OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 4 - Resolución numérica de EDO y sistemas diferenciales: problemas de valores iniciales

1. Considerar el problema de Cauchy

$$y' = t + y, \quad y(0) = 1,$$

Comparar la solución exacta con la aproximada obtenida por el método de Euler para distintos tamaños del paso h.

Repetir con los métodos de Euler mejorado y Runge-Kutta.

Comparar la solución con la obtenida utilizando la función MATLAB $ode45$

2. Considerar el problema de Cauchy :

$$y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0) = 1$$

Comprobar usando $dfield$ que la solución no está definida en $[0, 1]$ (ver ejemplo 13 de la sección 1.7 del libro de apuntes; ver también el ejercicio 10 de la sección 1.7)

Aplicar el método de Runge-Kutta, para distintos tamaños del paso, viendo como la solución crece muy deprisa en el intervalo $[0.9, 1]$. Hacer gráficas de las soluciones.

Establecer un control de paso que nos permita tomar h tal que $y(0.9) \approx 14.27$.

Considerar el problema de Cauchy: $y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0.9) = 14.27$. Aplicar el método de Runge-Kutta para distintos tamaños del pasos en $[0.9, 1]$. Tomar, e.g., $h = 0.001$

Utilizando las soluciones numéricas de los apartados anteriores, dibujar la aproximación de la solución de $y' = x^2 + y^2\,, \quad y(0) = 1$, en $[0, 0.96]$.

Utilizar la funcionón MATLAB $ode45$, para resolver numericamente.

3. Considerar el Problema de Cauchy relativo al ejercicio 15 de la sección 1.7 del libro de apuntes:

$$y' = 2\sqrt{|y|}\,, \quad y(0) = 0.$$

Dibujar la solución numérica obtenida aplicando un método numérico y una de las exactas: $y = x|x|$. Meditar a qué se debe el resultado.

4. Considerar el problema de Cauchy relativo al ejercicio 15 de la sección 1.7 del libro de apuntes:

$$\begin{cases} y' &= y|y|^{-3/4} + x\sin\frac{\pi}{x} \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Aplicar el método de Runge-Kutta para aproximar numéricamente la solución en $[0, 0.4]$ para los valores de los pasos $h = \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{27}$, respectivamente, y para otros más pequeños. Hacer una gráfica de la solución. ¿Qué se observa?. ¿A qué se debe este resultado?. Aplicar distintas funciones de MATLAB ($ode45$, $ode23$,...), testeando con cuáles se obtiene los resultados observados con $RK4$.

5. Resolver explícita o numericamente los problemas de Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= x + y - 3 \\ y(0) &= 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' &= x + y - 3 \\ y(0) &= 2.001, \end{cases}$$

   Comparar las soluciones mediante una gráfica en los intervalos [0,5], [0,10], [0,100]. Comparar las soluciones en $x = 1$ y en $x = \log 10^6$.

6. Para otros errores que pueden aparecer con los métodos numéricos, como son los de redondeo, o los de propagación de los errores en los datos de un problema ver, por ejemplo, ejercicios 1 y 12 de las secciones 1.6 y 1.7 respectivamente del libro de apuntes

7. Utilizar una función MATLAB para resolver numericamente ejercicios relativos a problemas de Cauchy de la sección 1.7 del libro de apuntes. Comparar con soluciones exactas si se puede.

Ecuaciones de segundo orden y sistemas

1. Resolver numéricamente el problema de Cauchy

$$y'' = 2y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

   en el intervalo $[0, 1/2]$, utilizando las funciones MATLAB eul, $rk2$ y $rk4$, para distintos tamaños de paso $h = 0.1, h = 0.05, h = 0.001$.

   Utilizar también $ode45$ y comparar las distintas aproximaciones con la solución exacta mediante gráficas. Comparar valores en $x = 1/2$. (solución exacta: $y = 1/(1 - x)$, ver ejemplo 21, Sección 2.1 del libro de apuntes).

2. Resolver numéricamente el problemas de Cauchy relativo a la ecuación del péndulo

$$y'' + sin(y) = 0,$$

   con condiciones inciales $y(0) = 0, y'(0) = 0.2$. Comparar con la solución de la ecuación linealizada. Dibujar las soluciones. Repetir el proceso con condiciones inciales $y(0) = 0, y'(0) = 2$. Utilizar la función $ode45$ de MATLAB. En particular se propone:

   - Resolver explícitamente y numéricamente en $[0, 6\pi]$, los problemas de Cauchy

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.2$$

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

     Utilizar la función MATLAB $ode45$ y comparar ambas soluciones.

- Utilizando *ode*45, encontrar la aproximación numérica de la solución de los problemas de Cauchy

$$y'' + \sin(y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.2$$

$$y'' + \sin(y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$$

  Comparar ambas soluciones con las de la ecuación linealizada del ejercicio anterior.

- Dibujar las trayectorias de las soluciones de los problemas planteados

3. Comparar los mapas de fases relativos a la ecuación del péndulo y la ecuación linealizada

$$y'' + y = 0 \qquad \text{para y(t) cercano a } y = 0 \text{ en } [-1,1] \times [-1,1]$$

$$y'' - y + \pi = 0 \qquad \text{para y(t) cercano a } y = \pi \text{ en } [\pi - 1, \pi + 1] \times [-1,1].$$

4. Encontrar la solución exacta y numérica de un modelo de sistema resorte-masa (dos masas unidas por un muelle, ver Ejercicio 11, Sección 3.4 del libro de apuntes), comparando dichas soluciones:

$$m_1 y_1'' = d(y_2 - y_1) - k_1 y_1' + k_2(y_2' - y_1')$$

$$m_2 y_2'' = d(y_1 - y_2) + k_2(y_1' - y_2')$$

   donde las constantes d, m_i y k_i son constantes de recuperación, masa y recuperación. Tomar los valores de estas constantes 1 para los cálculos.

5. Se considera el problema de valor inicial

$$y'' + y' + y^2 x^3 = 1, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = \beta$$

   tomando los distintos valores de $\beta = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.25$, aproximar numéricamente la solución en [0,1]. Utilizar *ode*45. Indicar qué valor de beta de los dados es el mejor para aproximar la solución del problema de contorno

$$y'' + y' + y^2 x^3 = 1, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

   Intentar mejorar β, y escribir el valor aproximado de la solución en $x = 1$ (*método de tiro*).

6. Usando la técnica del ejercicio anterior aproximar la solución de

$$y'' - y = x^2, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

   Empezar con valores de $\beta = \pm 0.1$. Comparar con la solución exacta.

7. Usando el método de tiro aproximar la solución única de

$$y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0,1)$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$