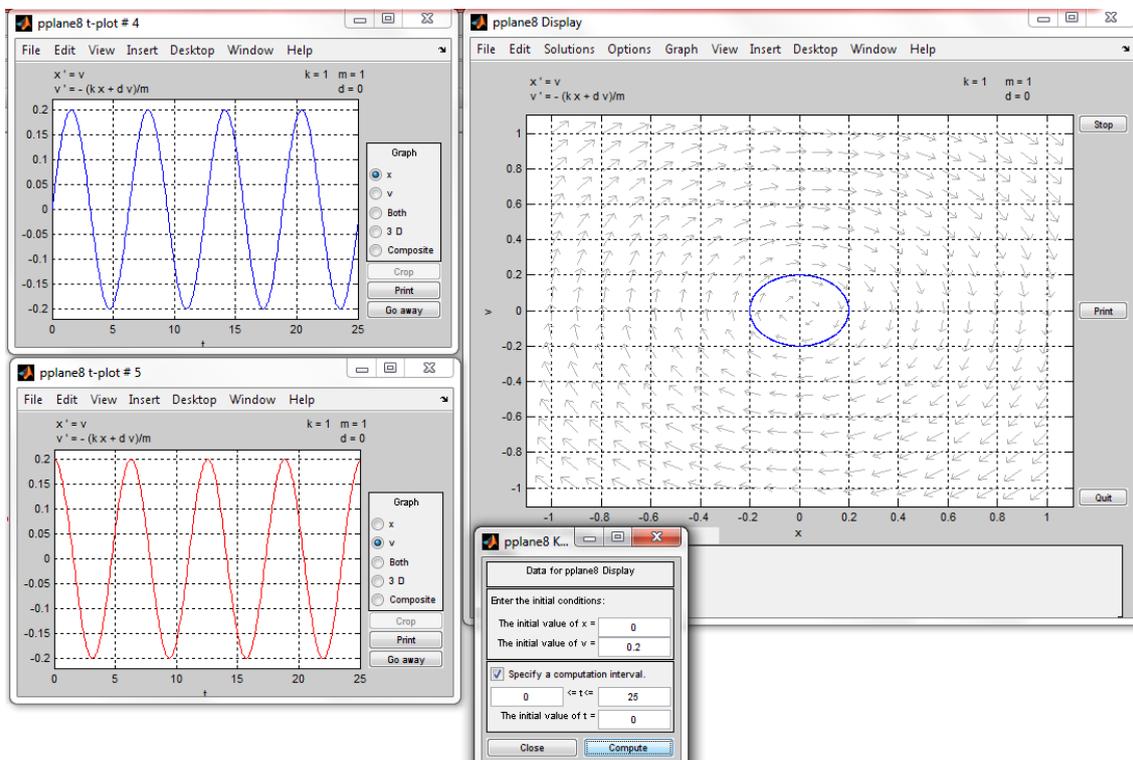
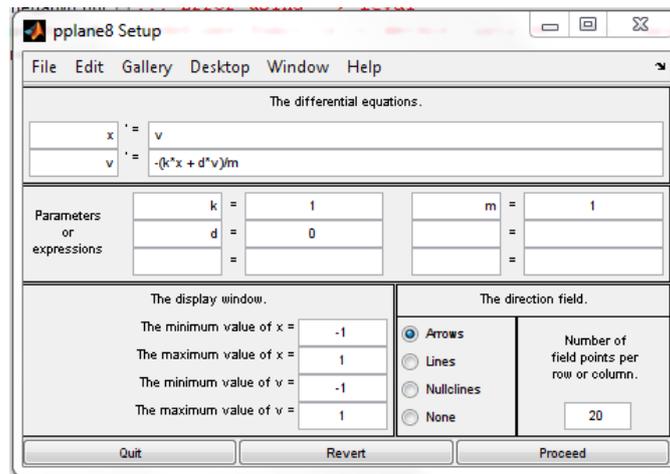
% Las trayectorias del sistema asociado a la ecuación del péndulo cerca del punto de equilibrio (0,0) son curvas cerradas; las soluciones son periódicas. Abajo, los campos de direcciones de las ED de las trayectorias para la ecuación linealizada y para la del péndulo. Vemos que son muy parecidos en [-1,1]x[-1,1]. Leyendo del teclado un punto dibujamos una trayectoria en ambos, y las gráficas de la solución y de la derivada viendo la similitud.



*% Para los dos modelos, comparamos las soluciones asociadas a las trayectorias que pasan por (0,0.2); vemos que prácticamente coinciden para t en [0,25]. Se lee del teclado (0,0.2) (“Options”, “Keyboard input”) representamos la trayectoria, el alargamiento y la velocidad para t en [0,25]. Utilizamos “pplane8”, “pendulum” y “vibrating spring” en el desplegable de “Gallery”*

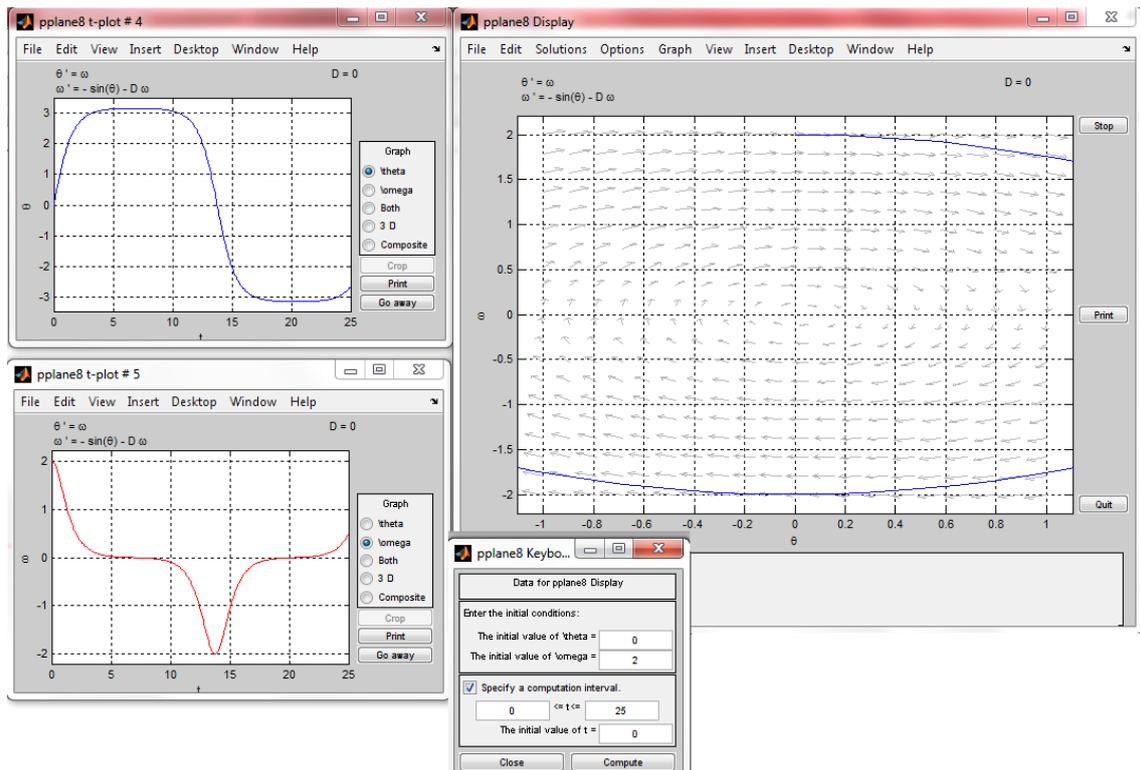


*% aquí se puede cambiar sin(θ) por θ, o utilizar en “Gallery” la interfaz relativa al modelo del resorte*

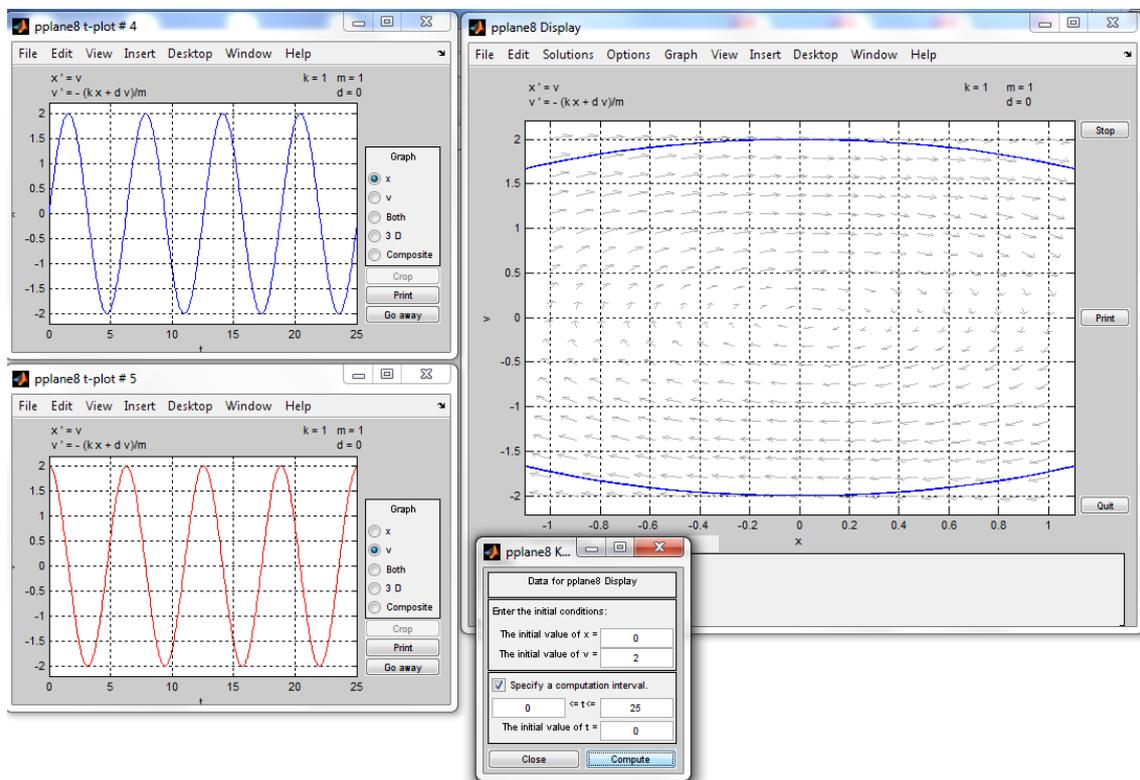


*% trayectoria, solución, y derivada, parecen ser las mismas en ambos modelos.  
 Observamos que la solución que dibuja es tal que  $y(0)=0$ ,  $y'(0)=0.2$*

*% A continuación repetimos lo mismo, pero con la trayectoria pasando por (0,2);  
 vemos lo distintas que son las soluciones*

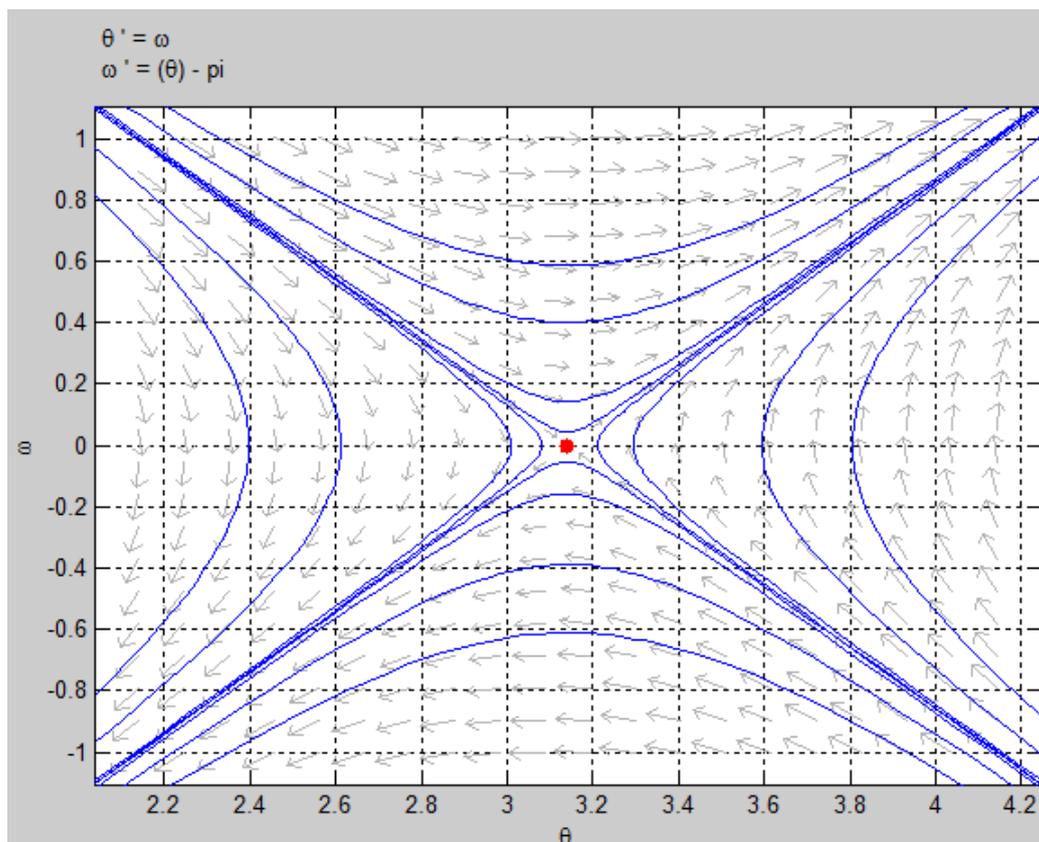


*% arriba, trayectoria pasando por (0,2), una solución asociada, y derivada de ésta, para la ecuación del péndulo (t en [0,25]); abajo lo mismo para la ecuación linealizada*

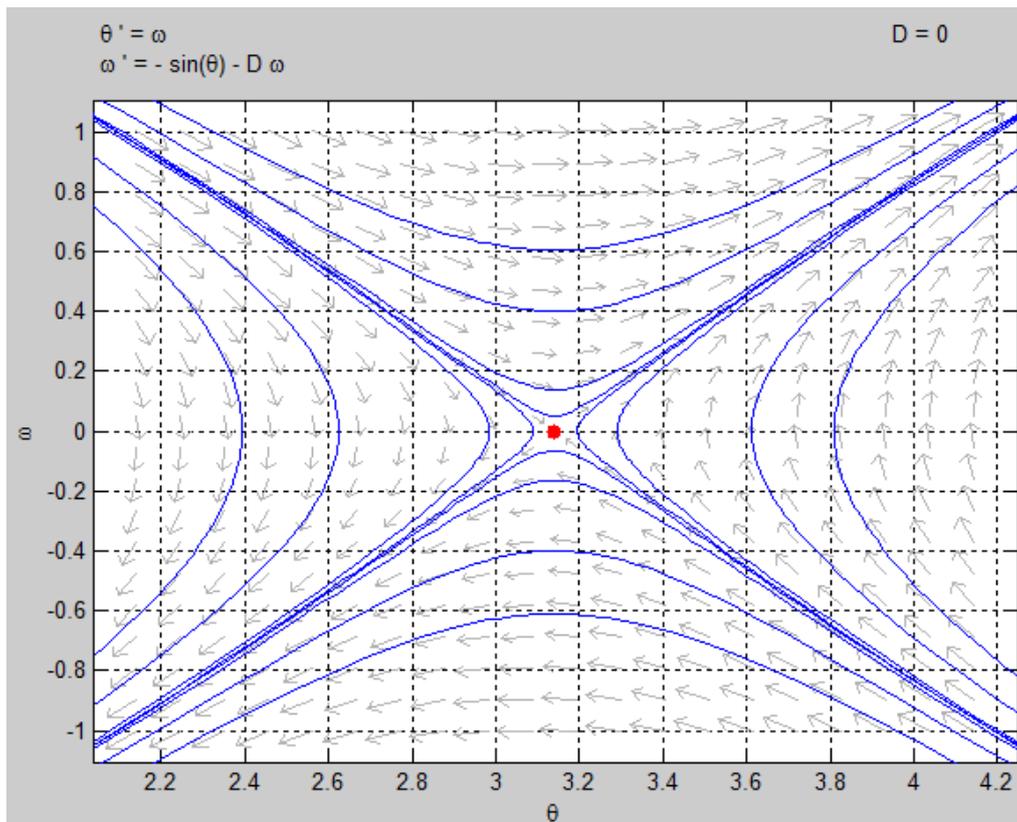


**% Plano de fases cerca de un punto de equilibrio inestable ( $\pi, 0$ ):**  $\sin(y)$  se aproxima por  $-y+\pi$  para  $y$  cercano a  $y=\pi$ . Así, para valores de  $y(t)$  próximos a  $\pi$ , la ecuación linealizada de  $y''+\sin(y)=0$  es  $y''-y=-\pi$ . Comparamos los planos de fases para ambas ED en  $[\pi-1,\pi+1] \times [-1,1]$ .

**% Abajo la gráfica de las trayectorias para la ecuación linealizada (no se trata de ningún modelo de resorte considerado al principio del cuaderno). Las trayectorias no son curvas cerradas, y por tanto, las soluciones no son periódicas.**



**% Comparamos este dibujo de trayectorias con el de las trayectorias para la ED del péndulo en el mismo entorno del punto ( $\pi, 0$ ), viendo la similitud**



% Abajo, vemos que los dos campos de direcciones de las ED de las trayectorias de los modelos son muy parecidos

**pplane7 Display**  
 File Edit Solutions Options Graph View Insert Desktop Window Help

$\theta' = \omega$   
 $\omega' = (\theta) - \pi$

**pplane7 Setup**  
 File Edit Gallery Desktop Window Help

The differential equations.  
 $\theta'$  =   
 $\omega'$  =

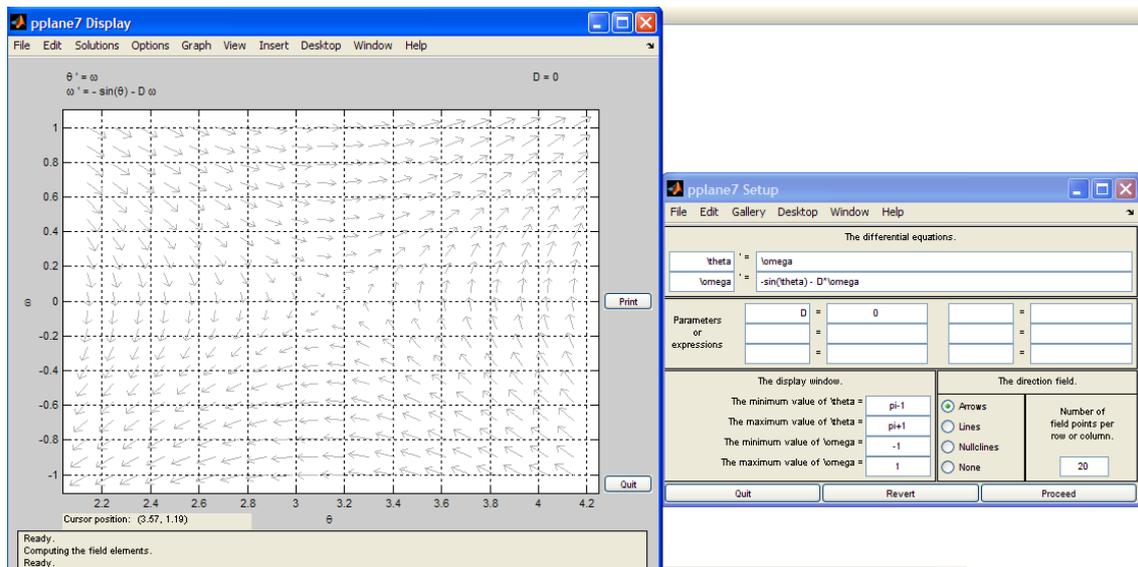
Parameters or expressions  
 $D$  =

The display window.  
 The minimum value of  $\theta$  =   
 The maximum value of  $\theta$  =   
 The minimum value of  $\omega$  =   
 The maximum value of  $\omega$  =

The direction field.  
 Arrows  
 Lines  
 Nullclines  
 None  
 Number of field points per row or column:

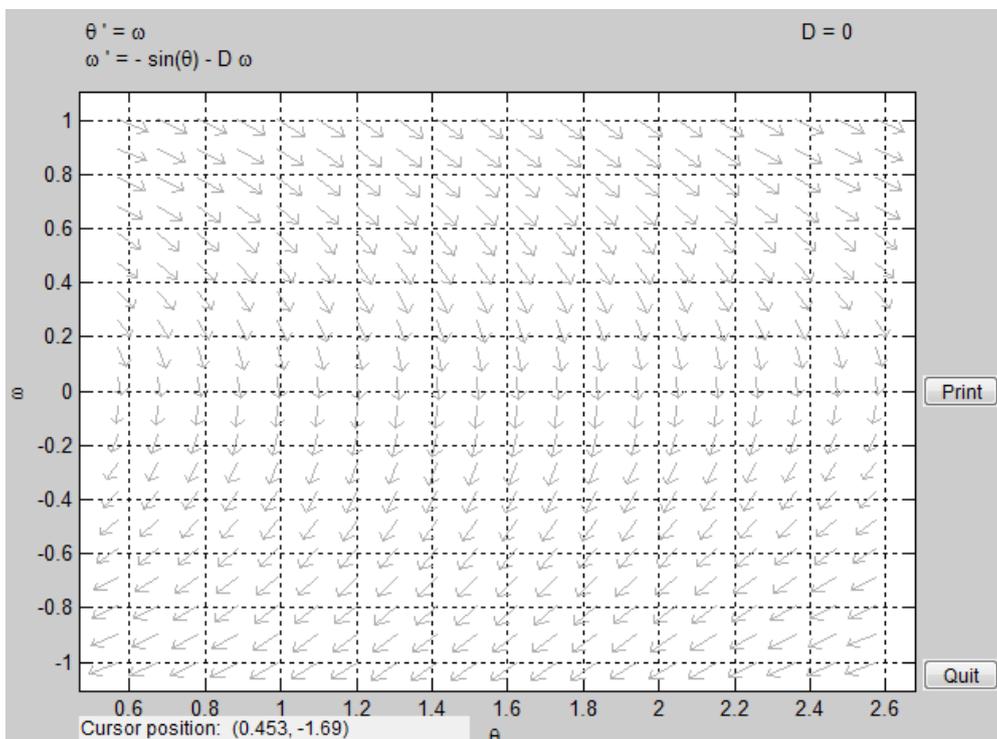
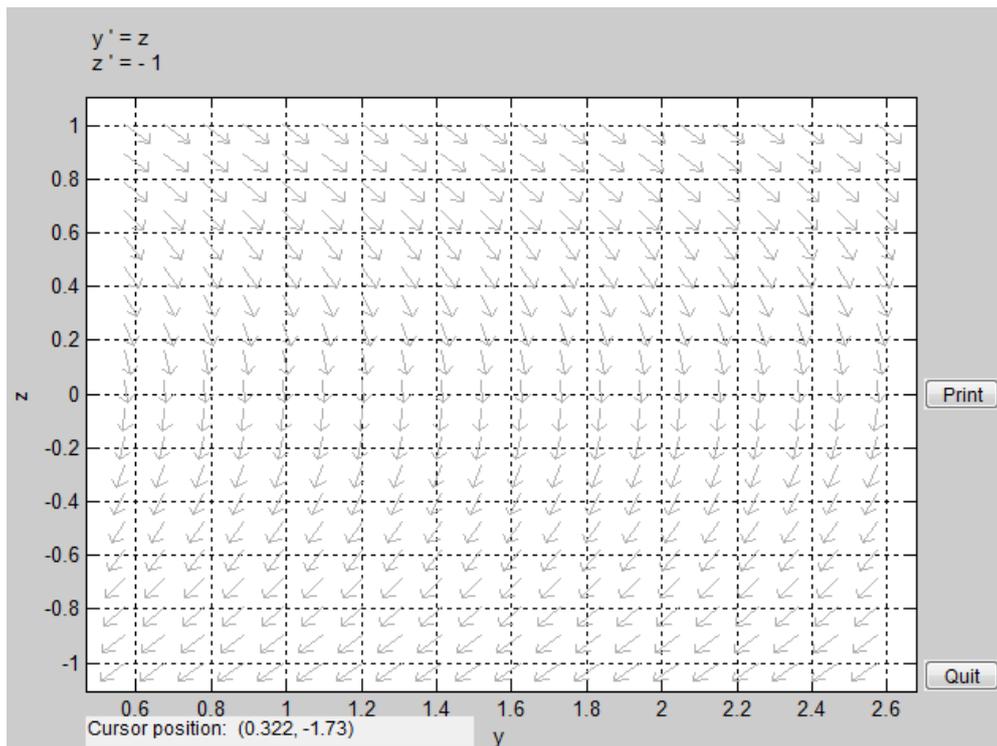
Cursor position: (4.46, -1.96)

Ready.  
 Computing the field elements.  
 Ready.

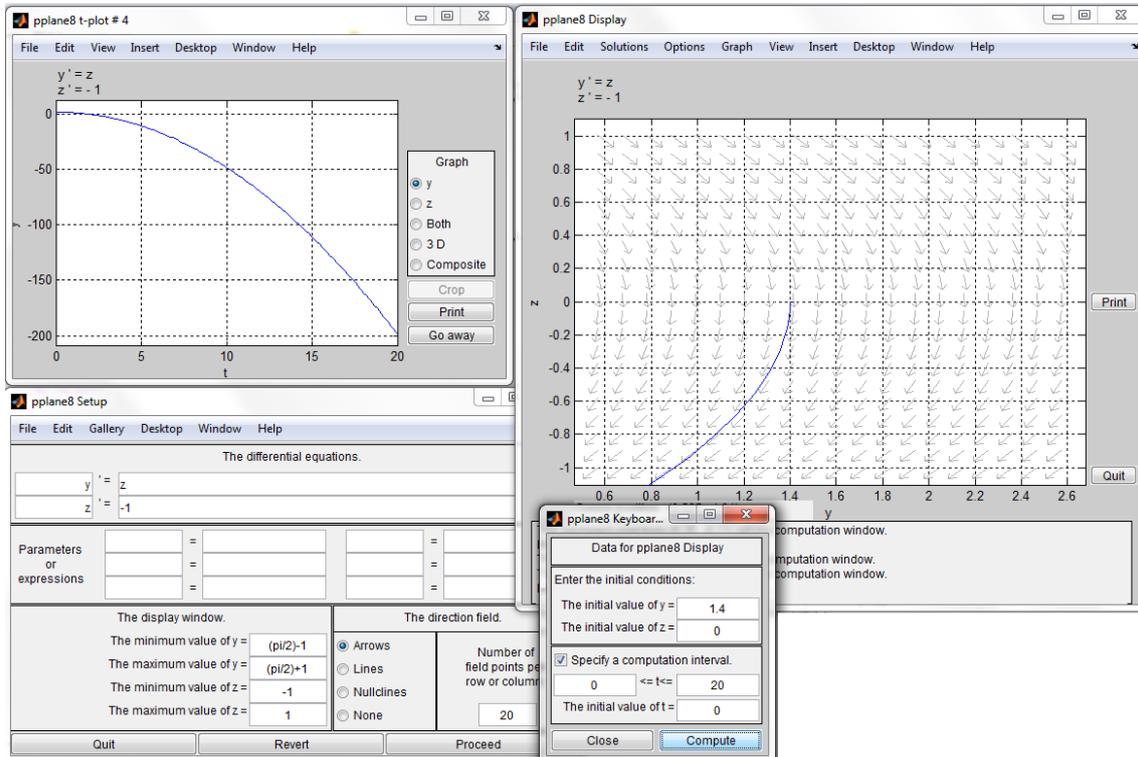
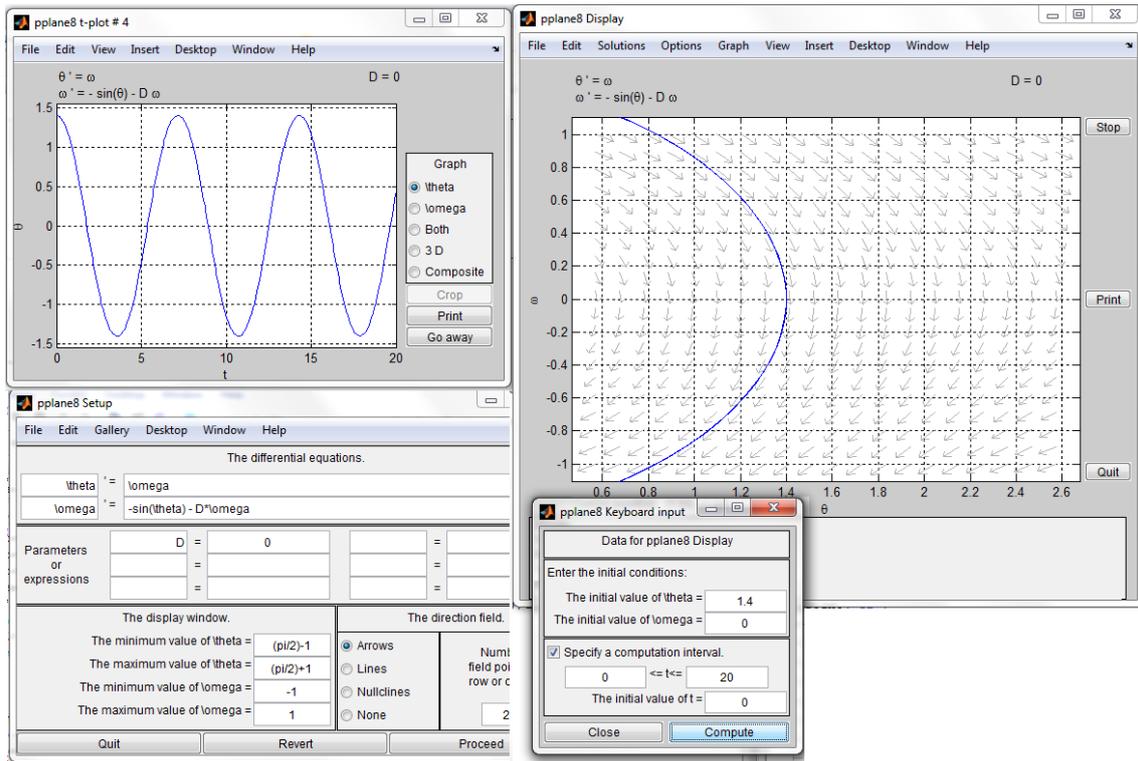


**% Observación:** Para ser rigurosos con la aproximación de soluciones y trayectorias de ecuaciones autónomas mediante las de ecuaciones linealizadas, debemos observar el régimen de validez de la aproximación (e.g., aproximación de una función  $f(y)$  por la parte lineal de su desarrollo en serie de Taylor en un entorno de un punto), además de los resultados que garantizan la similitud de la geometría de los planos de fases cerca de puntos críticos (ver sección 4.3.3 del libro de apuntes), y las propiedades de las trayectorias (ver secciones 4.2—4.4 del libro de apuntes). En este sentido, la visualización del plano de fases sólo en un determinado recinto puede resultar engañoso: el siguiente ejemplo trata de clarificar la situación

**% Ejemplo:** Con las consideraciones anteriores para  $y$  y cercano a  $\pi/2$ , la ecuación linealizada de  $y'' + \sin(y) = 0$  es  $y'' + 1 = 0$ . Los campos de direcciones en el plano de fases, para  $(y, y')$  en  $[\pi/2 - 1, \pi/2 + 1] \times [-1, 1]$ , presentan una similitud importante, como se ve abajo. Representamos en ambos trayectorias que pasan por  $(1.4, 0)$  y las soluciones correspondientes (con “Keyboard input”,  $t$  en  $[0, 20]$ ), y vemos la diferencia importante entre las soluciones.



*% Observamos que para el modelo no lineal las soluciones son periódicas mientras que para la ecuación  $y''+1=0$  la solución es  $y=-1/2*t^2+7/5$*



*% De hecho, los cálculos explícitos y numéricos, y su comparación en este intervalo, y en otro más pequeño ([0,1], por ejemplo), nos llevan a los siguientes resultados*

```
>> dsolve('D2y+1=0','y(0)=1.4','Dy(0)=0')
```

```
ans =
```

```
-1/2*t^2+7/5
```

```
>> [t,y]=ode45('fpendulo',[0,1],[1.4,0]);[t,y]
```

```
ans =
```

0	1.4000	0
0.0001	1.4000	-0.0001
0.0001	1.4000	-0.0001
0.0002	1.4000	-0.0002
0.0002	1.4000	-0.0002
0.0005	1.4000	-0.0005
0.0007	1.4000	-0.0007
0.0010	1.4000	-0.0010
0.0012	1.4000	-0.0012
0.0025	1.4000	-0.0025
0.0038	1.4000	-0.0037
0.0050	1.4000	-0.0050
0.0063	1.4000	-0.0062
0.0127	1.3999	-0.0125
0.0191	1.3998	-0.0188
0.0254	1.3997	-0.0251
0.0318	1.3995	-0.0313
0.0568	1.3984	-0.0560
0.0818	1.3967	-0.0806
0.1068	1.3944	-0.1052
0.1318	1.3914	-0.1298
0.1568	1.3879	-0.1544
0.1818	1.3837	-0.1790
0.2068	1.3789	-0.2035
0.2318	1.3735	-0.2281
0.2568	1.3675	-0.2526
0.2818	1.3609	-0.2770
0.3068	1.3537	-0.3015
0.3318	1.3458	-0.3259
0.3568	1.3374	-0.3502
0.3818	1.3283	-0.3745
0.4068	1.3187	-0.3988
0.4318	1.3084	-0.4229

0.4568	1.2975	-0.4470
0.4818	1.2860	-0.4711
0.5068	1.2740	-0.4950
0.5318	1.2613	-0.5189
0.5568	1.2480	-0.5426
0.5818	1.2342	-0.5663
0.6068	1.2197	-0.5898
0.6318	1.2047	-0.6132
0.6568	1.1890	-0.6365
0.6818	1.1728	-0.6596
0.7068	1.1561	-0.6826
0.7318	1.1387	-0.7054
0.7568	1.1208	-0.7280
0.7818	1.1023	-0.7504
0.8068	1.0833	-0.7726
0.8318	1.0637	-0.7946
0.8568	1.0436	-0.8163
0.8818	1.0229	-0.8378
0.9068	1.0017	-0.8590
0.9318	0.9799	-0.8799
0.9489	0.9648	-0.8940
0.9659	0.9495	-0.9079
0.9830	0.9339	-0.9217
1.0000	0.9180	-0.9353

**>> plot(t,y,'r')**

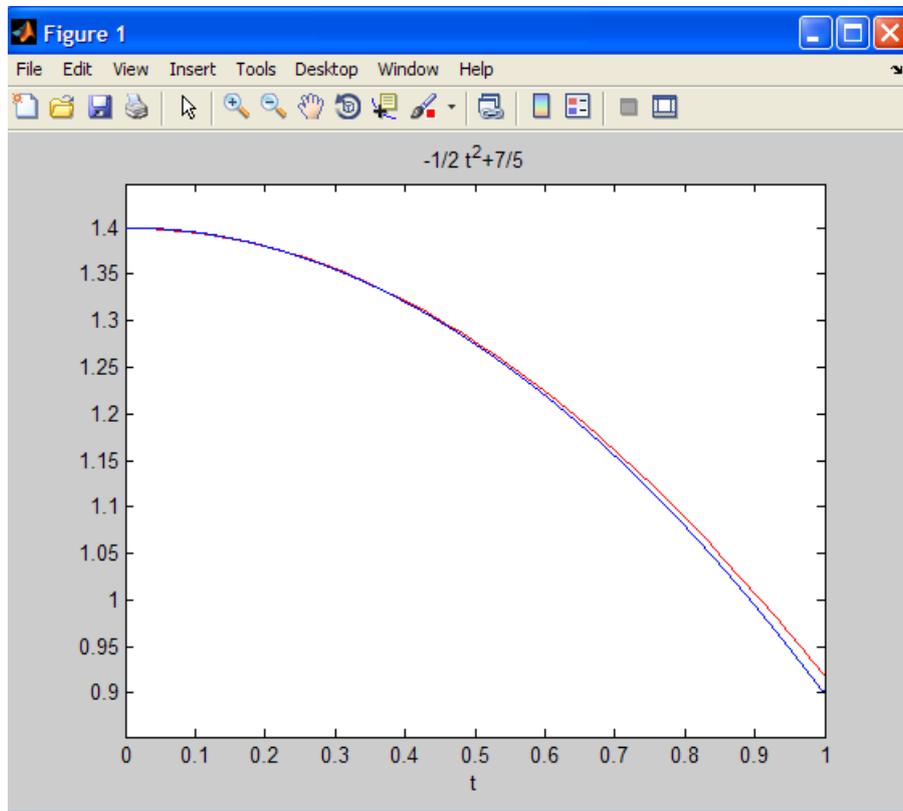
**>> hold on**

**>> dsolve('D2y+1=0','y(0)=1.4','Dy(0)=0')**

ans =

$-1/2*t^2+7/5$

**>> ezplot(ans,[0,1])**



*% Arriba, vemos una relativamente buena aproximación en [0,1], mientras que abajo, la misma comparación en [0,20] nos da lo siguiente:*

**>> hold off**

**>> ezplot(ans,[0,20])**

**>> hold on**

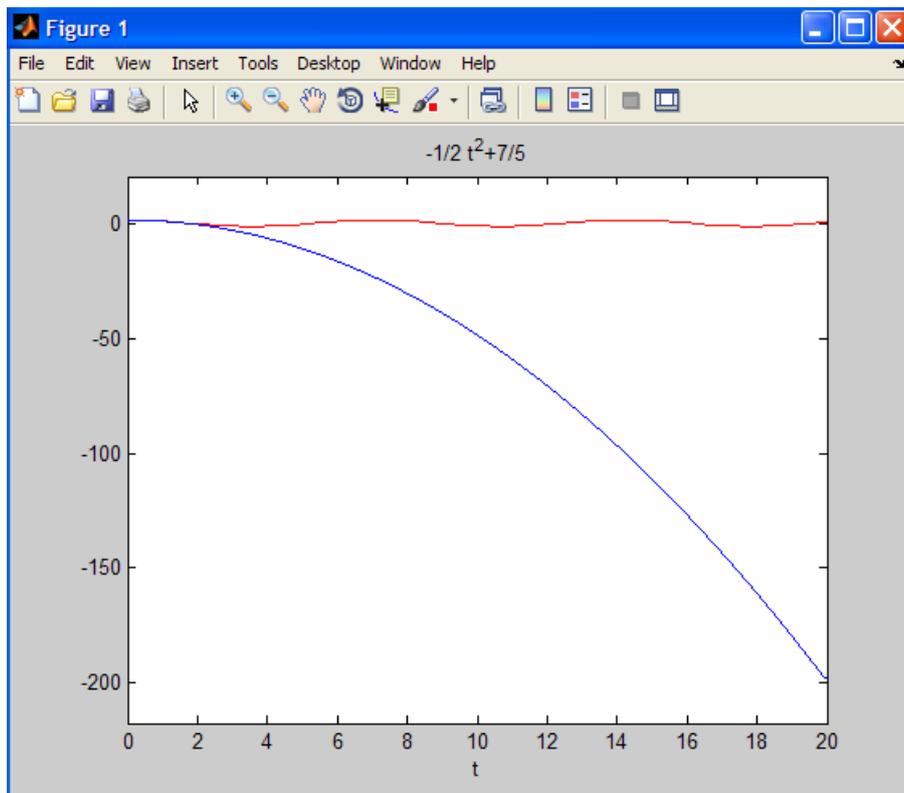
**>> [t,y]=ode45('fpendulo',[0,20],[1.4,0]); [t,y]**

ans =

```
0 1.4000 0
0.0001 1.4000 -0.0001
0.0001 1.4000 -0.0001
0.0002 1.4000 -0.0002
.....
```

```
.....  
19.1824 -0.5775 1.1515  
19.3868 -0.3321 1.2416  
19.5912 -0.0733 1.2830  
19.7956 0.1886 1.2709  
20.0000 0.4428 1.2071
```

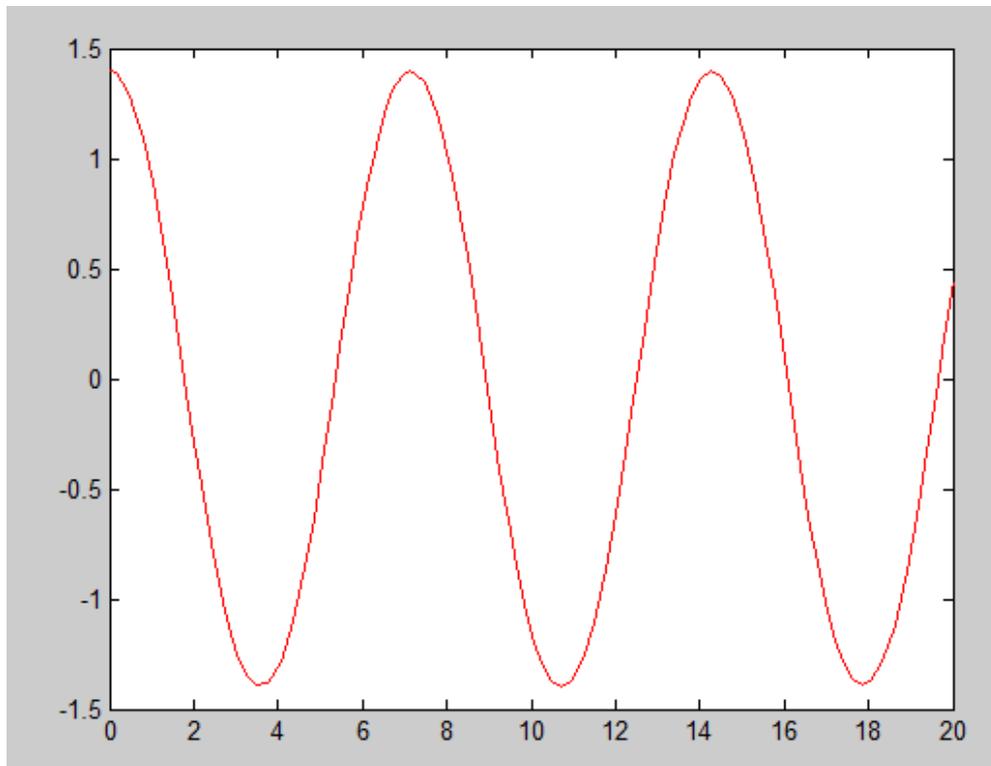
**>> plot(t,y(:,1),'r')**



*% la gráfica en rojo (abajo) nos muestra que la solución numérica de la ecuación del péndulo se mantiene entre valores  $[-1.5,1.5]$ , mientras que la de la ecuación lineal varía entre 0 y 200*

**>> hold off**

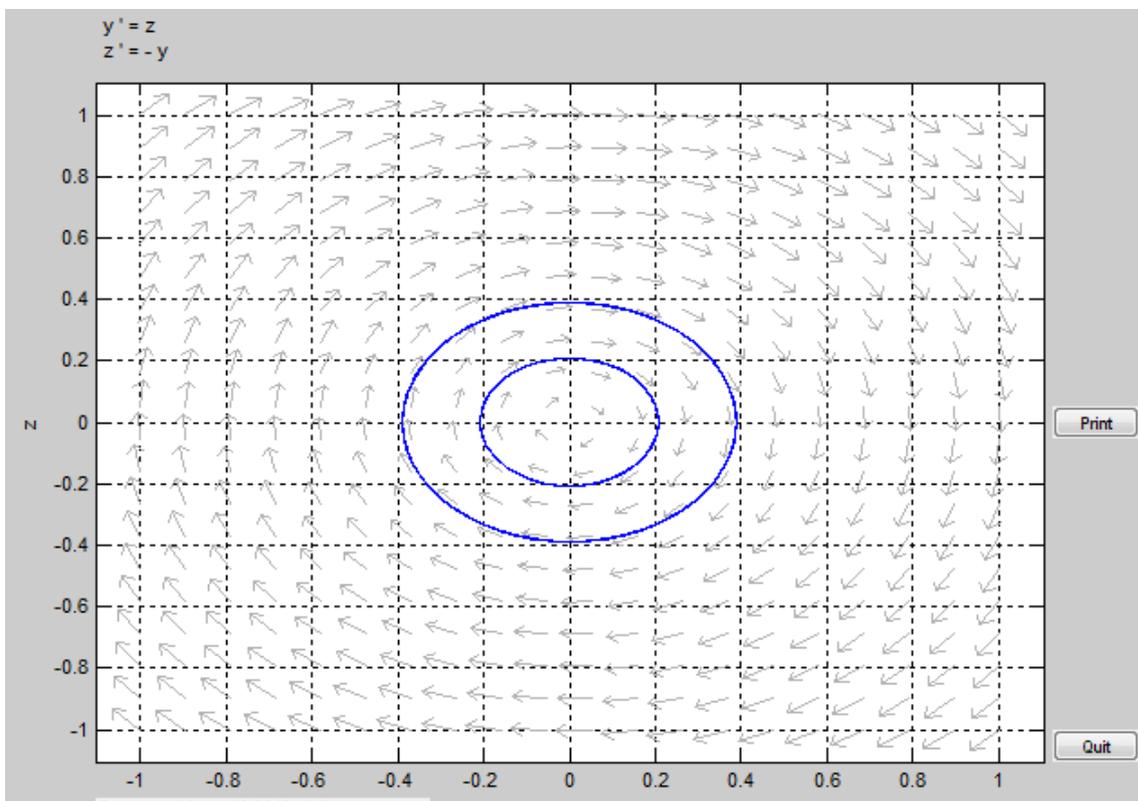
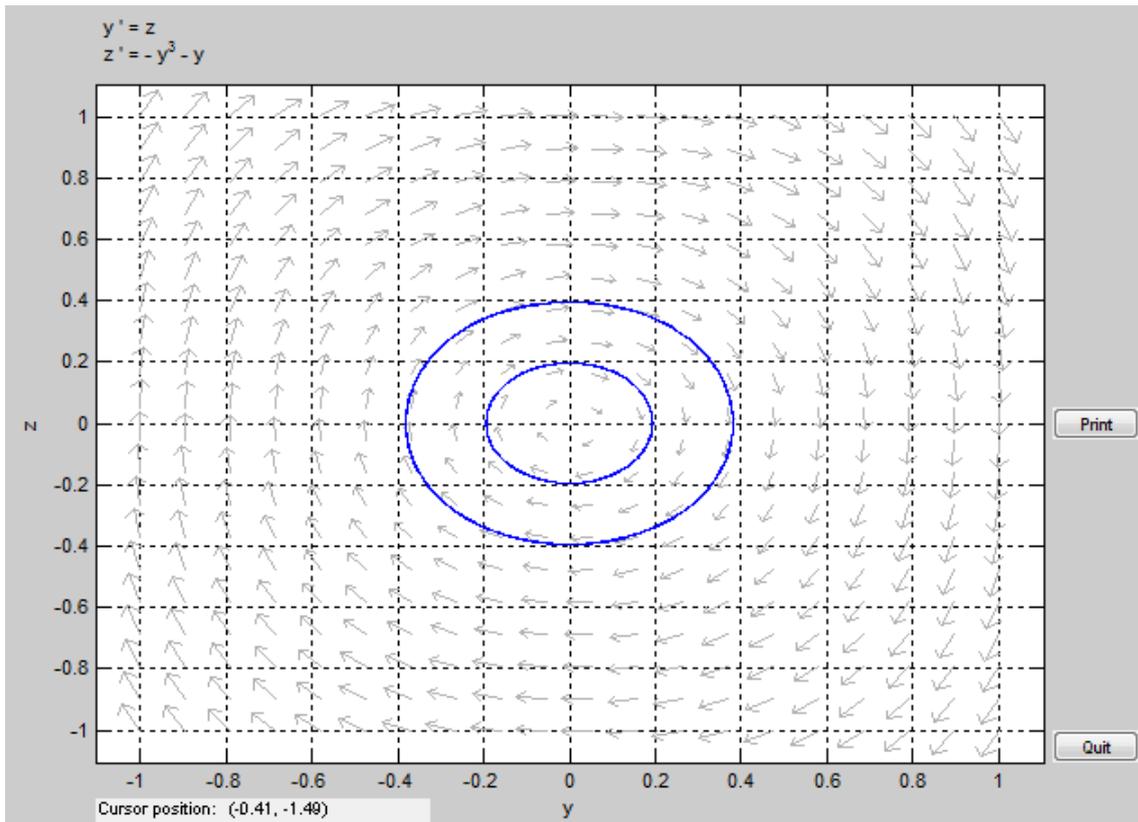
**>> plot(t,y(:,1),'r')**



*% Debemos observar que en  $[\pi/2-1, \pi/2+1] \times [-1, 1]$  no hay puntos críticos de la ecuación del péndulo, y la similitud del campo en el plano de fases no implica aproximación de soluciones, y menos para tiempos grandes.*

**% Ejercicio 2.4: un modelo de resorte no lineal**

*Consideramos el plano de fases para un modelo de resorte “duro”  $y''+y+y^3=0$  (ver sección 4.2 del libro de apuntes para otros modelos). La ecuación linealizada para  $y$  cercano al punto crítico  $(0,0)$  es  $y''+y=0$ . Abajo la similitud de las trayectorias de ambos modelos en un entorno de dicho punto crítico.*



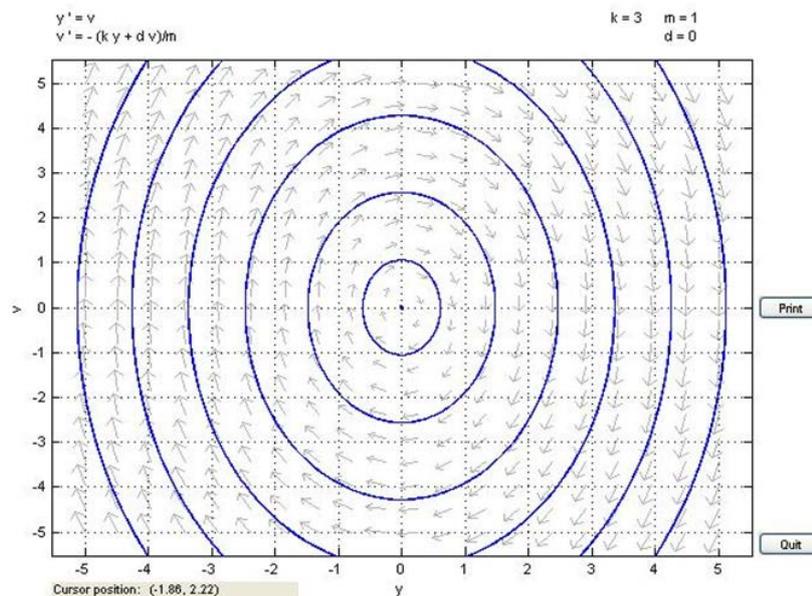
## Plano de fases para resortes lineales

% Dibujamos las trayectorias de los sistemas asociados a los modelos de resorte lineal amortiguado y no amortiguado, así como las gráficas de las correspondientes soluciones, dependiendo de las relaciones entre las constantes de masa  $m$ , de amortiguación  $k$ , y de recuperación  $c$ :  $my''+ky'+cy=0$ . En particular, vemos el efecto de una pequeña amortiguación sobre el sistema. Con “pplane” comparamos las distintas gráficas en los planos  $ty$ ,  $tv$ ,  $yv$ , y en el espacio  $tyv$  (es decir, alargamiento, velocidad, trayectoria de la solución, y representación de las soluciones en el espacio).

### Ejercicio 3 (relacionado con ejercicio 2.1)

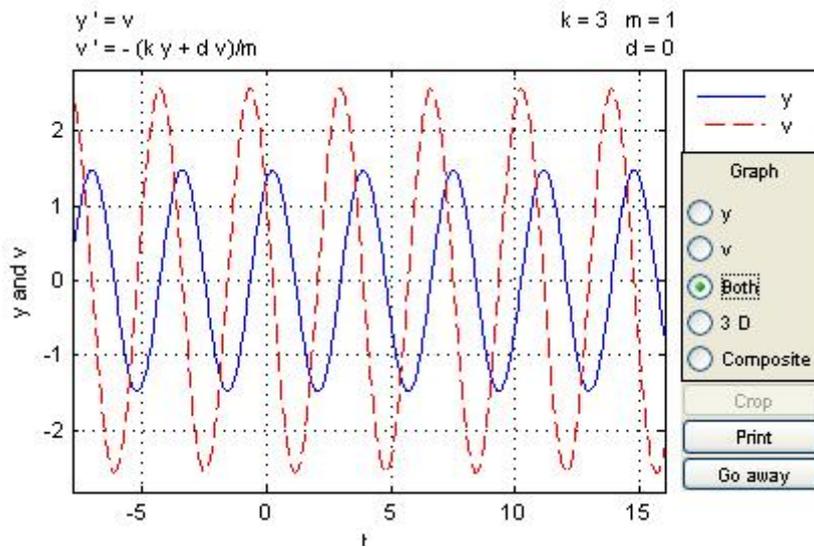
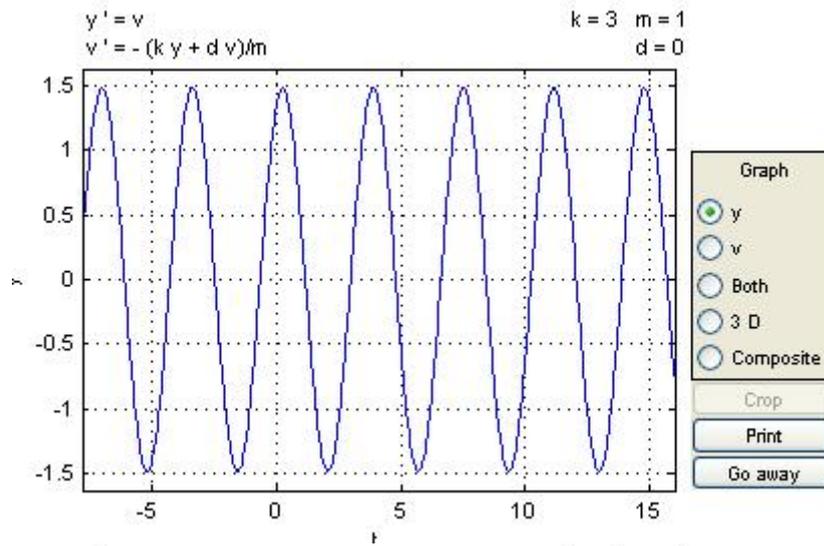
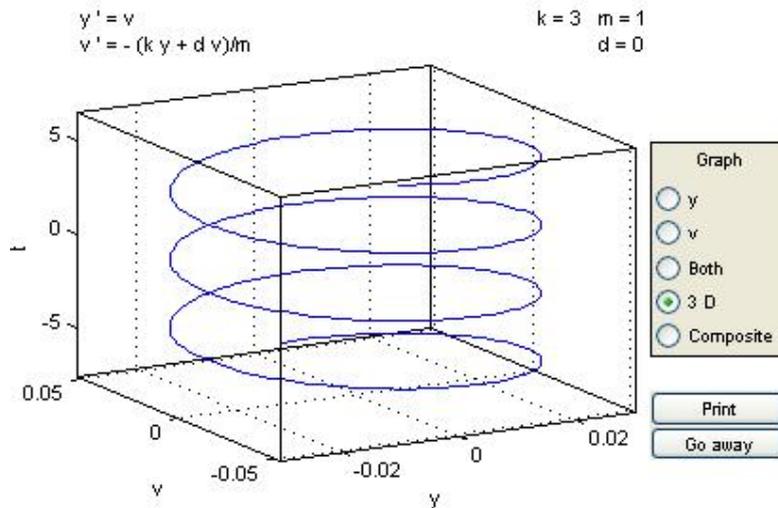
% El caso no amortiguado  $k=0$ . Trayectorias, alargamiento y velocidad ( $m=1$ ,  $c=3$ )

% plano  $yy'$  (yz si  $y'=z$  o  $yv$  si  $y'=v$ )

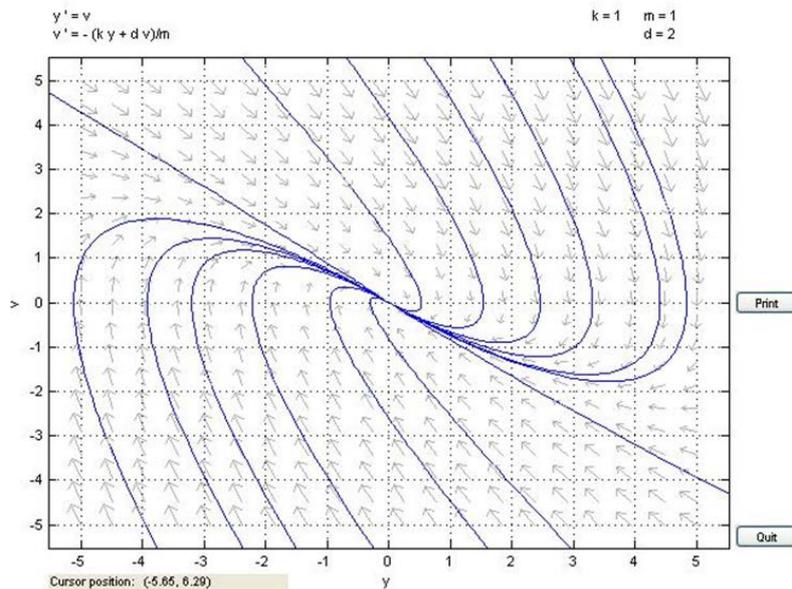


% Para no dar lugar a confusión, aquí y en lo sucesivo, observemos que dentro del entorno la constante de amortiguación se denota por  $d$  y la de recuperación por  $k$ .

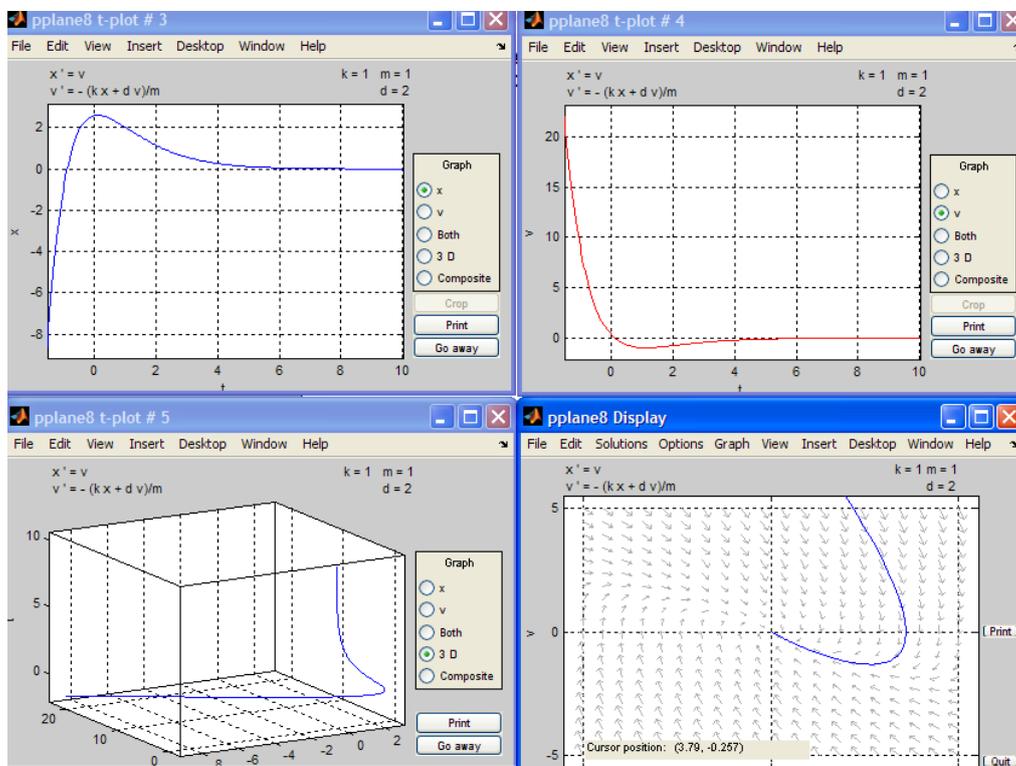
% Gráfica de una solución en el espacio  $tyv$ , y en los planos  $ty$ ,  $tv$



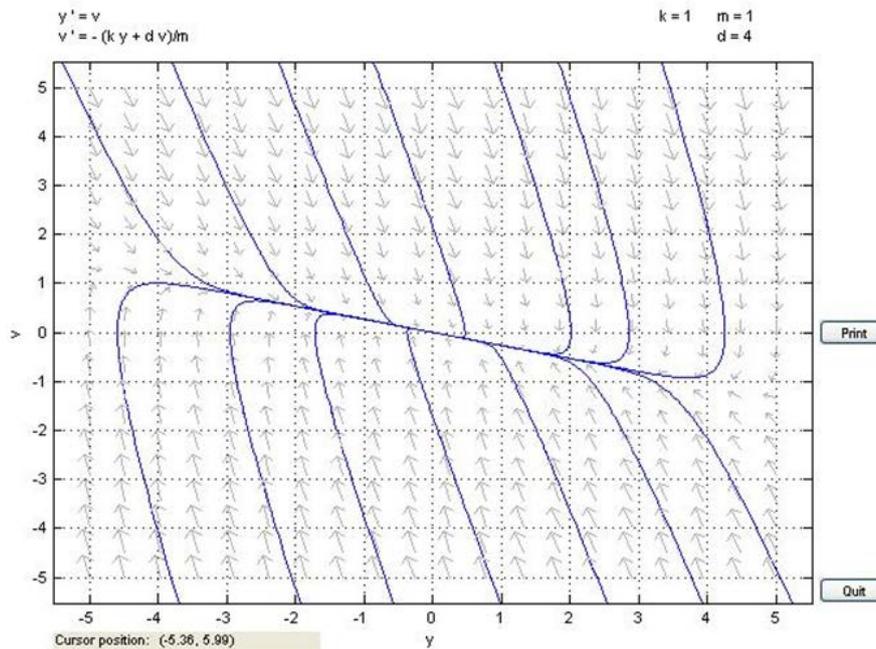
*% Caso de amortiguación fuerte  $k^2 - 4mc = 0$ . Trayectorias, alargamiento y velocidad*



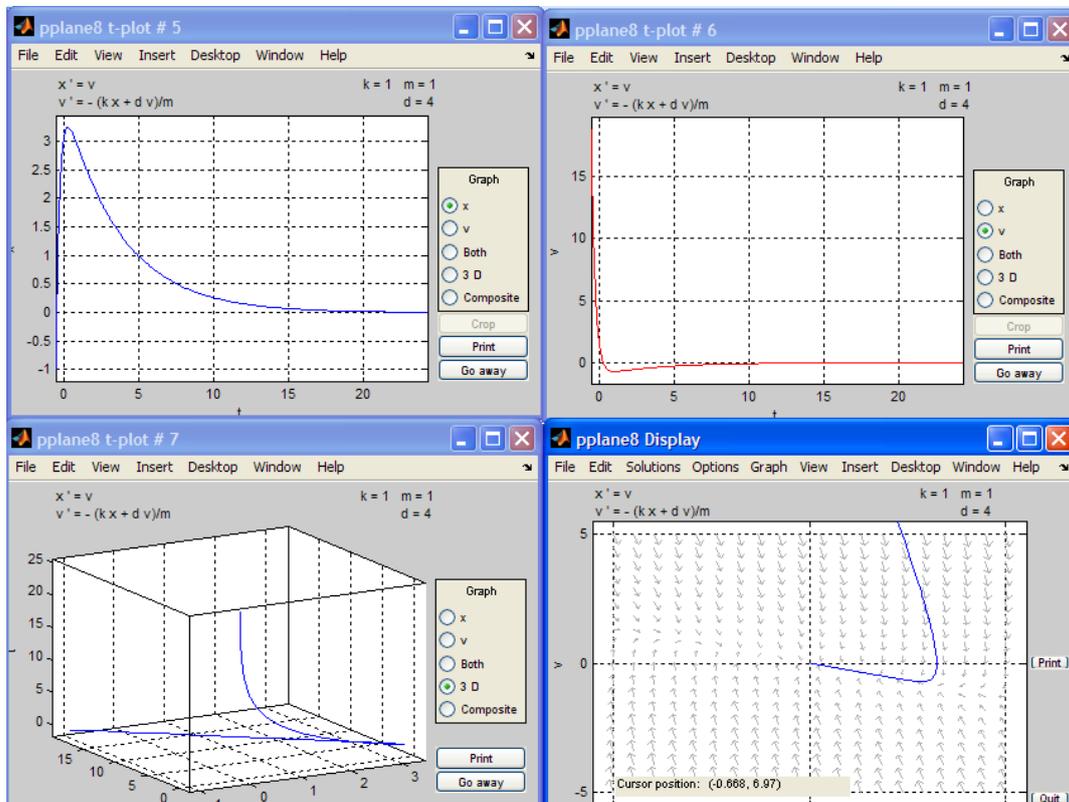
*% Arriba, gráficas de trayectorias: plano  $yy'$  ( $yv$ ). Abajo, gráfica de una solución en el espacio  $tyv$ , y en los planos  $ty$ ,  $tv$ . Para estas gráficas de abajo vemos que el entorno ha tomado por defecto  $x=y$ ,  $v=y'$ ; se puede cambiar*



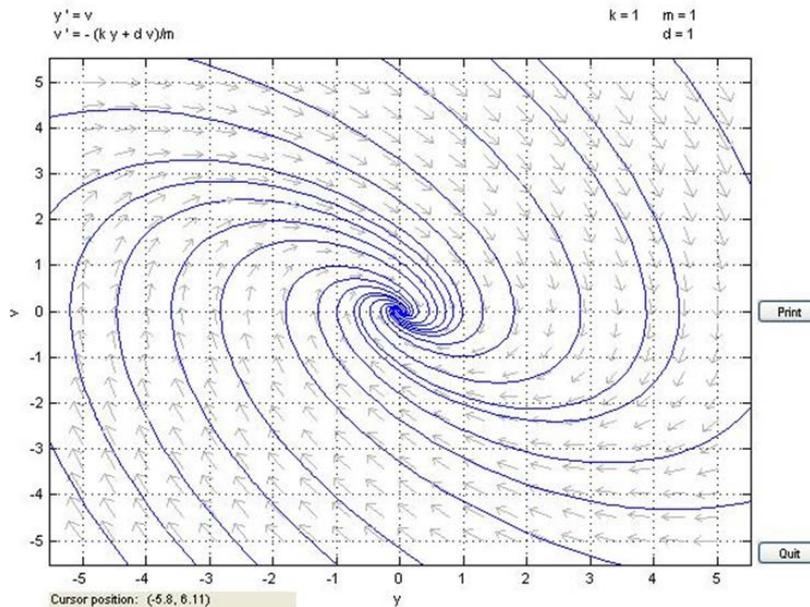
*% Caso de amortiguación fuerte  $k^2 - 4mc > 0$ . Trayectorias, alargamiento y velocidad*



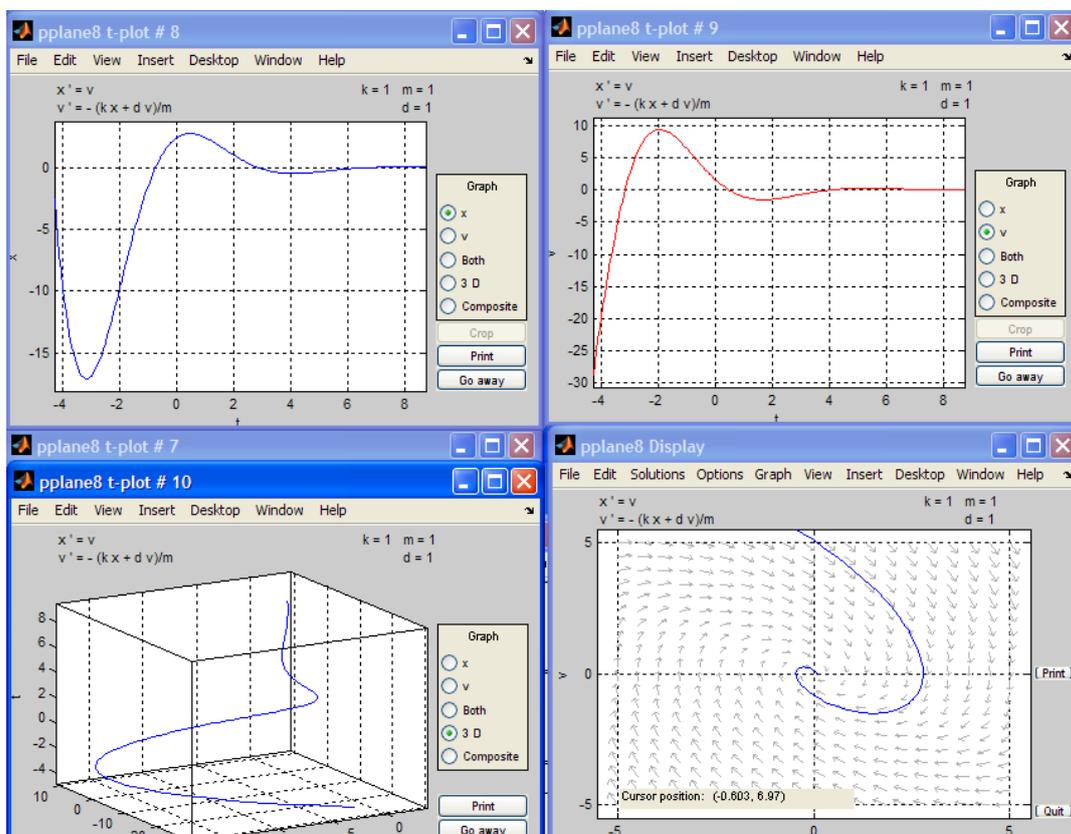
*% Arriba, gráficas de trayectorias en el plano  $yy'$ . Abajo, gráfica de una solución en el espacio  $tyv$ , y en los planos  $ty$  y  $tv$*



*% Caso de amortiguación débil  $k^2 - 4mc < 0$ . Trayectorias, alargamiento y velocidad*



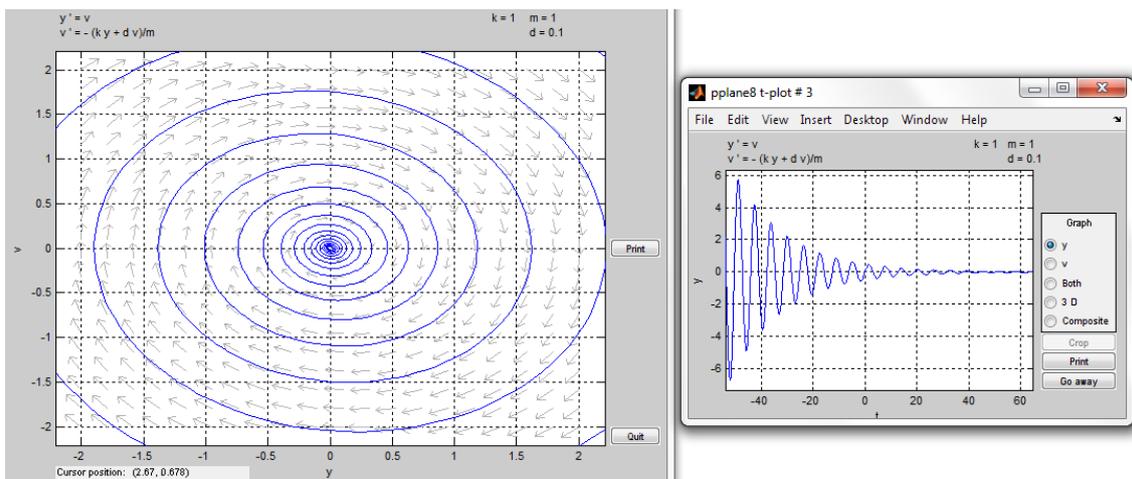
*% Arriba, gráficas de trayectorias en el plano  $yy'$ . Abajo, gráfica de una solución en el espacio  $tyv$ , y en los planos  $ty$  y  $tv$*



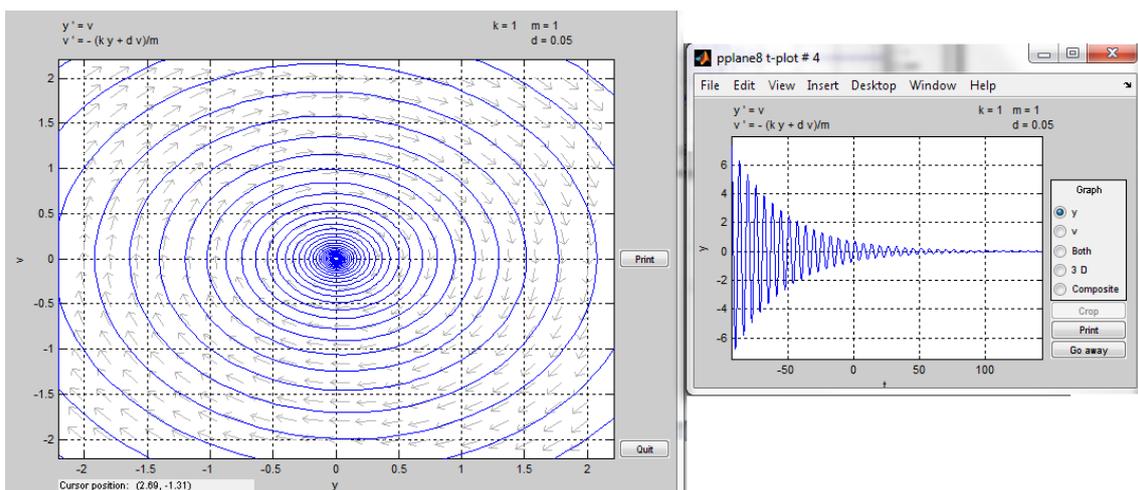
**% El efecto de la amortiguación:** si introducimos una pequeña amortiguación en el sistema, observamos como se ve afectada la solución en tiempos grandes. Tomamos  $m=c=1$  y  $k$  pequeño de manera que se tengan oscilaciones débilmente amortiguadas.

% Abajo la gráfica de “una” trayectoria y la correspondiente solución (desde un punto de vista físico, la gráfica de la solución, alargamiento, sólo tiene sentido para  $t$  positivo; este dibujo se ha obtenido del de la trayectoria usando la opción “Graph”).

%  $k=0.1$ ,  $t$  en el intervalo tomado por defecto en el entorno

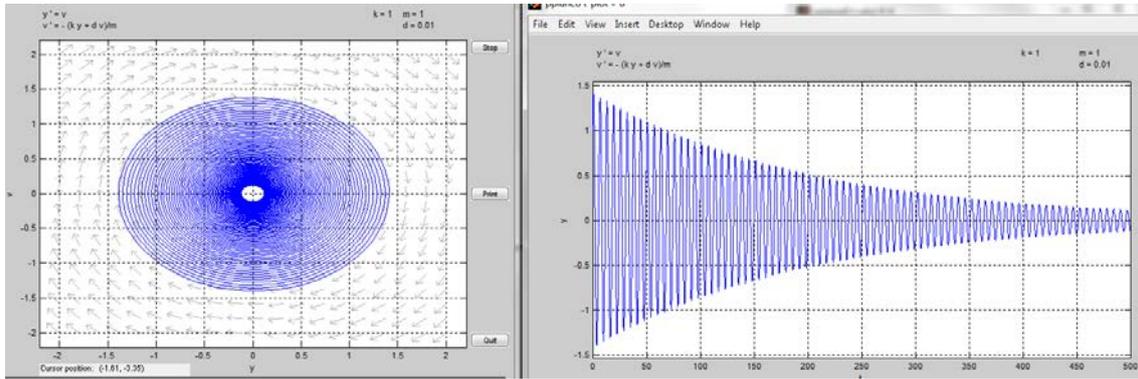


%  $k=0.05$ ,  $t$  en el intervalo tomado por defecto en el entorno



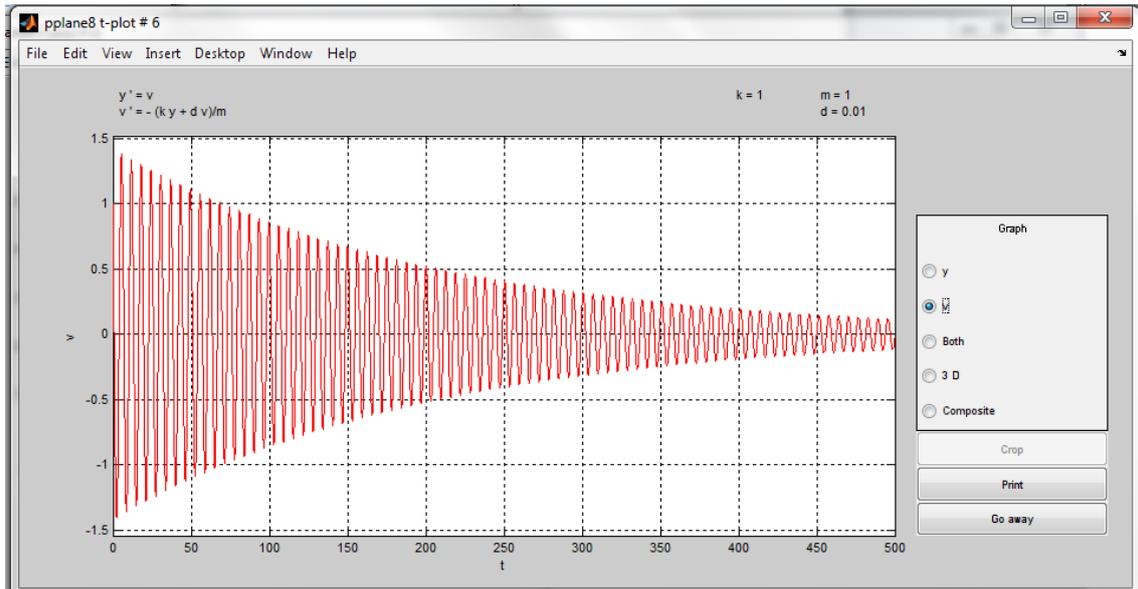
% Para  $k=0.01$ , se considera la trayectoria que pasa por  $(1,1)$ ,  $t$  en  $[0,500]$  (con las posibilidades de la interfaz del “Display” de “pplane8”: “Solutions” y “Keyboard input”), hacemos la gráfica de la trayectoria (plano  $yy'$ ) y alargamiento (plano  $ty$ ).

*% Se observa que, aunque el campo de direcciones cerca del origen (en el plano de fases) presenta una cierta similitud con el caso en que  $k=0$  (resorte no amortiguado), en este caso de amortiguación no nula las trayectorias son espirales, mientras que para  $k=0$  las trayectorias son circunferencias.*

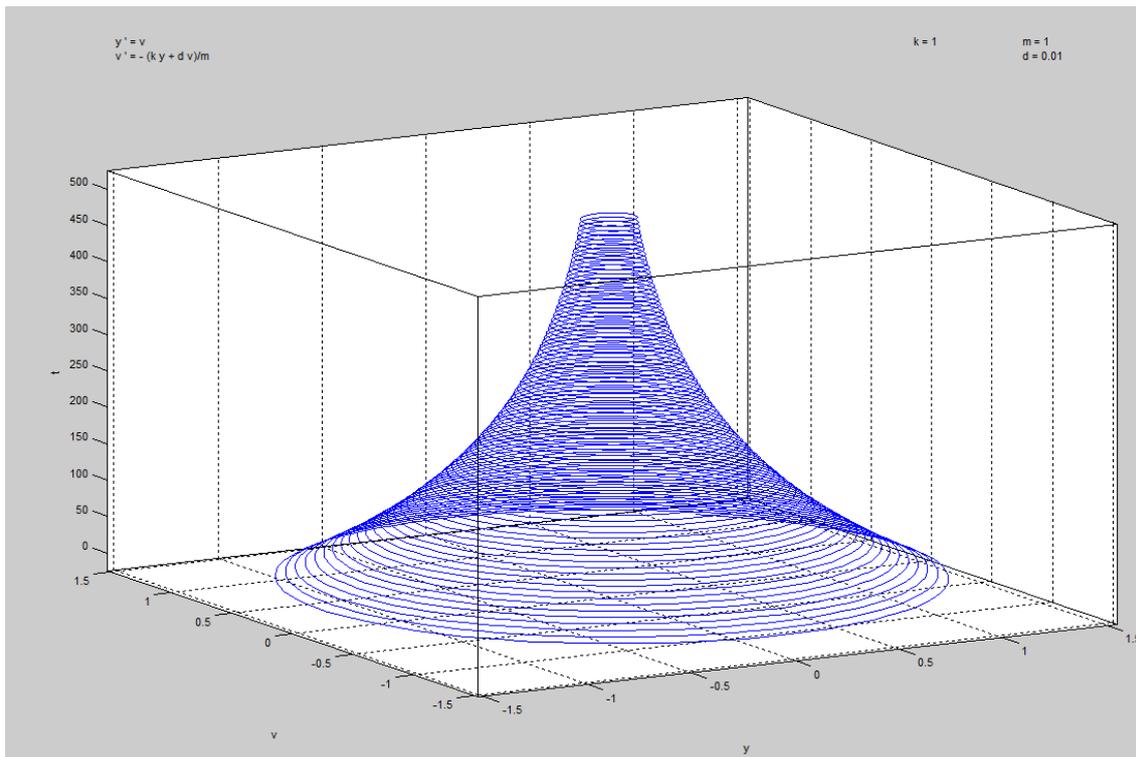


*% El efecto de la amortiguación es más acusado a medida que el tiempo pasa.*

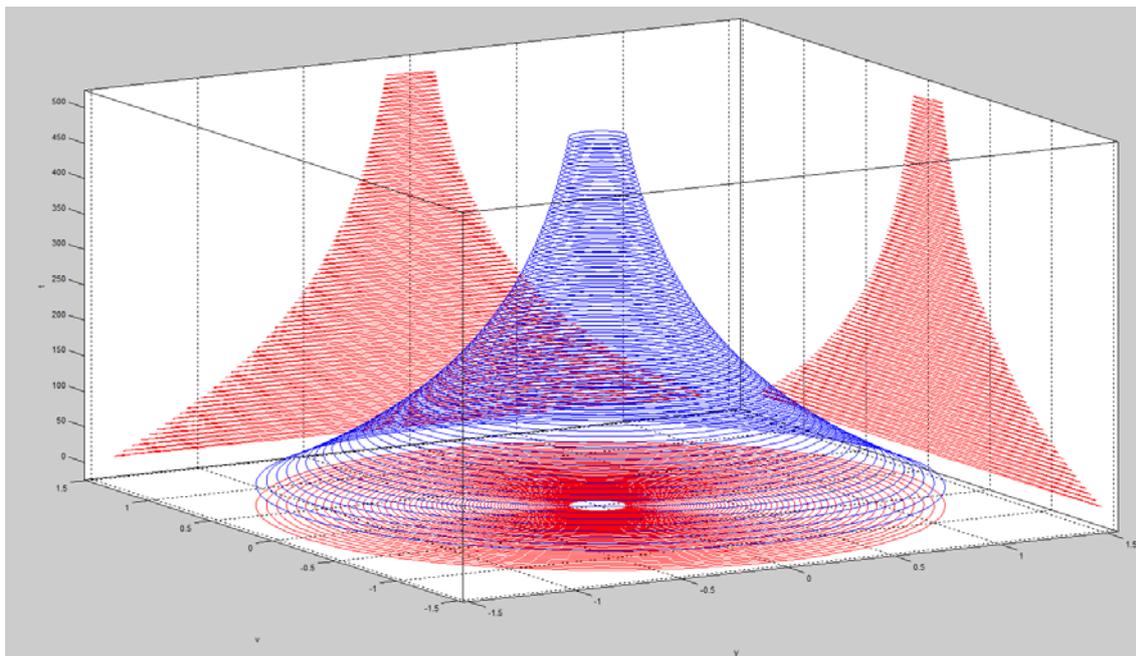
*% velocidad (plano  $ty'$ )*



*% curva solución del sistema asociado en el espacio  $tyy'$*



*% Abajo, con "Graph" y "Composite": la curva en el espacio y las proyecciones en los distintos planos*



## Sistemas autónomos lineales: soluciones y trayectorias

*% Ejemplo: se considera el sistema  $y_1' = 2*y_1 + 3*y_2$ ,  $y_2' = y_1 - 5*y_2$ , y un problema de Cauchy asociado. Encontramos soluciones explícitas y soluciones numéricas, y representamos las trayectorias en el plano de fases.*

*% Resolución del sistema lineal*

**>> [Y1,Y2]=dsolve('Dy1=2\*y1+3\*y2','Dy2=y1-5\*y2')**

Y1 =

$$(7*C23)/(2*\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2)) + (7*C24*\exp((61^{1/2}*t)/2 - (3*t)/2))/2 - (61^{1/2}*C23)/(2*\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2)) + (61^{1/2}*C24*\exp((61^{1/2}*t)/2 - (3*t)/2))/2$$

Y2 =

$$C23/\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2) + C24*\exp((61^{1/2}*t)/2 - (3*t)/2)$$

*% Como para la ecuación de segundo orden, se tienen dos constantes de integración C23 y C24 que se determinan, por ejemplo, imponiendo condiciones iniciales. Para visualizar las soluciones un poco mejor se puede utilizar: vpa, pretty, simplify, simple,...*

*% Resolución del sistema lineal con condiciones iniciales (P. de Cauchy)*

**>> [Y1,Y2]=dsolve('Dy1=2\*y1+3\*y2','Dy2=y1-5\*y2','y1(0)=2','y2(0)=3')**

Y1 =

$$(\exp((61^{1/2}*t)/2 - (3*t)/2)*(3*61^{1/2} - 17))/4 - (3*61^{1/2} + 17)/(4*\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2)) + (7*61^{1/2}*(3*61^{1/2} + 17))/(244*\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2)) + (7*61^{1/2}*\exp((61^{1/2}*t)/2 - (3*t)/2)*(3*61^{1/2} - 17))/244$$

Y2 =

$$(61^{1/2}*(3*61^{1/2} + 17))/(122*\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2)) + (61^{1/2}*\exp((61^{1/2}*t)/2 - (3*t)/2)*(3*61^{1/2} - 17))/122$$

**>> simplify(Y2)**

ans =

$$(61^{1/2}*(3*61^{1/2} + 17))/(122*\exp((t*(61^{1/2} + 3))/2)) - \exp((t*(61^{1/2} - 3))/2)*((17*61^{1/2})/122 - 3/2)$$

**>> simplify(Y1)**

ans =

$$(\exp(61^{1/2}*t) + (16*61^{1/2}*\exp(61^{1/2}*t))/61 - (16*61^{1/2})/61 + 1)/\exp((3*t)/2 + (61^{1/2}*t)/2)$$

**>> pretty(ans)**

$$\frac{\exp\left(\frac{t(61^{1/2} - 3)}{2}\right) + \frac{1}{61} + \frac{16 \cdot 61^{1/2} \exp\left(\frac{t(61^{1/2} - 3)}{2}\right)}{61} - \frac{16 \cdot 61^{1/2}}{61}}{\exp\left(\frac{t(61^{1/2} + 3)}{2}\right) + 61 \exp\left(\frac{t(61^{1/2} + 3)}{2}\right)}$$

**>> vpa(Y1,5)** *% para una visualización rápida de las funciones que intervienen*

ans =

$$3.0486*\exp(2.4051*t) - 1.0486/\exp(5.4051*t)$$

**>> vpa(Y2,5)**

ans =

$$0.41169*\exp(2.4051*t) + 2.5883/\exp(5.4051*t)$$

**>> ezplot(Y1,[0,2])**

*% esto nos da la gráfica de una componente de la solución*

*% Resolución numérica del mismo problema de Cauchy: para dicha resolución definimos la función vectorial [2\*y1+3\*y2, y1-5\*y2] en una función Matlab fsistemalineal.m*

**>> type fsistemalinea**

**>> [t,y]=ode45('fsistemalinea',[0,2],[2,3]);[t,y]**

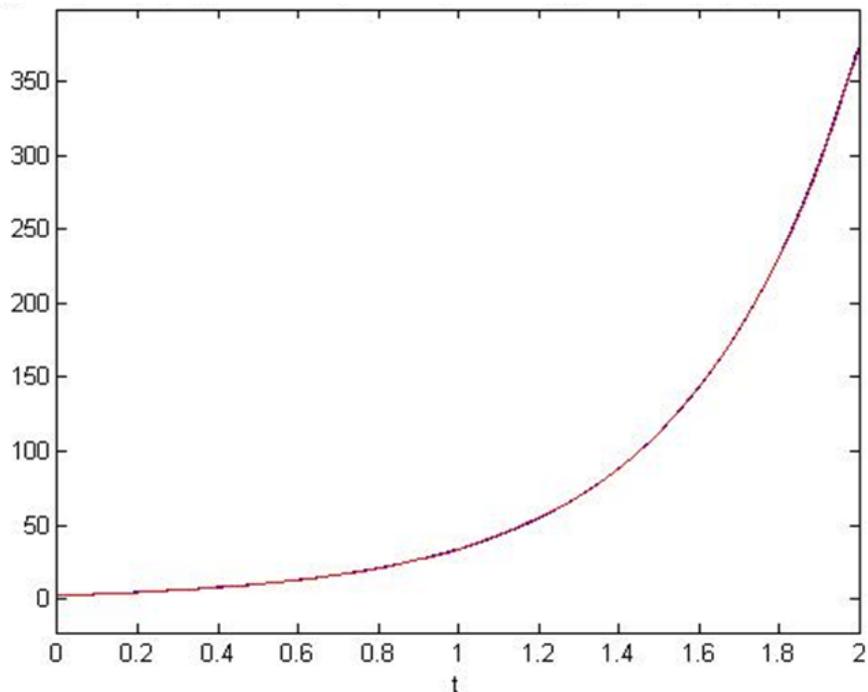
ans =

```
    0  2.0000  3.0000
0.0077  2.1001  2.9018
0.0155  2.1995  2.8081
0.0232  2.2984  2.7187
.....
.....
1.9141 304.4085  41.1079
1.9427 326.1075  44.0382
1.9714 349.3530  47.1773
2.0000 374.2557  50.5401
```

*% gráfica de la primera componente que se superpone con la de la solución explícita en [0,2]*

**>> hold on**

**>> plot(t,y(:,1),'r')**



*% El sistema es lineal de coeficientes constantes, y la aproximación es muy buena en este intervalo. El método numérico se impone cuando no se conoce la solución del problema de Cauchy, y se sabe que dicha solución existe y es única.*

*% la gráfica de las dos componentes se tiene con*

**>>hold off**

**>> ezplot(Y1)**

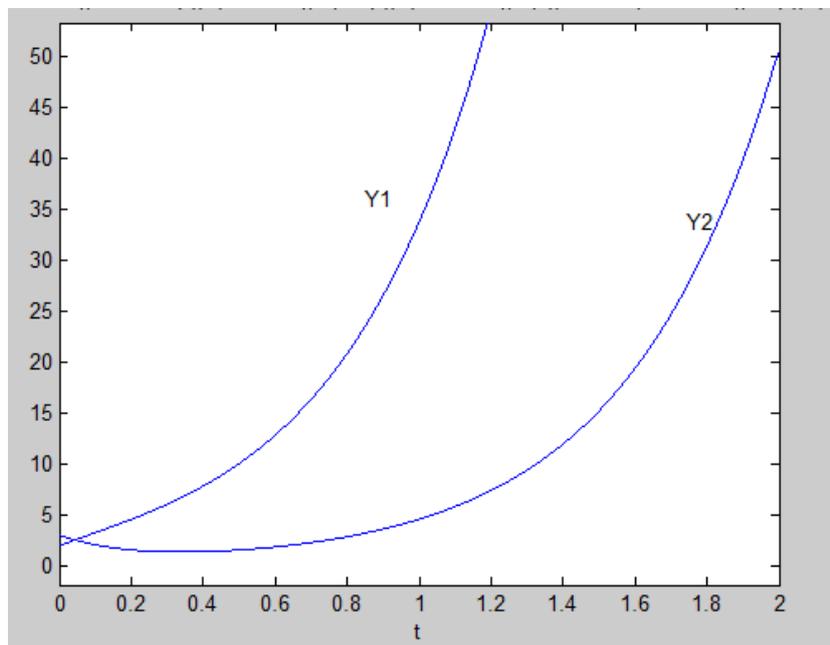
**>> ezplot(Y1,[0,2])**

**>> hold on**

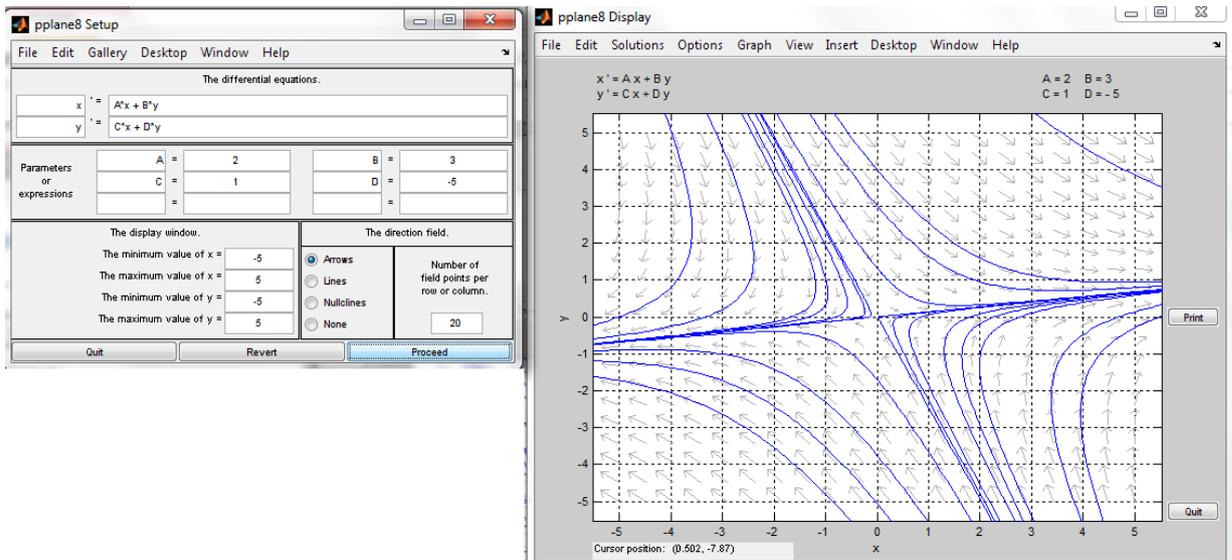
**>> ezplot(Y2,[0,2])**

**>> gtext('Y1')**

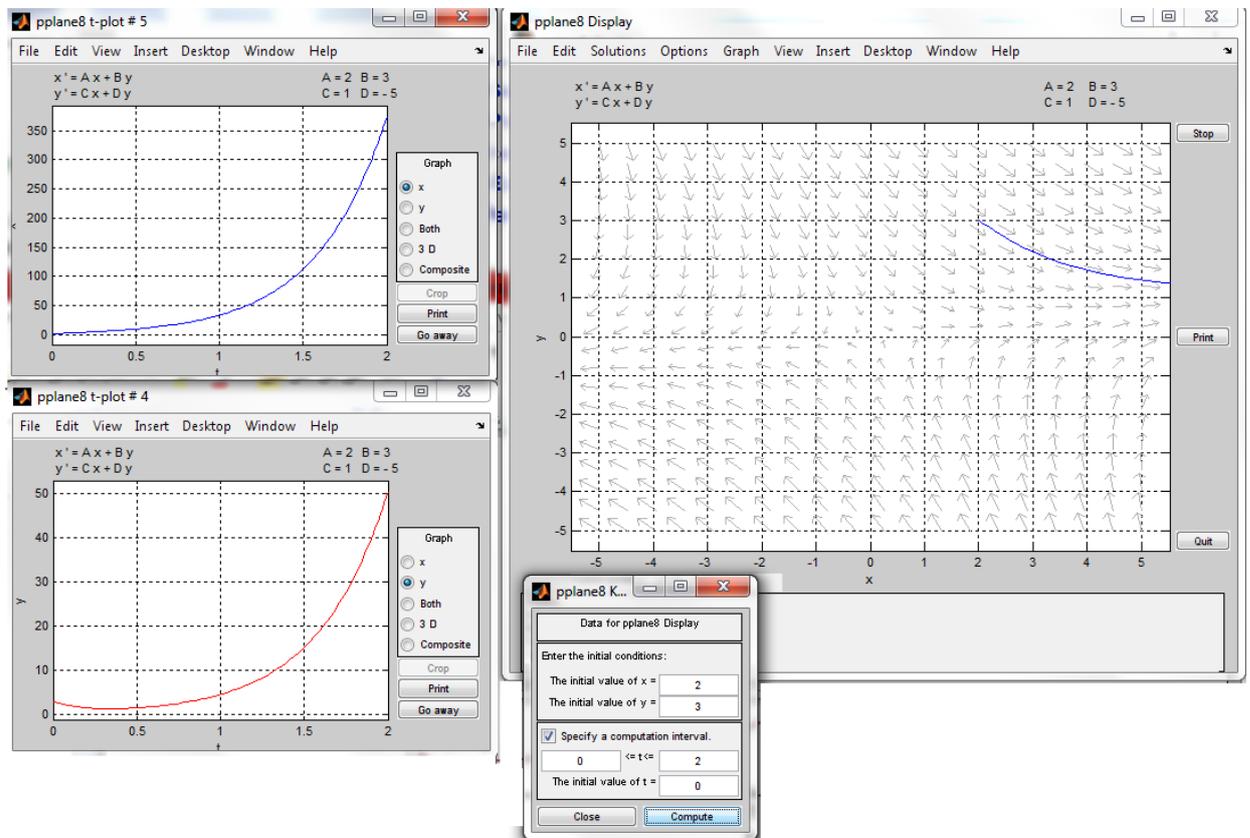
**>> gtext('Y2')**



*% Introducimos la trayectoria que pasa por (2,3), y la solución asociada, con el entorno pplane, y luego en "Gallery", elegimos "linear system" cambiando los parámetros por los nuestros. Abajo varias trayectorias*

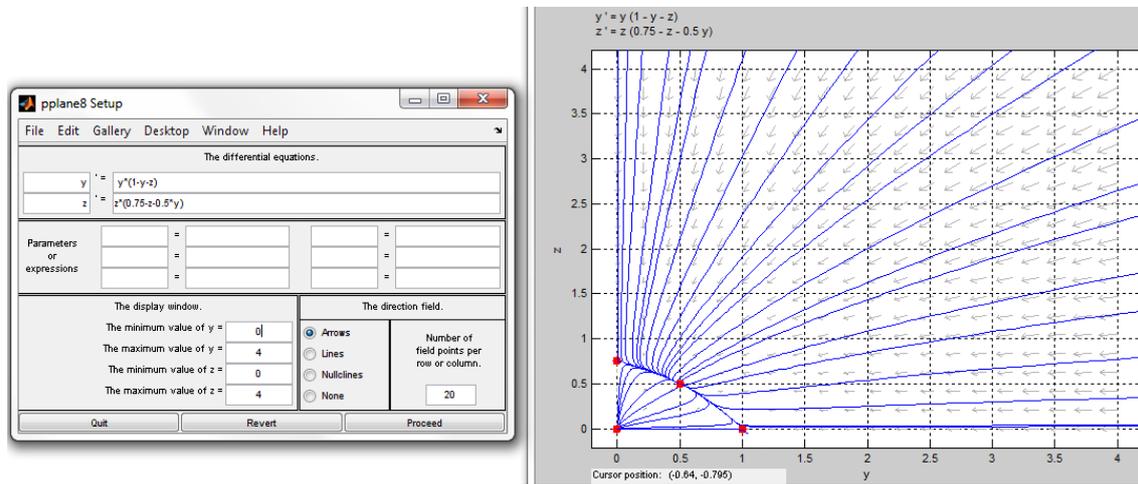


*% Abajo, y la trayectoria que pasa por (2,3) y las dos componentes de la solución del problema de Cauchy  $y_1' = 2*y_1 + 3*y_2, y_2' = y_1 - 5*y_2, y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ .*

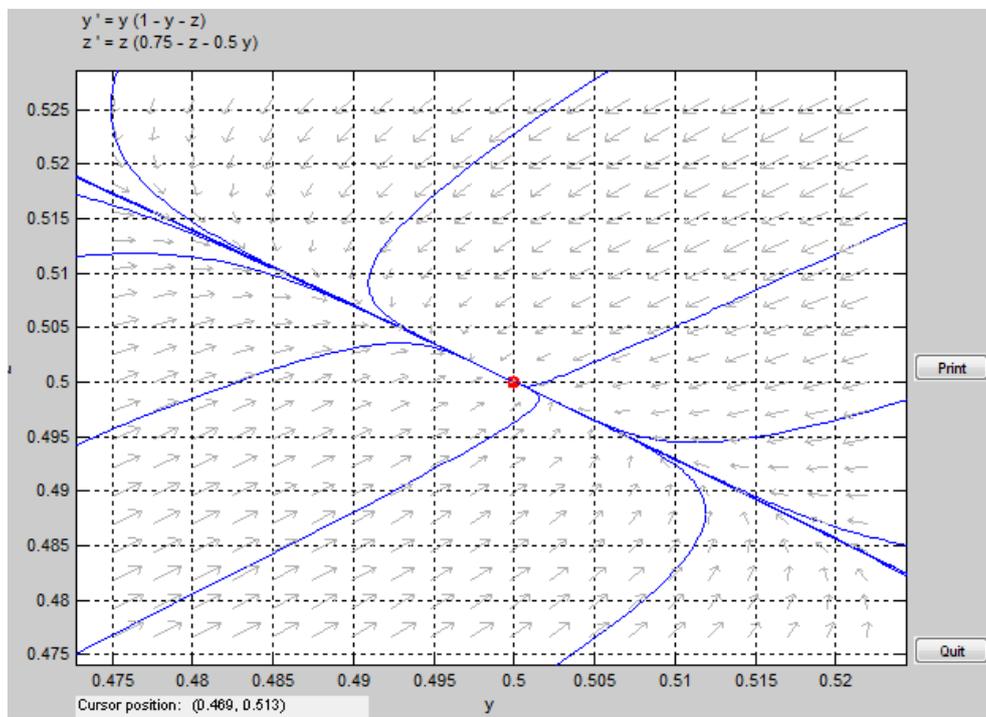


## Sistemas autónomos no lineales

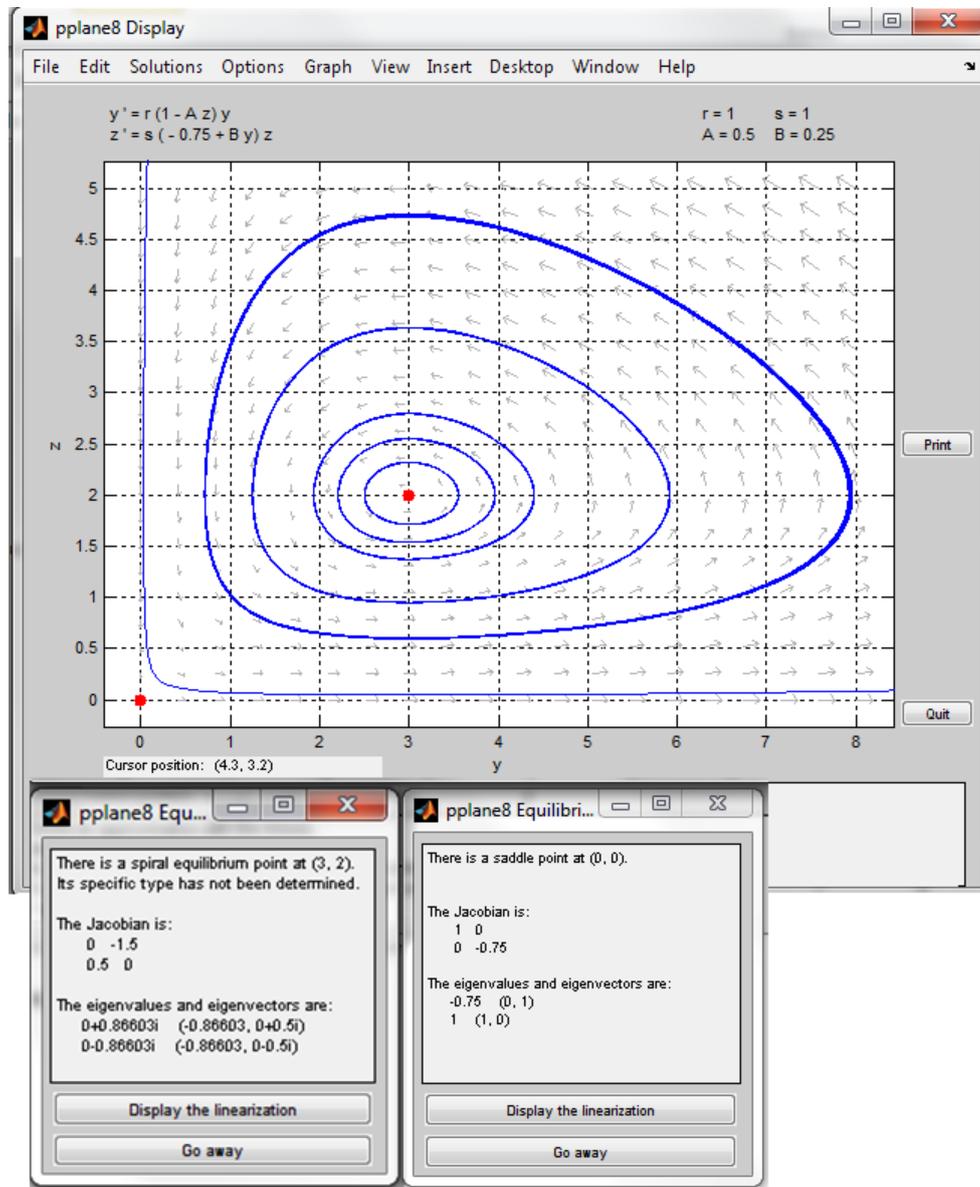
### Ejercicio 5: (modelo de competición de especies)



% ampliando el dibujo en un entorno de un punto de equilibrio, se ve que las trayectorias no se cortan



**Ejercicio 6: (modelo depredador-presa)**



% de manera general, el entorno pplane, encuentra los puntos críticos numéricamente. En este caso, resolviendo el sistema  $(1-0.5z)y=0, z(-0.75+0.25y)=0$ , vemos que (3,2) y (0,0) son puntos críticos del sistema.

**% Observación:** Otras ecuaciones diferenciales y sistemas autónomos se pueden introducir en la interfaz de pplane, y también utilizando la galería de modelos que tiene el entorno. Así pasa con los modelos de competición o cooperación de especies, y con otros modelos de sistemas eléctricos o mecánicos, etc... Para deducción y análisis detallado de estos modelos ver la bibliografía recomendada en el curso.