OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 2 - Resolución explícita de ED de primer orden.
Gráficas de soluciones

1.- Utilizando MATLAB, resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden del libro de apuntes y comparar con la solución obtenida a mano. Utilizar *dsolve* y las fórmulas integrales del libro de apuntes. Comparar resultados. Dibujar algunas soluciones. En particular, resolver y hacer grficas de las ecuaciones diferenciales que se escriben a continuacin

1. Resolver las ecuaciones de variables separadas

   $$y' = xy, \quad y' = \frac{-x}{y}, \quad y' = \frac{y}{x}$$

   $$y' = y, \quad y' = y^2, \quad y' = \sin(y)\sin(x)$$

   Dar si se puede condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y(1) = 1$ y resolver. Dibujar soluciones explícitas e implicitas. Determinar intervalos de definición de las soluciones definidas en forma explícita.

2. Resolver una ecuación diferencial de primer orden: por ejemplo, la ecuación lineal $y' = t + y$, siendo t variable independiente (*dsolve*). Comparar la solución con la obtenida utilizando las fórmulas integrales. Resolver un problema de Cacuchy asociado:

   $$y' = t + y, \quad y(0) = 1.$$

   Hacer una gráfica de la solución en distintos intervalos.

3. Resolver los problemas de Cauchy y hacer una grfica de las soluciones en distintos intervalos $[-n, n]$, (utilizar *hold on* para dicho dibujo)

   $$y' = -y + 3 + \cos(x), \quad y(0) = 7/2$$

   $$y' = -y + 3 + \cos(x), \quad y(0) = 4$$

   $$y' = -y + 3 + \cos(x), \quad y(0) = 0$$

4. Resolver las ecuaciones de Riccati:

   $$y' = -\frac{y}{x} + y^2 - \frac{1}{x^2}\,,$$

   $$y' = x^2 + y^2\,,$$

   $$y' = x^2 + e^x y^2\,.$$

Resolver también la primera ecuación reduciéndola a una ecuación lineal y aplicando fórmulas (Buscar $y_p = x^r$ para alguna constante r). Imponer condiciones iniciales, por ejemplo $y(2) = 1$ e $y(1) = 1$, respectivamente. Hacer una gráfica de la solución.

Si no se puede resolver explícitamente, aproximar la solucin pasando por $(0, 1)$ por los cinco primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la solucin (tomar 4, 5 y 10 términos de dicho desarrollo, respectivamente, comparando grficas).

5. Resolver las ecuaciones

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \quad , \quad y' = \frac{x-y}{x+y}$$

con *dsolve*, como ecuaciones homogéneas (reduciéndolas a E.D. de variables separadas mediante cambios de variable) y/o reduciéndolas a diferenciales exactas. Testear si alguna admite un factor integrante dependiente de $x^2 + y^2$, y multiplicando por dicho factor integrante resolver como ecuacin diferencial exacta.

6. Resolver las ecuaciones reducibles a homogéneas

$$y' = \frac{2y+x+1}{2y+x-1} \quad , \quad y' = \frac{2y+2x+1}{2y+x-1}$$

2.- Se consideran los modelos de caída libre de cuerpos en el aire, desde una altura, H dependiendo de que la resistencia del medio sea proporcional a la velocidad $v(t)$, o al cuadrado de la velocidad $v(t)^2$ (sección 1.6 del libro de apuntes). Resolver:

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg - \alpha\frac{dh}{dt} \quad \text{y} \quad m\frac{d^2h}{dt^2} = -mg + \alpha(\frac{dh}{dt})^2.$$

haciendo $v'(t) = -h(t)$ y reduciendo a primer orden. Las constantes que aparecen en el problema son α la constante de proporcionalidad, m masa del cuerpo, g constante de gravedad y v_0 velocidad inicial. Introducir las variables simbólicas $alfa$, m, g, H y $v0$ y expresar la solución en términos de dichos parámetros.

3.- Resolver las ecuaciones diferenciales, relativas a los modelos de Malthus y Verhulst para crecimiento de poblaciones (sección 1.6 del libro de apuntes):

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N$$

$$\frac{dN}{dt} = \gamma N(1 - \frac{N}{N_\infty})$$

utilizando *dsolve*, e introduciendo las variables simbólicas $gamma$, $N0$ y $Ninf$. Dejar la solución en términos de estos parámetros ("tasa de crecimiento"," población inicial" y "población límite").