OCW Universidad de Cantabria
Curso 2012/13
Cálculo Simbólico y Numérico en ED

Hoja 9 - Ecuaciones en derivadas parciales:
problemas de valores iniciales / contorno / mixtos

Resolver y crear funciones MATLAB que permitan simular la propagación de ondas / difusión del calor / vibraciones de cuerdas / vibraciones de vigas

1. Resolver los problemas de Cauchy para una EDP de primer orden, relacionados con modelos de propagación de ondas, para los valores de $c = \pm 2$

$$\begin{cases} u_t - cu_x &= 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) &= (x^2+1)^{-1}\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - cu_x &= e^x\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) &= (x^2+1)^{-1}\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

2. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) &= f(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} &= f(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0. \\ u(x,0) &= 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

a). Tomar $f(x) = sin(x)$ en ambos ejercicios.

b). Tomar el dato inicial $f(x)$ una función con soporte concentrado en $[-1, 1]$, e.g., $f(x) = x + 1$ para $x \in [-1, 0]$, $f(x) = 1 - x$ para $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ si $x \notin [-1, 1]$

3. Resolver los problemas de Cauchy para la ecuación de la cuerda vibrante:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0\,, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g(x)\,, \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \end{cases}$$

a). Tomar $c = 3$, y los datos inciales

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad \text{si} \quad x \in [-1, 1], \\ 0 & , \quad \text{si} \quad x \notin [-1, 1]\,. \end{cases} \quad , \qquad g(x) = 0$$

Encontrar el instante de tiempo t_0^* en el que el punto $x = 100$ de la cuerda empieza a vibrar y el instante t_f^* en el que deja de vibrar.

b). Tomar $c = 5$, $f = sin(x)$, $g = 0$,

c). Tomar $c = 2$, $f = sin(x)$, $g = cos(x)$

4. Se considera un modelo de vibraciones transversas de una viga, con extremos simplemente soportados,

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{tt} + u_{xxxx} & = & 0\,, \quad x \in (0,\pi), t > 0\,, \\ u(x,0) & = & \sin 2x\,, \quad x \in [0,\pi]\,, \\ u_t(x,0) & = & 3\sin 2x\,, \quad x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0\,, \\ u_{xx}(0,t) = u_{xx}(\pi,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{array}\right.$$

Utilizar el método de separación de variables para demostrar que la solución es: $u(x,t) = sin(2x)(\cos(4t) + \frac{3}{4}\sin(4t))$

5. Resolver el problema mixto para la ecuación de ondas

$$a).\ \left\{\begin{array}{rcl} u_{tt} - 9u_{xx} & = & 0\,, \quad x \in (0,1),\, t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x), \quad x \in [0,1]\,, \\ u_t(x,0) & = & 0, \quad x \in [0,1]\,, \\ u(0,t) = u(1,t) & = & 0\,, \quad t \geq 0\,. \end{array}\right.$$

para los distintos datos inciales

$f(x) = \sin(2\pi x)/2$

$f(x) = \dfrac{\sin(2\pi x) + \sin(4\pi x)}{2}$

$f(x) = \left\{\begin{array}{rl} (x - (\frac{1}{2}))^2 - \frac{1}{4^2} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1],\ x \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \end{array}\right.$

Crear una función matlab que simule las vibraciones para los distintos datos.

6. Resolver el problema de Dirichlet para una ecuación asociada a la de Laplace, en coordenadas polares (r,θ): $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}u & = & 0\,, \quad r \in (1,2),\ \theta \in (0,\frac{\pi}{2})\,, \\ u(r,0) = 0 & , & u(r,\frac{\pi}{2}) = 1\,, \quad r \in (1,2)\,, \\ u(1,\theta) & = & u(2,\theta) = 0\,, \quad \theta \in (0,\frac{\pi}{2})\,. \end{array}\right.$$

Dibujar la regiónn del plano xy en que está planteada la ecuación.

7. Utilizando el método de separación de variables, calcular las frecuencias propias y los modos propios de vibración del problema que modela las vibraciones de una membrana circular, sujeta en el borde:

$$-\Delta u = \lambda u, \qquad \text{en } D$$

$$u = 0, \qquad \text{sobre } \partial D$$

Hacer una gráfica de los distintos modos propios.

Ecuaciones en derivadas parciales con tres variables independientes

Resolver y crear funciones MATLAB que permitan simular la difusión del calor y vibraciones de membranas

7 Utilizando el método de separación de variables, calcular las frecuencias propias y los modos propios de vibración del problema que modela las vibraciones de una membrana circular, sujeta en el borde:

$$-\Delta u = \lambda u, \qquad \text{en } D$$

$$u = 0, \qquad \text{sobre } \partial D$$

Hacer una gráfica de los distintos modos propios de vibración.

8 Calcular la temperatura en cada punto (x, y) de un disco unidad D, en el tiempo $t > 0$, sabiendo que el borde del disco se mantiene siempre a temperatura constante 1, y en el instante incial $(t = 0)$ la temperatura en cada punto del disco es 0. Esto es, utilizar el método de separación de variables para resolver:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \qquad \text{para } t > 0, \quad (x, y) \in D$$

$$u(t, x, y) = 1, \qquad \text{para } (x, y) \in \partial D, \quad t > 0$$

$$u(0, x, y) = 0, \qquad \text{para } t > 0, (x, y) \in D$$

9 Encontrar el primer modo propio de vibración asociado a las vibraciones de una membrana circular de radio R sujeta en el borde:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0, \quad t > 0, \quad x^2 + y^2 < R_1$$

Hacer lo mismo para una corona circular: $0 < R_{int} < x^2 + y^2 < R_1$.

Tomando los valores $R_1 = 1$ en el caso del círculo, y $R_{int} = 1$, $R_2 = 2$, en el caso de la corona, aplicar un método numérico para aproximar la frecuencia propia asociada, en cada caso, a este primer modo propio de vibración.

Programar una función matlab que simule un onda estacionaria asociada al primer modo propio de vibración.

Programar una función matlab que simule un onda estacionaria asociada a otros modos propios de vibración, con oscilaciones sólo en la dirección radial.

Programar una función matlab que simule un onda estacionaria asociada a otros modos propios de vibración, con oscilaciones en las direcciones radial y angular.