OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 7 - Sobre Transformadas Integrales: Laplace / Fourier

Comandos útiles para T. de Laplace: $laplace(f)$, $ilaplace(F)$, $laplace(sym('Heaviside(t)'))$, $laplace(sym('Dirac(t)'))$, o $laplace(heaviside(t))$, $laplace(dirac(t))$

Para f una función de la variable simbólica t, $F = laplace(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica s.

Comandos útiles para T. de Fourier: $fourier(f)$, $ifourier(F)$, $fourier(sym('Heaviside(x)'))$, $fourier(sym('Dirac(x)'))$, o $fourier(heaviside(x))$, $fourier(dirac(x))$.

Para f una función de la variable simbólica x, $F = fourier(f)$ es una función dada en términos de la variable simbólica w.

1.- Utilizar la transformada de Laplace para resolver los problemas que se enuncian a continuación. Asimismo, si se pueden resolver con el comando *dsolve*, comprobar que la solución que se obtiene es la misma. Hacer una gráfica de la solución en un intervalo que contenga puntos de discontinuidad de los datos.

1. $$y' - y = 1\,, \quad y(0) = 45$$

   Comparar el resultado con el obtenido a mano en la sección 2.7 del libro de apuntes

2. $$y'' - 3y' + 2y = 4te^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

3. $$y'' + 2y' + 2y = 3\delta(t - pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

   (Ejercicio 7 de la sección 2.7 del libro de apuntes, relativo a modelos de resortes lineales o circuitos)

4. $$y'' + y = -u(t) + u(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

   (Ejercicio 16 de la sección 7.2 del libro de apuntes, relativo a modelos de resortes lineales)

5.
$$y'' = f(x), \quad x \in (0,3), \qquad y(0) = 0, \quad y(3) = 0$$
donde $f(x) = 2x$ si $x \in [0,1]$, $f(x) = 3 - x$ si $x \in [1,3]$. Demostrar que tiene solución única y resolver. (Ejercicio 21 de la Sección 7.4 del libro de apuntes, relativo a modelos de vigas).

6.
$$y^{iv} = \delta(x-1),\ x \in (0,2)\,, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(2) = y'''(2) = 0$$
(Problema de contorno relativo a la ecuación de la viga, de la sección 2.7 del libro de apuntes).

7.
$$\begin{cases} y + z' &= e^{-t} \\ 3y + y' &= z - 3z' \\ y(0) = 1 &, \quad z(0) = 1. \end{cases}$$
(Problema de Cauchy para un sistema diferencial de primer orden relativo al ejercicio 10-a de la sección 2.7 del libro de apuntes).

2.- Utilizar la transformada de Fourier para resolver los problemas de Cauchy relativos a la difusión del calor (sección 6.4.2 del libro de apuntes) y vibraciones de vigas (ejercicio 13 de la sección 7.5 del libro de apuntes).

1. Resolver el problema de Cauchy para la propagación del calor en una barra conductora de longitud infinita, conociendo la temperatura $u(x,t)$ en el instante inicial ($u(x,0) = f(x)$):
$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} &= 0\,,\ x \in (-\infty,\infty), t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x),\ x \in (-\infty,\infty)\,. \end{cases}$$
Resolver y hacer una gráfica de la solución para $a = 4$, $f(x) = sin(x)$, y dibujar la función temperatura para distintos tiempos. Lo mismo para $a = 1$, y la función f definidad:
$$f(x) = 1 + x, \text{ si } x \in [-1,0], \quad f(x) = 1 - x \text{ si } x \in [0,1], \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin [-1,0]$$

2. resolver el problema que modela las vibraciones de una viga de longitud infinita
$$\begin{cases} u_{tt} + \frac{1}{a^2} u_{xxxx} &= 0\,, x \in (-\infty,\infty), t > 0\,, \\ u(x,0) &= f(x)\,,\ x \in (-\infty,\infty)\,, \\ u_t(x,0) &= a g''(x)\,,\ x \in (-\infty,\infty)\ . \end{cases}$$
Se supone que a es una constante positiva y f y g son dos funciones tales que existen las tranformadas de Fourier de f, g, g' y g''.