OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 8 - Problemas de contorno. Desarrollos en serie de Fourier. Aproximaciones numéricas

1. Se considera el modelo de deformaciones de una viga de longitud l, sujeta en los extremos $x = 0$ y $x = l$, y sometidas a fuerzas externas que generan un momento:
$$EIy'' + Ty = p(x), \quad x \in (0, l)$$
$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0$$
Tomando $l = \pi$ y $p(x) = e^x$ ($p(x) = \sin(2x)$, respectivamente) **calcular con** *dsolve* la deformación $y(x)$ supuesto que la relación entre las constantes rigidez a flexión EI y esfuerzo axil T es tal que $T/EI = 1$. Hacer lo mismo para $T/EI = -1$. Razonar a qué se deben los resultados.

   1.a.-Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = \pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

   1.b.- Repetir el ejercicio tomando $EI = 1$, $T = -\pi^2$, $l = 1$, $p(x) = x$ ($p(x) = \sin(2\pi x)$ respectivamente).

2. Encontrar las realciones entre T y EI en el ejercicio 1, de manera que la viga se deforme para $p(x) = 0$.

3. Encontrar los valores propios y las funciones propias de los siguientes problemas de Sturm-Liouville

   (a)
$$y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0, 1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

   (b)
$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\frac{dy}{dr}) + \lambda ry = 0\,, & r \in (r_{int}, r_1), \\ y(r_1) = 0 \,, & y(r_{int}) = 0\,. \end{cases}$$

   (c)
$$\begin{cases} \frac{d}{dr}(r\frac{dy}{dr}) + \lambda ry = 0\,, & r \in (0, r_1), \\ y(r_1) = 0 \,, & y,\ \frac{dy}{dr} \text{ acotadas cuando } r \to 0\,. \end{cases}$$

   Tomar en $b)$ y $c)$: $0 < r_{int} < r_1$.

   Crear una función MATLAB que lea n y nos de los n primeros términos del desarrollo en serie de Fourier, relativa a las funciones propias de (a), de una función f en [0,1]. Hacer la gráfica de la función f y de las sumas parciales de la serie comparando la aproximación. Tomar para esto $f(x) = x(x-1)$, $f(x) = x$ y f continua a trozos definida como $f(x) = x$ si $x \in [0, 1/2]$ y como $f(x) = 0$ si $x \in (1/2, 1]$.

Sobre aproximaciones numéricas:
Método de Galerkin. Elementos Finitos. Diferencias finitas

1. Se considera el problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' - x^2 y = f(x) & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

Utilizando las funciones propias del problema de valores propios

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

como funciones de base en el Método de Galerkin, encontrar los coeficintes $(a_{i,j})_{i,j=1,2,\cdot,N}$ de la matriz del sistema asociado. Escribir dicho sistema para $N = 4$.

2. Repetir el ejercicio anterior para el problema de contorno:

$$\begin{cases} y'' - y = x^2 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Tomando distintos valores de N ($N = 4$, $N = 10$, $N = 20$) comparar, por medio de una gráfica, la solución que se obtiene numéricamente con la solución exacta.

3. Repetir los ejercicios 1 y 2, respectivamente, tomando como funciones de base las funciones continuas, lineales a trozos, asociadas a los nodos de la partición $\{x_i\}_{i=1}^N$, $x_i = ih$, $h = \frac{1}{N+1}$. (Esto es, las llamadas *funciones de base de elementos finitos* $\{\phi_i\}_{i=1}^N$, ϕ_i polinomio de grado 1 en $[x_j, x_{j+1}]$, $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$, $i, j = 1, 2, \cdots, N$).

4. Modificar las funciones *elementosfinitos* y *galerkin* para aproximar la solución del problema

$$\begin{cases} y'' - x^2 y = e^x & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

5. Modificar *elementosfinitos* y *galerkin* para aproximar y resolver

$$\begin{cases} y'' - y = x^2 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 1 & , \quad y(1) = 2. \end{cases}$$

6. Modificar *elementosfinitos* para para aproximar y resolver

$$\begin{cases} y'' - y = x^2 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y'(1) = 0. \end{cases}$$

7. Modificar funciones *elementosfinitos* y *galerkin* para aproximar las soluciones de los problemas

$$\begin{cases} -(xy')' + 2y = e^x & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((x+1)y')' - \frac{y}{x+1} = 1 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0 \end{cases}$$

8. Modificar *elementosfinitos* y *galerkin* para aproximar las soluciones de los problemas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - x^3 y = e^{x^2} & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - x^3 y = e^{x^2} & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 1. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\frac{e^{-x}}{(x-1)} y')' + \frac{e^{-x}}{(x-1)^2} y = 1 & , & x \in (2,3) \\ y(2) = 0 & , & y(3) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (\frac{e^{-(t+2)}}{(t+1)} y')' + \frac{e^{-(t+2)}}{(t+1)^2} y = 1 & , & t \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 0 \end{array} \right.$$

9. Intentar aproximar con *elementosfinitos* o *galerkin* las soluciones de los problemas

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + \pi^2 y = x & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + \pi^2 y = \sin(2\pi x) & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y(1) = 0 \end{array} \right.$$

   Comparar con las soluciones encontradas explícitamente y explicar el resultado.

10. Utilizando funciones propias que verifiquen las condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$, modificar *galerkin* para aproximar la solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - y = x^2 & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y'(1) = 0. \end{array} \right.$$

11. Modificar *elementosfinitos* para aproximar la solución de:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - y = x^2 & , & x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , & y'(1) = y(1). \end{array} \right.$$

12. Modificar el programa elementos finitos (función $elementosfinitos$) para resolver el problema de contorno

$$(p(x)y')' + q(x)y = r(x),\ x \in (a,b)$$

$$y(a) + \alpha y'(a) = A, \quad y(b) + \beta y'(b) = b$$

   que se supone regular y con $a, b, A, B, \alpha, \beta$ constantes dadas. Introducir dichas constantes y las funciones p, q, r en los argumentos de la función elementosfinitos y substituir las integrales por integrales numéricas.

13. Sea una función $f(x)$ continua, lineal a trozos con nodos en $\{x_i\}_{i=1}^N$, $x_i = ih$, $i = 1, 2, \cdots, N$, $h = \frac{1}{N+1}$, tal que $f(0) = f(1) = 0$. Demostrar que se puede escribir como combinación lineal de las funciones ϕ_i del ejercicio 3:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\phi_i(x)$$

14. Utilizar el método del tiro (con *ode*45) para encontrar la solución aproximada del problema de contorno:

$$y'' - x^2 y = e^x, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Utilizar *dsolve* para demostrar que el problema tiene solución única.

Programar una función Matlab que resuelva el problema por diferencias finitas.

15. Utilizar los métodos de tiro y en diferencias finitas, para aproximar la solución de los problemas de contorno

$$\left\{ \begin{array}{rl} y'' = -(3x + x^2)e^x & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0. \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rl} y'' - y = x^2 & , \quad x \in (0,1) \\ y(0) = 0 & , \quad y(1) = 0. \end{array} \right.$$

Comparar solución exacta y soluciones aproximadas, para distintos tamaños de paso h

16. Utilizar la función Matlab *bvp*4*c* para resolver los problemas de contorno de los dos ejercicios anteriores y comparar soluciones obtenidas con distintos mtodos (de tiro, diferencias finitas ($ffinitge$) y elementos finitos ($elementosfinitos$). Utilizar *bvp*4*c* para aproximar en [0,1] el problema de contorno

$$y'' + x^3 y^2 + y' - 1 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

17. Utilizar el método en diferencias finitas o de elementos finitos para encontrar la aproximación de los valores propios y funciones propias del problema:

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad x \in (0,1)$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

18. Programar una función Matlab que resuelva mediante diferencias finitas los problemas de contorno

$$p(x)y'' + q(x)y' + h(x)y = r(x), \quad x \in (a,b)$$
$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

y

$$p(x)y'' + q(x)y' + h(x)y = r(x), \quad x \in (a,b)$$
$$y'(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

supuesto que admita solución única.

En particular, tomar las funciones p, q y h constantes.