

Energía y Telecomunicaciones

Tema 2.3. Circuitos trifásicos



Alberto Arroyo Gutiérrez
Mario Mañana Canteli
Raquel Martínez Torre
Jesús Mirapeix Serrano
Cándido Capellán Villacián

Departamento de Ingeniería Eléctrica y Energética

Este tema se publica bajo Licencia:

[Creative Commons BY-NC-SA 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

Índice general

NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA.	VII
CAPÍTULO 2. CIRCUITOS TRIFÁSICOS	1
2.1. Introducción	1
2.2. Representación instantánea de señales trifásicas	2
2.3. Representación fasorial	3
2.4. Circuito trifásico independiente	3
2.5. Conexión en estrella equilibrada	4
2.6. Circuito monofásico equivalente	7
2.7. Conexión en triángulo equilibrado	8
2.8. Equivalencia estrella-triángulo	9
2.9. Potencia en sistemas trifásicos	10
2.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos	11
2.11. Corrección del factor de potencia en circuitos trifásicos	13
2.12. Análisis de los circuitos trifásicos desequilibrados	15
2.13. Ejercicios	17
2.14. Soluciones	18

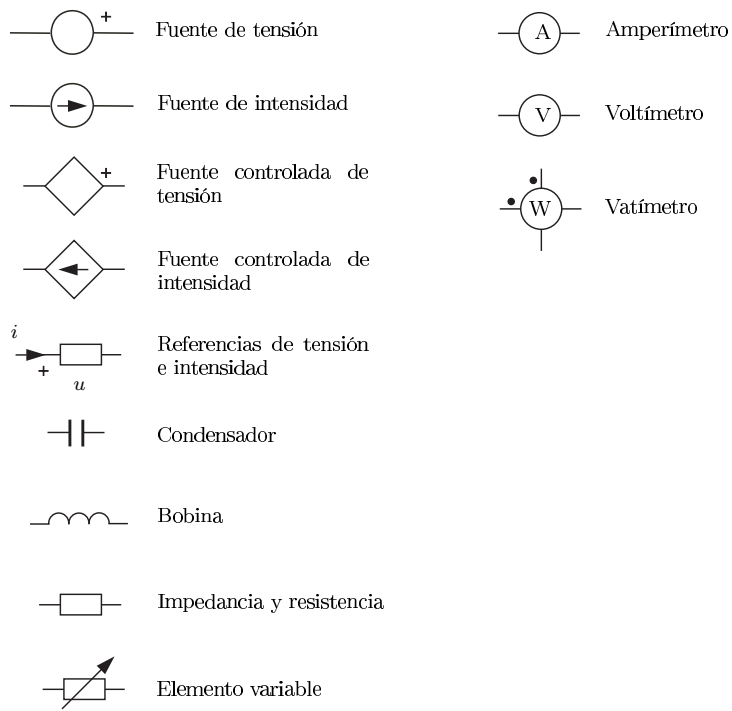
NOMENCLATURA Y SIMBOLOGÍA

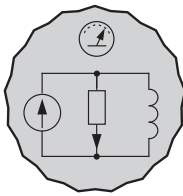
Normas generales

Letra mayúscula: Valor eficaz del parámetro.

Letra minúscula: Valor instantáneo del parámetro.

SIMBOLO	MAGNITUD	UNIDAD
a	Operador trifásico	$a = 1_{\angle 120^\circ}$
B	Susceptancia	Siemens (S)
C	Capacidad	Faradio (F)
f	Frecuencia	Hertzio (Hz)
G	Conductancia	Siemens (S)
i	Intensidad instantánea	Amperio (A)
I	Intensidad eficaz	Amperio (A)
\bar{I}	Intensidad compleja	Amperio (A)
j	Unidad imaginaria	$j = 1_{\angle 90^\circ}$
L	Inductancia propia / autoinducción	Henrio (H)
M	Inductancia mutua	Henrio (H)
P	Potencia activa	Vatio (W)
Q	Potencia reactiva	Voltamperio reactivo (var)
R	Resistencia	Ohmio (Ω)
S	Potencia aparente	Voltamperio (VA)
\bar{S}	Potencia aparente compleja	Voltamperio (VA)
u	Tensión instantánea	Voltio (V)
U	Tensión eficaz	Voltio (V)
\bar{U}	Tensión compleja	Voltio (V)
W	Energía	Julio (J)
X	Reactancia	Ohmio (Ω)
Y	Admitancia	Siemens (S)
Z	Impedancia	Ohmio (Ω)
\bar{Z}	Impedancia compleja	Ohmio (Ω)
η	Rendimiento	Porcentaje (%)
ρ	Resistividad	Ohmio metro (Ωm)
σ	Conductividad	Siemens por metro (S/m)
φ	Desfase entre \bar{U} e \bar{I}	Grado sexagesimal ($^\circ$)
ω	Pulsación	Radian por segundo (rd/s)





CIRCUITOS TRIFÁSICOS

CAPÍTULO

2

La teoría de circuitos trifásicos y componentes simétricas constituye la base sobre la que descansa todo el estudio de los sistemas eléctricos de potencia. En este tema se abordan los aspectos más básicos de los sistemas de generación, transporte y distribución.

2.1. Introducción

Los sistemas polifásicos fueron introducidos en el ámbito de la ingeniería eléctrica a finales del siglo XIX por el ingeniero norteamericano de origen croata Nikola Tesla, como una extensión lógica al desarrollo de los motores polifásicos. Aunque de manera formal los circuitos trifásicos constituyen una generalización de la teoría de circuitos polifásicos, se dedica este capítulo únicamente a los circuitos trifásicos, por ser éstos los que con más frecuencia se utilizan en la generación, transporte y distribución de energía eléctrica. Se resumen, a continuación, las ventajas de los sistemas trifásicos frente a los monofásicos:

- Si se fija constante el nivel de tensión, el transporte de una determinada energía resulta más económico si se realiza mediante un sistema trifásico que si hace mediante un sistema monofásico, ya que a igualdad de potencia a transmitir y de pérdidas en la línea para conductores de cobre, el ahorro en el de peso de cobre utilizado es de un 25 %.
- La potencia instantánea de los sistemas trifásicos es constante, a diferencia de la potencia instantánea de los sistemas monofásicos que es pulsante. Este hecho origina que los motores trifásicos giren con un par motor constante, lo que reduce vibraciones y esfuerzos en el rotor.
- Los motores trifásicos tienen la capacidad de arrancar por si mismos. Esta situación no se produce en los motores monofásicos, que necesitan de dispositivos adicionales para poder arrancar.
- Los rectificadores estáticos de potencia proporcionan una corriente continua con menos rizado en los sistemas trifásicos que en los monofásicos.

2.2. Representación instantánea de señales trifásicas

La representación instantánea de tensiones e intensidades sinusoidales se realiza según la notación siguiente:

$$x_a(t) = \sqrt{2}X \cos(2\pi ft) \quad (2.1)$$

$$x_b(t) = \sqrt{2}X \cos(2\pi ft - \frac{2\pi}{3}) \quad (2.2)$$

$$x_c(t) = \sqrt{2}X \cos(2\pi ft + \frac{2\pi}{3}) \quad (2.3)$$

donde:

$x_i(t)$ Valor instantáneo (en el instante t) de la tensión o intensidad en la fase i .

X Valor eficaz de la tensión o intensidad.

f Frecuencia de la tensión o intensidad.

En la figura 2.1 se muestra la representación instantánea de un sistema trifásico de tensiones o intensidades.

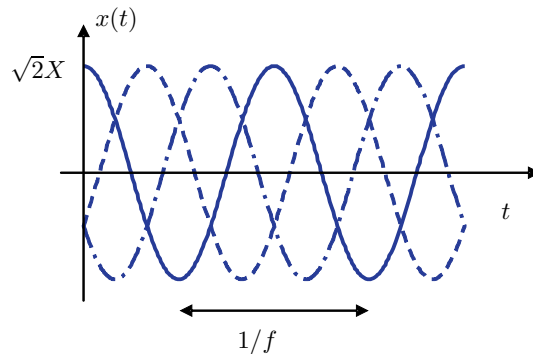


Figura 2.1. Representación de las tensiones en un sistema trifásico simétrico.

El conjunto de ecuaciones (2.1-2.3) constituye un sistema denominado simétrico, ya que está formado por tres tensiones sinusoidales que tiene el mismo valor eficaz y la misma frecuencia, pero que se encuentran desfasados 120° entre sí.

Debe observar el lector que la suma de las tres componentes del sistema trifásico es nula, esto es

$$x_a(t) + x_b(t) + x_c(t) = 0 \quad (2.4)$$

Se verá más adelante al estudiar los motores asíncronos trifásicos que el orden en que se suceden los valores máximos de las ecuaciones (2.1-2.3) es importante, puesto que establece el sentido de giro del motor. Dicho orden se denomina secuencia de fases. Así, se denomina secuencia de fases positiva a la secuencia a-b-c-a-b-c... mientras que recibe el nombre de secuencia de fases negativa la secuencia a-c-b-a-c-b...

2.3. Representación fasorial

Al igual que en el caso de los circuitos de corriente alterna monofásicos, la utilización de señales sinusoidales en el dominio del tiempo presenta como inconveniente la necesidad de utilizar ecuaciones integro-diferenciales en el análisis de circuitos. Es posible, por tanto, establecer una representación fasorial equivalente para las ecuaciones (2.1-2.3).

$$\bar{X}_a = X_{\angle 0} = X(1 + j0) \quad (2.5)$$

$$\bar{X}_b = X_{\angle -\frac{2\pi}{3}} = X\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (2.6)$$

$$\bar{X}_c = X_{\angle +\frac{2\pi}{3}} = X\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (2.7)$$

De forma equivalente a la ecuación (2.4), la suma de las expresiones fasoriales de las tensiones o intensidades trifásicas representadas por las ecuaciones (2.5-2.7) es igual a cero.

$$\bar{X}_a + \bar{X}_b + \bar{X}_c = 0 \quad (2.8)$$

La representación en el plano complejo es la que se muestra en la figura 2.2.

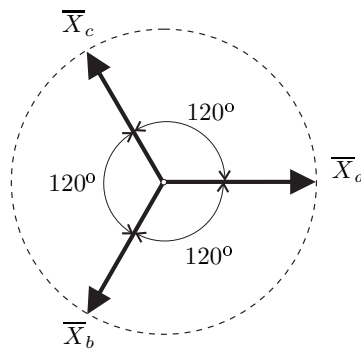


Figura 2.2. Representación fasorial de las tensiones en un sistema trifásico simétrico.

2.4. Circuito trifásico independiente

La forma más inmediata de construir un sistema trifásico de tensiones es mediante la unión de tres generadores monofásicos independientes, de la misma frecuencia y valor eficaz, pero con distinta fase inicial.

El análisis del circuito trifásico independiente se reduce al análisis de las tres mallas formadas por los circuitos monofásicos, de forma que las corrientes de circulación se obtienen como,

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}_a}{\bar{Z}_a} \quad (2.9)$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{U}_b}{\bar{Z}_b} \quad (2.10)$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{U}_c}{\bar{Z}_c} \quad (2.11)$$

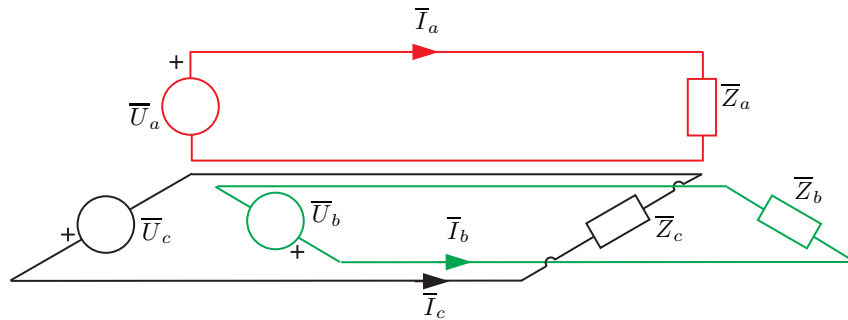


Figura 2.3. Circuito trifásico independiente.

donde se cumple que las tensiones forman un sistema equilibrado. Se define la carga como equilibrada si cumple la condición,

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \bar{Z}_c = Z \angle \varphi \quad (2.12)$$

esto es, todas las impedancias tienen el mismo módulo Z y la misma fase φ . Bajo estas condiciones las corrientes tienen el mismo módulo en todas las fases y se encuentran desfasadas entre sí 120° grados, formando lo que se denomina un sistema equilibrado de intensidades. En la figura 2.4 se muestra el diagrama fasorial de tensiones e intensidades para una carga con FP inductivo.

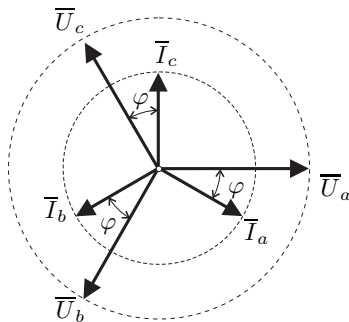


Figura 2.4. Representación fasorial de un sistema trifásico equilibrado de tensiones alimentando una carga equilibrada.

Al cumplirse la condición de que las tensiones forman un sistema simétrico y las cargas están equilibradas, las intensidades constituyen también un sistema simétrico y por lo tanto se verifica la condición,

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0 \quad (2.13)$$

En el caso de que las impedancias sean diferentes, bien en módulo y/o fase, las intensidades no cumplen la condición (2.13), siendo la suma en general distinta de cero. Se dice en ese caso que las cargas forman un sistema desequilibrado.

2.5. Conexión en estrella equilibrada

En la figura 2.3 se ha presentado una forma sencilla de construir un sistema trifásico de tensiones a partir de tres tensiones monofásicas. Sin embargo, el problema de este sistema es que necesita seis conductores, lo que encarece sustancialmente el diseño. Una alternativa consiste en conectar las referencias de los tres generadores, con lo que los caminos de retorno de las intensidades se unifican. A este camino de retorno unificado se le conoce como conductor neutro.

Además, como se mostrará a continuación, si las intensidades forman un sistema simétrico, la corriente de retorno total es nula. En la figura 2.5 se muestra el circuito eléctrico de un circuito trifásico en estrella equilibrada con neutro, también conocido como sistema trifásico a cuatro hilos. En el circuito de la figura 2.5 se consideran despreciables las impedancias de los

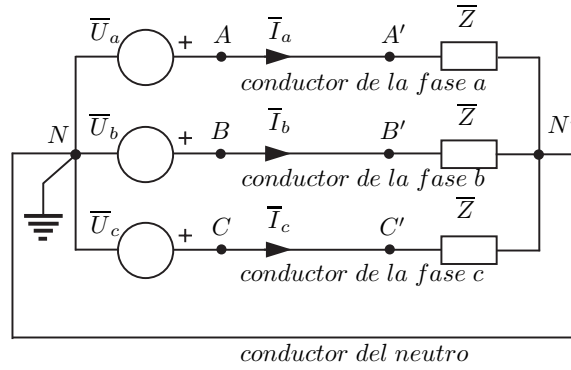


Figura 2.5. Circuito trifásico independiente.

conductores que unen los generadores con las cargas. Como puede observar el lector, tanto el generador como la carga se encuentran conectados en estrella. Este tipo de conexión se representa de forma abreviada mediante el símbolo Y. Más adelante se mostrará la alternativa más común a la conexión en estrella que se denomina conexión en triángulo, y cuya representación simbólica se realiza mediante el símbolo Δ . A los tres conductores que conectan las referencias positivas de los generadores con la carga se les denomina conductores de fase, mientras que como ya se ha dicho, el conductor común a los tres generadores recibe el nombre de generador de neutro. Normalmente las fases del sistema se designan mediante las letras (a,b,c), mediante (R,S,T) o mediante (u,v,w). El que se utilice una u otra denominación depende del país de origen de la literatura consultada. Al conductor de neutro se le suele designar mediante la letra N. Siguiendo con las definiciones, se introducen a continuación, los conceptos de tensión e intensidad de fase y de línea.

Se denominan tensiones de fase o tensiones simples a las tensiones \bar{U}_a , \bar{U}_b y \bar{U}_c . Sus expresiones fasoriales son las presentadas en las ecuaciones (2.5-2.7). Por cuestiones prácticas, el punto neutro N del generador se utiliza como potencial de referencia y en muchos casos se conecta a tierra. Se considera, por tanto, que $U_N = 0$.

Se denominan tensiones de línea o tensiones compuestas a las tensiones \bar{U}_{ab} , \bar{U}_{bc} y \bar{U}_{ca} , de forma que,

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ab} &= \bar{U}_a - \bar{U}_b = U(1 + j0) - U\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U\left(\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= U\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = U\sqrt{3}\angle_{30^\circ}\end{aligned}\quad (2.14)$$

Se observa en la ecuación (2.14) que la tensión compuesta entre las fases a y b está adelantada 30° respecto a la tensión simple \bar{U}_a y además tiene un módulo que es $\sqrt{3}$ el módulo de la tensión simple. Lo mismo ocurre con las otras dos tensiones compuestas, esto es,

$$\begin{aligned}\bar{U}_{bc} &= \bar{U}_b - \bar{U}_c = U\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - U\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = U(0 - j\sqrt{3}) \\ &= U\sqrt{3}(0 - j) = U\sqrt{3}\angle_{-90^\circ}\end{aligned}\quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_{ca} &= \bar{U}_c - \bar{U}_a = U\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - U(1 + j0) = U\left(-\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= U\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = U\sqrt{3}\angle_{150^\circ}\end{aligned}\quad (2.16)$$

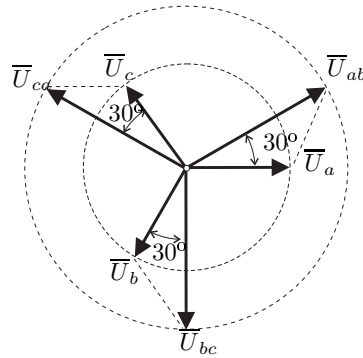


Figura 2.6. Diagrama fasorial de tensiones simples y compuestas en un sistema simétrico.

En la figura 2.6 se muestra un diagrama fasorial con las tensiones simples y compuestas de un sistema de tensiones simétrico.

En el sistema de distribución eléctrico español, las tensiones simples o de fase tienen un valor eficaz igual a 230 V eficaces, mientras que las tensiones compuestas son de $400 = 230\sqrt{3}$. Se cumple, por tanto, que una red trifásica de tensión compuesta 400 V da lugar a tres tensiones simples de 230 V. En general, cuando los técnicos eléctricos se refieren a las tensiones de un sistema trifásico, lo hacen pensando en las tensiones compuestas, esto es, si se nos dice que un sistema trifásico presenta una tensión de 400 V significa que el valor eficaz de las tensiones compuestas es de 400 V.

Las intensidades \bar{I}_a , \bar{I}_b e \bar{I}_c que circulan por los conductores de fase que conectan el generador con la carga reciben el nombre de intensidades de línea y en el caso de una carga conectada en estrella coinciden con las intensidades que circulan por cada una de las fases de la carga, que reciben el nombre de intensidades de fase. En un sistema trifásico (Y-Y) de alimentación simétrica y carga equilibrada, la intensidad por el conductor de neutro considerada como positiva en la dirección de la carga hacia el generador puede obtenerse como la suma de las tres intensidades de fase en la carga, tal como establece el primer lema de Kirchhoff, esto es,

$$\bar{I}_N = \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c \quad (2.17)$$

Sin embargo, si el sistema de alimentación es simétrico y la carga está equilibrada, se cumple la ecuación (2.13) y por lo tanto $\bar{I}_N = 0$.

Si en las condiciones anteriores se elimina el conductor de neutro, el circuito resultante es el que se muestra en la figura 2.7.

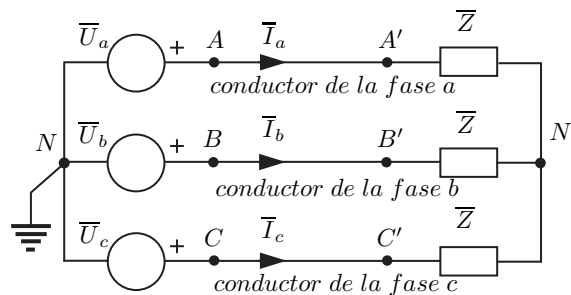


Figura 2.7. Circuito trifásico sin neutro alimentando una carga en estrella equilibrada.

En el circuito de la figura 2.7 se verifica

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 0 \quad (2.18)$$

siendo

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}_{A'N'}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{U}_{AN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} \quad (2.19)$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{U}_{B'N'}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{U}_{BN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} \quad (2.20)$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{U}_{C'N'}}{\bar{Z}} = \frac{\bar{U}_{CN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} \quad (2.21)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.19-2.21) en (2.18),

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_{AN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} + \frac{\bar{U}_{BN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} + \frac{\bar{U}_{CN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} \\ = \frac{\bar{U}_{AN} + \bar{U}_{BN} + \bar{U}_{CN}}{\bar{Z}} - 3\frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}} = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Como el sistema es simétrico, se verifica que,

$$\frac{\bar{U}_{AN} + \bar{U}_{BN} + \bar{U}_{CN}}{\bar{Z}} = 0 \quad (2.23)$$

y por lo tanto debe verificarse también que,

$$\bar{U}_{N'N} = 0 \quad (2.24)$$

La ecuación (2.24) justifica el hecho de que a pesar de que los puntos N y N' están físicamente separados, se encuentran al mismo potencial.

La conexión Y-Y sin conductor de neutro supone una gran ventaja desde el punto de vista económico, ya que permite reducir los seis conductores originales del sistema trifásico independiente a sólo tres. Sin embargo, debe asumirse el riesgo que implica la utilización de un sistema de distribución sin neutro. Si por alguna razón se abre una de las fases, se producirá un desplazamiento del punto neutro N' en la carga que puede dar lugar a que la tensión en una de las fases restantes disminuya, mientras que la tensión en la otra aumente por encima de su valor permitido. Por tanto, la construcción de una carga trifásica en estrella a partir de cargas monofásicas debe realizarse, en general, siempre que se disponga de conductor neutro.

2.6. Circuito monofásico equivalente

Para poder simplificar el análisis de los circuito trifásicos simétricos, se utiliza una representación que transforma el circuito trifásico en otro monofásico equivalente, de forma que los valores eficaces de tensión e intensidad obtenidos son generalizables a las tres fases del circuito original. A partir del circuito de la figura 2.7 es posible representar otro monofásico tal como el de la figura 2.8,

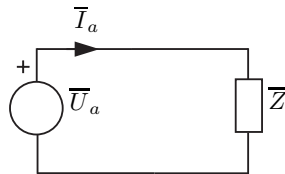


Figura 2.8. Circuito monofásico equivalente de un circuito trifásico simétrico equilibrado.

2.7. Conexión en triángulo equilibrado

Este apartado está dedicado a la conexión de cargas en triángulo. Si la idea básica de una carga en estrella es conectar cada una de las cargas monofásicas entre un conductor de fase y el conductor neutro, en la conexión en triángulo, el objetivo es conectar las cargas monofásicas entre dos conductores de fase. En el circuito de la figura 2.9 se muestra un ejemplo de carga conectada en triángulo.

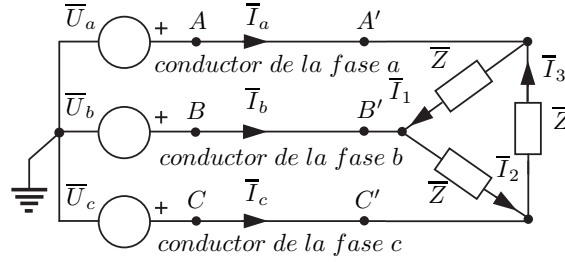


Figura 2.9. Circuito trifásico con carga conectada en triángulo equilibrado.

Tal como puede observar el lector, el circuito de la figura 2.9 muestra una coincidencia entre las tensiones de fase y de línea en la carga. Como se ha visto en apartados anteriores, existe una relación de $\sqrt{3}$ entre el módulo de las tensiones de línea y las tensiones simples en el generador. Al igual que en el caso anterior, la carga está equilibrada, esto es, presenta la misma impedancia en todas sus ramas. Las tres intensidades de fase en la carga \bar{I}_1 , \bar{I}_2 e \bar{I}_3 pueden obtenerse mediante la expresiones siguientes:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{A'B'}}{\bar{Z}} \quad (2.25)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{B'C'}}{\bar{Z}} \quad (2.26)$$

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{C'A'}}{\bar{Z}} \quad (2.27)$$

A partir de las intensidades de fase es posible calcular las intensidades de línea \bar{I}_a , \bar{I}_b e \bar{I}_c , de forma que:

$$\bar{I}_a = \bar{I}_1 - \bar{I}_3 = \frac{\bar{U}_{A'B'} - \bar{U}_{C'A'}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3}U\angle_{30^\circ} - \sqrt{3}U\angle_{150^\circ}}{\bar{Z}} = 3\frac{U}{\bar{Z}}1\angle_{-\varphi} \quad (2.28)$$

Como se deduce de la ecuación (2.28) la intensidad de línea en el conductor a está retrasada un ángulo φ con respecto a la tensión simple de la fase a. De igual forma sucede con las intensidades en los conductores de línea b y c.

$$\bar{I}_b = \bar{I}_2 - \bar{I}_1 = \frac{\bar{U}_{B'C'} - \bar{U}_{A'B'}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3}U\angle_{-90^\circ} - \sqrt{3}U\angle_{30^\circ}}{\bar{Z}} = 3\frac{U}{\bar{Z}}1\angle_{-120^\circ - \varphi} \quad (2.29)$$

$$\bar{I}_c = \bar{I}_3 - \bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_{C'A'} - \bar{U}_{B'C'}}{\bar{Z}} = \frac{\sqrt{3}U\angle_{150^\circ} - \sqrt{3}U\angle_{-90^\circ}}{\bar{Z}} = 3\frac{U}{\bar{Z}}1\angle_{120^\circ - \varphi} \quad (2.30)$$

En el diagrama fasorial de la figura 2.10 se representan los fasores de las tensiones simples y compuestas, así como las intensidades de fase y línea.

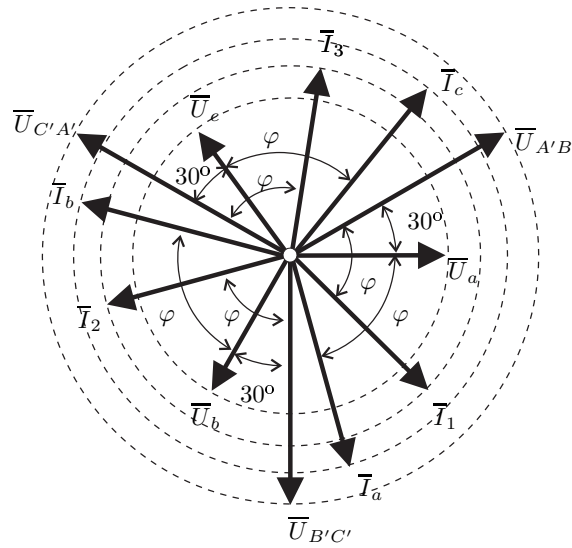
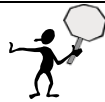


Figura 2.10. Diagrama fasorial de tensiones e intensidades en una carga trifásica equilibrada conectada en triángulo.



En el caso de las cargas en estrella, las intensidades de fase y línea coinciden, mientras que la tensión de línea es $\sqrt{3}$ mayor que la de fase. En el caso de cargas en triángulo, las tensiones de fase y línea son iguales, mientras que se cumple en este caso que la intensidad de línea es $\sqrt{3}$ mayor que la de fase.

Dado que las tensiones compuestas se adelantan 30° a las tensiones simples y que las intensidades de línea se retrasan 30° respecto a las de fase de la carga, el ángulo φ que forman las tensiones de línea con las intensidades de fase es el mismo que el ángulo que forman las tensiones simples con las intensidades de línea.

2.8. Equivalencia estrella-triángulo

La transformación estrella-triángulo resulta útil en el análisis de circuitos trifásicos por cuanto permite transformar una red en estrella a una red en triángulo o viceversa. En la figura 2.11 se muestran ambos tipos de cargas, en las que los terminales de acceso (X, Y, Z) son los mismos para las dos.

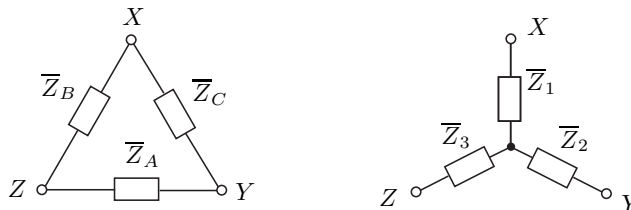


Figura 2.11. Transformación estrella-triángulo.

La transformación estrella-triángulo se realiza mediante la expresión siguiente:

$$\bar{Z}_i = \frac{\text{suma de los productos binarios de todas las impedancias de la estrella}}{\text{impedancia de la rama conectada al nudo opuesto a } \bar{Z}_i} \quad (2.31)$$

de forma que,

$$\bar{Z}_A = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_1} \quad (2.32)$$

$$\bar{Z}_B = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \quad (2.33)$$

$$\bar{Z}_C = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3} \quad (2.34)$$

Por su parte, la transformación triángulo-estrella se realiza mediante la expresión general,

$$\bar{Z}_i = \frac{\text{producto de las dos impedancias del nudo conectadas al nudo } i}{\text{suma de las tres impedancias del triángulo}} \quad (2.35)$$

de forma que,

$$\bar{Z}_1 = \frac{\bar{Z}_B\bar{Z}_C}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_B + \bar{Z}_C} \quad (2.36)$$

$$\bar{Z}_2 = \frac{\bar{Z}_A\bar{Z}_C}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_B + \bar{Z}_C} \quad (2.37)$$

$$\bar{Z}_3 = \frac{\bar{Z}_A\bar{Z}_B}{\bar{Z}_A + \bar{Z}_B + \bar{Z}_C} \quad (2.38)$$

Como caso particular, si una red trifásica equilibrada tiene una impedancia por rama \bar{Z} y tiene sus fases conectadas en estrella, la impedancia equivalente en triángulo será,

$$\bar{Z}_Y = \frac{\bar{Z}_\Delta}{3} \quad (2.39)$$

2.9. Potencia en sistemas trifásicos

El estudio de las potencias puestas en juego en los sistemas trifásicos presenta muchas similitudes con el realizado para el caso de los circuitos de corriente alterna (Capítulo §1). Si se recurre al teorema de Boucherot, la potencia activa total P consumida por una carga trifásica será igual a la suma de las potencias activas consumidas por cada una de las fases de la carga, esto es,

$$P = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \cos \varphi_k \quad [W] \quad (2.40)$$

donde,

U_k Valor eficaz de la tensión en la fase k .

I_k Valor eficaz de la intensidad en la fase k .

$\cos \varphi_k$ FP de la fase k .

De igual forma, la potencia reactiva total Q consumida por la carga será,

$$Q = \sum_{k=1}^3 U_k I_k \sin \varphi_k \quad [var] \quad (2.41)$$

La potencia aparente total vendrá expresada como el módulo de la potencia aparente compleja, esto es,

$$\bar{S} = P + jQ \quad (2.42)$$

$$S = \|\bar{S}\| = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad [VA] \quad (2.43)$$

Una de las características que presenta la potencia instantánea y que se ha puesto de manifiesto al comienzo del tema es el hecho de que tiene un valor constante independiente del instante en que se evalúe, de forma contraria a la potencia instantánea monofásica analizada en el Capítulo §1, cuyo valor era función del tiempo.

Si se plantea la expresión de la potencia instantánea total,

$$\begin{aligned} P(t) &= P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) \\ &= 2U_a I_a \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) + 2U_b I_b \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) \\ &\quad + 2U_c I_c \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como el sistema es simétrico y la carga está equilibrada, los valores de pico de tensiones e intensidades son iguales para las tres fases, de forma que,

$$\begin{aligned} P(t) &= 2UI \{ \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) + \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \varphi) \\ &\quad + \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3}) \cos(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \varphi) \} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Utilizando la transformación trigonométrica que relaciona producto de cosenos con sumas¹,

$$\begin{aligned} P(t) &= UI \{ \cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(\varphi) \\ &\quad + \cos(2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(\varphi) \} \end{aligned} \quad (2.46)$$

dado que,

$$\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(2\omega t - \frac{4\pi}{3} - \varphi) + \cos(2\omega t + \frac{4\pi}{3} - \varphi) = 0 \quad (2.47)$$

se cumple entonces que,

$$P(t) = 3UI \cos(\varphi) \quad (2.48)$$

2.10. Medida de potencia en sistemas trifásicos

La medida de potencia, y por tanto de energía, en sistemas trifásicos, no es una cuestión trivial. Existen numerosos libros dedicados completamente a esta temática, motivo por el que se incluye este apartado únicamente como introducción.

En general el número de vatímetros requeridos para medir la potencia en un sistema polifásico es uno menos que el número de hilos o conductores del sistema. Este principio se conoce como teorema de Blondel, y su demostración puede encontrarse en los manuales de teoría de circuitos. Si se desea medir la potencia activa de un sistema trifásico a cuatro hilos, esté o no

¹ $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$

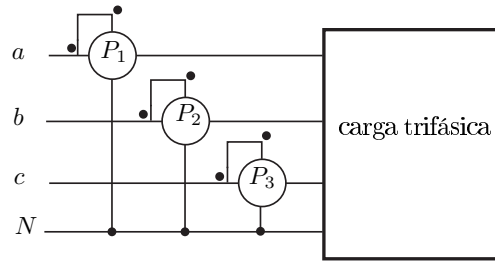


Figura 2.12. Medida de potencia activa en una carga trifásica a cuatro hilos.

equilibrado, se necesitarán tres vatímetros (uno por cada fase), tal como se muestra en la figura 2.12. La potencia activa total consumida por la carga será igual a la suma de la potencia activa consumida por cada fase, esto es,

$$P = P_1 + P_2 + P_3 \quad (2.49)$$

Como caso particular comentar que si la alimentación es simétrica y la carga está equilibrada, los tres vatímetros proporcionarán la misma lectura, por lo que en ese caso es posible realizar la medida con un único vatímetro y la potencia total será tres veces la potencia consumida por una fase. El procedimiento descrito en la figura 2.12 se aplica también en la medida de potencia reactiva, siendo la potencia reactiva total la suma de las potencias reactivas individuales consumidas por cada una de las fases. En el caso de sistemas trifásicos a tres hilos, tal como el que se muestra en la figura 2.13, las potencia activa y reactiva se mide mediante lo que se conoce como conexión Aron.

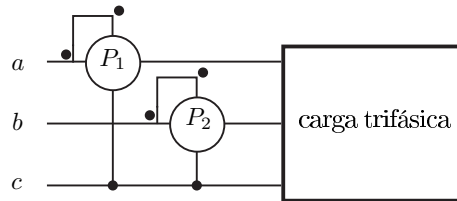


Figura 2.13. Conexión Aron para la medida de potencia activa y reactiva en sistemas trifásicos a tres hilos.

Según el teorema de Blondel, la potencia activa total será la suma de las potencias activas leídas en los vatímetros P_1 y P_2 , esto es,

$$P = P_1 + P_2 \quad (2.50)$$

En el caso de la medida de potencia reactiva, sólo hay que sustituir los vatímetros de potencia activa por medidores de potencia reactiva. Sin embargo, en el caso de que la carga trifásica esté equilibrada, es posible caracterizar la potencia reactiva total a partir de las potencias P_1 y P_2 . En efecto,

$$P_1 = \Re\{\bar{U}_{ac}\bar{I}_a^*\} = U_{ac}I_a \cos(30^\circ - \varphi) \quad (2.51)$$

ya que si la tensión simple de la fase a es utilizada como referencia, la tensión ac estará retrasada 30° respecto al fasor de referencia. En el caso de P_2 , la tensión bc está retrasada 90° respecto al fasor de referencia, mientras que la intensidad de línea b estará retrasada $120^\circ + \varphi$ respecto a este mismo fasor.

$$P_2 = \Re\{\bar{U}_{bc}\bar{I}_b^*\} = U_{bc}I_b \cos(30^\circ + \varphi) \quad (2.52)$$

Si consideramos un sistema simétrico, todas las tensiones de línea tendrán el mismo valor eficaz U_L . Al mismo tiempo, si la carga está equilibrada, todas las intensidades de línea serán iguales y de valor I_L . Si realizamos la suma de P_1 y P_2 ²,

$$\begin{aligned}
 P &= P_1 + P_2 = U_L I_L \cos(30^\circ - \varphi) + U_L I_L \cos(30^\circ + \varphi) \\
 &= U_L I_L (\cos(30^\circ - \varphi) + \cos(30^\circ + \varphi)) \\
 &= U_L I_L (2 \cos(30^\circ) \cos(\varphi)) = U_L I_L 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\varphi) \\
 &= \sqrt{3} U_L I_L \cos(\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

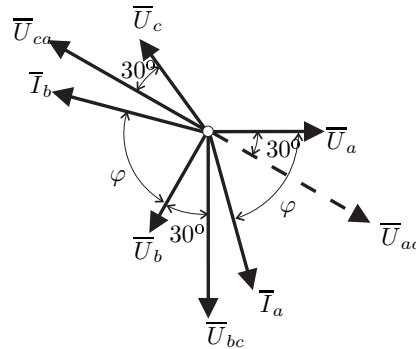


Figura 2.14. Diagrama fasorial de la conexión Aron.

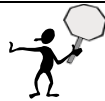
Si realizamos la resta de P_1 y P_2 ,

$$\begin{aligned}
 P_1 - P_2 &= U_L I_L \cos(30^\circ - \varphi) - U_L I_L \cos(30^\circ + \varphi) \\
 &= U_L I_L (2 \sin(30^\circ) \sin(\varphi)) \\
 &= U_L I_L 2 \frac{1}{2} \sin(\varphi)
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

y por tanto, es posible expresar la potencia reactiva como la diferencia de potencias activas multiplicada por $\sqrt{3}$.

$$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) \tag{2.55}$$

En el diagrama fasorial de la figura 2.14 se muestran las tensiones e intensidades puestas en juego en la conexión Aron, donde puede observarse claramente que el ángulo que forma la tensión compuesta ac con la intensidad a es de $30^\circ - \varphi$, mientras que el desfase entre la tensión de línea bc y la intensidad de línea b es de $30^\circ + \varphi$.



Errores frecuentes al utilizar la conexión Aron: 1) Aplicarlo al caso de cargas desequilibradas; 2) Al calcular Q debe utilizarse como término positivo el que corresponde a la tensión de secuencia negativa, siendo el término negativo el que corresponde a la tensión de secuencia positiva.

2.11. Corrección del factor de potencia en circuitos trifásicos

La corrección de potencia en circuitos trifásicos presenta un tratamiento similar al caso de los circuitos monofásicos. En efecto, si consideramos el circuito de la figura 2.15, formado por

$${}^2 \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta \quad \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

una carga trifásica con un FP inductivo, que es en la práctica la situación habitual y una batería de condensadores para la compensación de reactiva con un interruptor tripolar S que permite la conexión-desconexión de la batería, el FP con los condensadores desconectados será,

$$FP = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (2.56)$$

siendo

P Potencia activa consumida por la carga [W].

Q Potencia reactiva inductiva consumida por la carga [var].

Si se cierra el interruptor S, la batería presenta un consumo de reactiva igual a 3 veces la potencia reactiva consumida por uno de los condensadores. Dado que los condensadores se conectan en estrella,

$$Q_{1C} = -\frac{U_a^2}{\frac{1}{\omega C}} = -\omega C U_a^2 = -\omega C \frac{U_{AB}^2}{3} \quad (2.57)$$

y por tanto, la potencia total será,

$$Q_C = -\omega C U_{AB}^2 \quad (2.58)$$

El nuevo FP' será,

$$FP' = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q + Q_C)^2}} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + (Q - \omega C U_{AB}^2)^2}} \quad (2.59)$$

A partir de la expresión anterior es posible despejar el valor de C en función del FP' que pretenda obtenerse.

$$C = \frac{Q - P \sqrt{\frac{1}{FP'^2} - 1}}{\omega U_{AB}^2} \quad (2.60)$$

Dado que los condensadores forma una estrella equilibrada, es posible construir un triángulo equivalente considerando la ecuación (2.35), de forma que,

$$\bar{Z}_{CY} = \frac{\bar{Z}_{C\Delta}}{3} \quad (2.61)$$

lo que implica que,

$$\frac{1}{\omega C_Y} = \frac{1}{\frac{\omega C_{\Delta}}{3}} \quad (2.62)$$

y por tanto,

$$C_{\Delta} = \frac{C_Y}{3} \quad (2.63)$$

Es decir, para obtener el nuevo FP' es necesario conectar tres condensadores de valor C_Y en estrella o bien tres condensadores de valor C_{Δ} en triángulo.



Los catálogos de los fabricantes no suelen proporcionar la capacidad de sus condensadores sino la Q a una determinada tensión de alimentación y frecuencia. Si la tensión y/o frecuencia de utilización son diferentes a las especificadas en el catálogo, debe recalcularse la nueva Q .

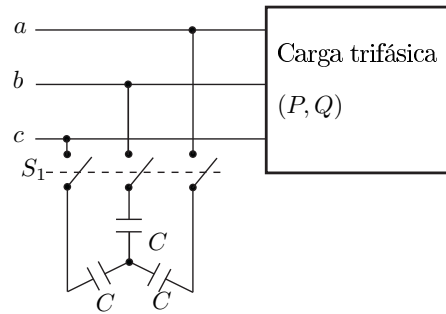


Figura 2.15. Corrección del FP en circuitos trifásicos.

2.12. Análisis de los circuitos trifásicos desequilibrados

El análisis de circuitos trifásicos desequilibrados presenta como rasgo diferenciador frente al caso de circuitos equilibrados, el hecho de que produce un desplazamiento del neutro N' en las cargas conectadas en estrella. Se analiza, a continuación, el desplazamiento de neutro que se produce en una carga trifásica desequilibrada conectada en estrella. Para no perder generalidad, es posible transformar una carga desequilibrada con conexión en triángulo en estrella antes de proceder al análisis.

El análisis de la tensión $\bar{U}_{N'N}$ se realiza sobre el circuito de la figura 2.16.

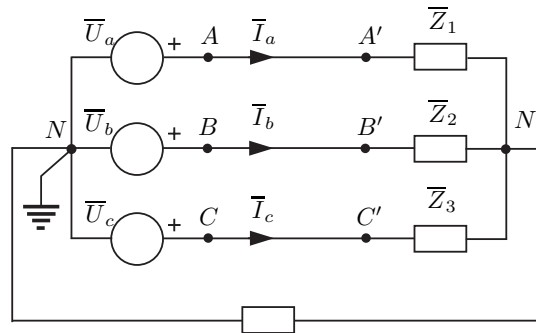


Figura 2.16. Circuito trifásico independiente.

En el circuito de la figura 2.16 se ha considerado que el conductor de neutro presenta una impedancia genérica \bar{Z}_N . Los conductores de fase tienen una impedancia despreciable, si bien esto no supone una pérdida de generalidad, ya que la impedancia de los mismos puede considerarse asociada a la impedancia de cada una de las ramas de la estrella. Las intensidades se obtienen a partir de las expresiones siguientes,

$$\bar{I}_a = \frac{\bar{U}_{AN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_1} \quad (2.64)$$

$$\bar{I}_b = \frac{\bar{U}_{BN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_2} \quad (2.65)$$

$$\bar{I}_c = \frac{\bar{U}_{CN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_3} \quad (2.66)$$

La intensidad del conductor de neutro es,

$$\bar{I}_N = \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_N} \quad (2.67)$$

Aprovechando el lema de Kirchoff que establece que la suma de intensidades en un nudo debe ser nula,

$$\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = \bar{I}_N \quad (2.68)$$

$$\frac{\bar{U}_{AN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{U}_{BN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{U}_{CN} - \bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_3} = \frac{\bar{U}_{N'N}}{\bar{Z}_N} \quad (2.69)$$

y despejando la tensión $\bar{U}_{N'N}$

$$\frac{\bar{U}_{AN}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{U}_{BN}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{U}_{CN}}{\bar{Z}_3} = \bar{U}_{N'N} \left(\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_N} \right) \quad (2.70)$$

$$\bar{U}_{N'N} = \frac{\frac{\bar{U}_{AN}}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{U}_{BN}}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{U}_{CN}}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{1}{\bar{Z}_N}} = \frac{\bar{U}_{AN}\bar{Y}_1 + \bar{U}_{BN}\bar{Y}_2 + \bar{U}_{CN}\bar{Y}_3}{\bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 + \bar{Y}_N} \quad (2.71)$$

Una vez conocida la tensión de desplazamiento del neutro N' , es posible calcular las diferentes tensiones de fase en la carga.



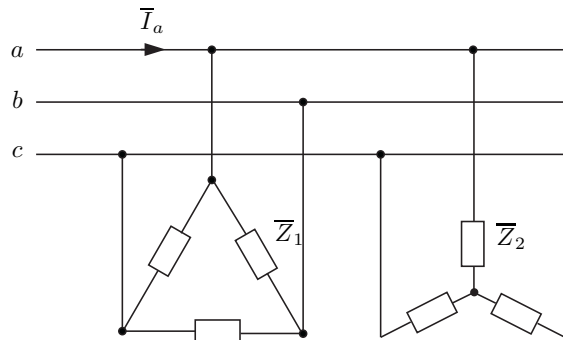
La conexión de cargas monofásica en estrella sin neutro resulta desaconsejable ya que la apertura de uno de los conductores de fase provocaría un desplazamiento del neutro, dando lugar a una posible sobretensión en una de las otras dos fases restantes.

2.13. Ejercicios

1. Tres impedancias iguales de valor $\bar{Z} = 10 + j5$ están conectadas en estrella a una red trifásica simétrica a 4 hilos de tensión compuesta 400 V. Se pide: a) Obtener la expresión fasorial de las intensidades en cada una de las ramas de la carga y en el conductor de neutro si se considera la tensión simple en la fase a (\bar{U}_a) como fasor de referencia; b) Repetir los cálculos del apartado (a) si se corta el conductor de la fase b. NOTA: Considerar todas las intensidades como entrantes hacia la carga.

2. Una red trifásica simétrica de cuatro hilos de tensión 400 V alimenta una carga trifásica desequilibrada que presenta las siguientes impedancias: i) Entre la fase a y el neutro una $\bar{Z}_a = 10 + j5$; ii) Entre la fase b y el neutro una $\bar{Z}_b = 10 - j5$; iii) Entre la fase c y el neutro una $\bar{Z}_c = 10$. Se pide: a) Obtener los fasores de intensidad en los conductores de línea para las tres fases y el conductor de neutro si se considera la tensión simple en la fase a (\bar{U}_a) como fasor de referencia.

3. Una red trifásica simétrica de tensión 400 V alimenta un conjunto de cargas trifásicas equilibradas, tal como se muestra en la figura adjunta. Se pide: a) Obtener el valor de la intensidad \bar{I}_a si se considera la tensión simple en la fase a (\bar{U}_a) como fasor de referencia. NOTA: $\bar{Z}_1 = 30 + j30$ $\bar{Z}_2 = 10 - j10$

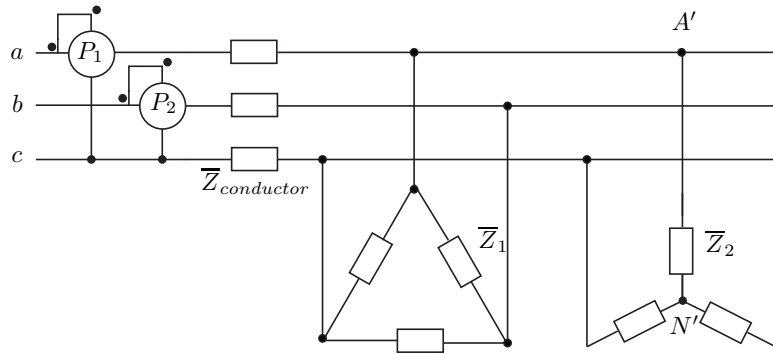


4. Una carga trifásica equilibrada conectada en estrella tiene una impedancia por rama $\bar{Z}_1 = 10 + j10$. Si la tensión de alimentación es simétrica de 400 V, obtener: a) FP de la carga; b) Valor de los condensadores necesarios para construir un grupo de compensación en estrella que mejore el FP hasta la unidad.

5. Una instalación alimentada por una red trifásica simétrica de 400 V, 50 Hz, alimenta un conjunto de cargas trifásicas equilibradas formado por: i) Motor trifásico de potencia 10 kW, $FP=0,8$ (i) y $\eta = 70\%$; ii) Grupo de iluminación de 5 kW, $FP = 1$ y iii) Tres ordenadores conectados en estrella. Cada ordenador consume 500 VA con un $FP=0,9$ (c). Se pide: a) Potencias activa y reactiva total consumidas por la instalación; b) Módulo de la intensidad de línea en los conductores que conectan el conjunto de cargas con la red; c) Capacidad por fase de una batería de condensadores conectados en triángulo que eleven el FP del conjunto a la unidad.

6. La instalación de la figura está formada por: i) Una carga resistiva conectada en triángulo con una potencia total de 30 kW y $FP=1$; ii) Una carga conectada en estrella formada por tres ordenadores, cada uno de ellos con un consumo de 500 W y $FP=0,9$ (c). $\bar{Z}_{conductor} = 1 + j4$.

Se pide: a) Valor de las impedancias \bar{Z}_1 y \bar{Z}_2 ; b) Obtener las intensidades de línea \bar{I}_a , \bar{I}_b e \bar{I}_c en el punto de conexión de la instalación a la red, considerando la tensión simple en la fase a de la carga ($\bar{U}_{A'N'}$) como fasor de referencia; c) Tensión de línea en (a,b,c) d) Lecturas de los vatímetros P_1 y P_2 ; e) Realizar el balance de potencias activa y reactiva en la instalación. NOTA: Considerar que la tensión de línea en las cargas es igual a 400 V. Considerar $\bar{U}_{A'N'}$ como el fasor de referencia.



2.14. Soluciones

1. a) $\bar{I}_a = 20,57 \angle -26,57^\circ$, $\bar{I}_b = 20,57 \angle -146,57^\circ$, $\bar{I}_c = 20,57 \angle 93,43^\circ$ e $\bar{I}_n = 0$; b) $\bar{I}_a = 20,57 \angle -26,57^\circ$, $\bar{I}_b = 0$, $\bar{I}_c = 20,57 \angle 93,43^\circ$ e $\bar{I}_n = 20,57 \angle -146,57^\circ$
2. a) $\bar{I}_a = 20,57 \angle -26,57^\circ$, $\bar{I}_b = 20,57 \angle -93,44^\circ$, $\bar{I}_c = 23 \angle 120^\circ$ e $\bar{I}_n = 11,33 \angle 120^\circ$
3. a) $\bar{I}_a = 23 \angle 0^\circ$
4. a) $FP = 0,71(i)$; b) $C = 159,15 \mu F$
5. a) $P = 20,64 \text{ kW}$, $Q = 10,06 \text{ kvar}$; b) $I_L = 33,14 \text{ A}$; c) $C = 66,71 \mu F$
6. a) \bar{Z}_1 es una resistencia de valor 16Ω , \bar{Z}_2 es una impedancia formada por el paralelo de una resistencia de $106,67 \Omega$ y un condensador de $14,45 \mu F$; b) $\bar{I}_a = 45,48 \angle 1,32^\circ$, $\bar{I}_b = 45,48 \angle -118,68^\circ$, $\bar{I}_c = 45,48 \angle 121,32^\circ$; c) $\bar{U}_{ab} = 327,96 \angle 63,90^\circ$, $\bar{U}_{bc} = 327,96 \angle -56,12^\circ$, $\bar{U}_{ca} = 327,96 \angle 183,90^\circ$; d) $P_1 = 25807 \text{ W}$, $P_2 = 11897 \text{ W}$; e) $P_T = 37705 \text{ W}$, $Q_T = 24093 \text{ var}$