OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 5 - Sobre el plano de fases: algunos modelos matemáticos

1. Estudiar el comportamiento de las vibraciones del modelo de resorte lineal

$$my'' + ky' + cy = p(t)$$

dependiendo de la relación entre las constantes masa m, recuperación c y amortiguación k (ver sección 2.5 del libro de apuntes).

Tomando $p(t) = 0$, y las ecuaciones

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y'' + 4y = 0$$

hacer una gráfica de las soluciones para distintas condiciones iniciales indicando cuándo el movimiento es débilmente amortiguado, fuertemente amortiguado o periódico.

En ausencia de amortiguación, comparar los distintos comportamientos para distintas fuerzas actuando sobre el sistema resorte-masa: e.g., tomar $k = 0$, $m = 1$, $c = 4$, $p(t) = cos(t)$ y $p(t) = cos(2t)$

2. Utilizando el entorno *pplane*8, dibujar los planos de fases correspondientes a los ejercicios de la secciones 4.2 y 4.3 del libro de apuntes.

En particular, proponemos los relativos a modelos de resortes lineales y no lineales, y modelos de péndulos, intentando interpretar el comportamiento de las soluciones a través del plano de fases:

- Dibujar el mapa de fases para las ecuaciones de los resortes lineales: $my'' + ky' + cy = 0$, con k, c y m constantes positivas; esto es dependiendo de los valores k, m y c, así como en el caso en que no hay amortiguación ($k = 0$). Comparar con la solución exacta calculada.
- Dibujar el mapa de fases para la ecuación del péndulo amortiguado (no amortiguado, respectivamente): $y'' + ky' + sin(y) = 0$, imponiendo distintas condiciones inciales y viendo dónde el mapa de fases relativo a la ecuación linealizada coincide con el de la ecuación del péndulo amortiguado (no amortiguado, respectivamente).
- Comparar los mapas de fases relativos a la ecuación del péndulo $y'' + \sin(y) = 0$ y la ecuación linealizada

$$y'' + y = 0 \qquad \text{para } y(t) \text{ cercano a } y = 0 \text{ en } [-1, 1] \times [-1, 1]$$

$$y'' - y + \pi = 0 \qquad \text{para } y(t) \text{ cercano a } y = \pi \text{ en } [\pi - 1, \pi + 1] \times [-1, 1]$$

- Dibujar el mapa de fases para la ecuación de un resorte blando:

$$y'' + f(y) = 0$$

con $f(0) = 0$, $yf(y) > 0$ para $y \neq 0$ y $f(y)/y < k$, para alguna constante $k > 0$. Considerar $f(y) = y - y^3$. Así $y'' + y - y^3 = 0$ se comporta como un resorte blando para $|y| \leq 1$. Comparar dicho mapa con el del resorte lineal $y'' + y = 0$.

- Dibujar el mapa de fases para la ecuación de un resorte duro: $y'' + y + y^3 = 0$. Comparar dicho mapa con el del resorte lineal $y'' + y = 0$.

3. Utilizar el mapa de fases para estudiar el efecto de una pequeña amortiguación ε en un sistema resorte-masa en intervalos de tiempo muy grandes

$$y'' + \varepsilon y' + y = 0 \quad \varepsilon = 0.1, \quad \varepsilon = 0.05, \quad \varepsilon = 0.001$$

Hacer lo mismo para la ecuación del péndulo $y'' + \varepsilon y' + sin(y) = 0$.

4. Se considera la ecuación que modela el alargamiento de un determinado resorte no lineal $y'' + y - (y-2)^{-2} = 0$. Calcular el tiempo aproximado T que tarda en repetirse el movimiento, partiendo de las condiciones iniciales

$$y(0) = 0.8, \quad y'(0) = 0\,.$$

Hacer una gráfica aproximada de la solución en este intervalo de tiempo. Escribir el alargamiento y la velocidad obtenidos en este tiempo.

5. Se considera el modelo de competición de especies (dos especies Y y Z compiten por la supervivencia):

$$y'(t) = y(1 - y - z)$$
$$z'(t) = z(0.75 - z - 0.5y)$$

$y(t), z(t)$ representan los individuos de cada una de las especies (Y y Z, respectivamente) en el tiempo t. Dibujar el mapa de fases, determinar el comportamiento limite de $y(t)$ y $z(t)$ cuando $t \to \infty$, e interpretar el resultado en términos de comportamiento de ambas poblaciones

6. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para el modelo (depredador-presa):

$$y'(t) = y(1 - 0.5z)$$

$$z'(t) = z(-0.75 + 0.25y)$$