CAPITULO 8. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

8.1. La transformada de Laplace

Definición 1 .Sea f (t) una función definida para t ≥ 0. Se define la transformada de Laplace de f (t) de la forma

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\,t}\ f(t)dt$$

s es un parámetro real tal que esta integral sea convergente

8.2. Tabla de transformadas de Laplace

f(t)	L[f(t)]	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	s > 0
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	s >0
$e^{a\,t}$	$\frac{1}{s-a}$	s >a
Sen at	$\frac{a}{s^2+a^2}$	s >0
Cos at	$\frac{s}{s^2+a^2}$	s >0
Shat	$\frac{a}{s^2-a^2}$	s > $\lvert a \rvert$
Chat	$\frac{s}{s^2-a^2}$	s > $\lvert a \rvert$

Definición 2 .Una función es continua a trozos en un intervalo $a \leq t \leq b$, si es posible partir dicho intervalo en un numero finito de subintervalos de tal manera que la función sea continua en cada uno de ellos y tenga limite a la izquierda y derecha

Definición 3 .Una función se dice de orden exponencial γ cuando $t \to \infty$, si existen constantes reales , $M > 0$ y γ tales que para $\forall\, t > N$ se verifica

$$|f(t)| < M\, e^{\gamma\, t}$$

$$f(t) = t^2 \quad \text{, es de orden exponencial 3, } |t^2| = t^2 < e^{3\,t} \text{ , } \forall\, t > 0$$

$f(t) = t^3$ es de orden exponencial ya que

$$e^{\gamma\, t} = 1 + \frac{\gamma\, t}{1!} + \frac{(\gamma\, t)^2}{2!} + \frac{(\gamma\, t)^3}{3!} + \ldots.$$

Para $\gamma > 0$, de donde se obtiene $t^3 < \frac{6\, e^{\gamma\, t}}{\gamma^{\,3}}$. Por tanto t^3 es de orden exponencial con $\gamma > 0$

Teorema 1. Condiciones suficientes para que exista la transformada de Laplace

Se demuestra que si f (t) es continua a trozos en cada intervalo finito $0 \leq t \leq N$, de orden exponencial γ $\forall\, t > N$, entonces existe la transformada de Laplace, $\forall\, s > \gamma$

8.3. Transformada inversa de Laplace

Definición 4 . Si L[f(t)]=F(s) , entonces f(t) es la transformada inversa de Laplace y la expresamos por

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$$

la transformada de Laplace de la función nula N(t) es cero , por tanto si

$$L\,[f\,(t)] = F(s)$$

Entonces

$$L[f(t)+N(t)]=F(s)$$

Por tanto puede haber dos funciones diferentes con la misma transformada de Laplace

Ejemplo 1.Sean las funciones

$$\boldsymbol{f_1(t) = e^{-3\,t}} \;\;,\;\; \boldsymbol{f_2\,(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{t = 1} \\ \boldsymbol{e^{-3\,t}} & \boldsymbol{t = otra\,forma} \end{cases}$$

Si consideramos las funciones nulas la transformada inversa de Laplace no es única Sin embargo, es única cuando se trabaja con funciones no nulas. Las funciones nulas no tienen interés físico

8.4. Propiedades de la transformada de Laplace

8.4.1. Propiedad de linealidad. Supongamos que L $[f_1(t)]=F_1(s)$, que L $[f_2\,(t)]=F_2(s)$ y sean c_1, c_2 constantes . Entonces se verifica

$$L[c_1\, f_1(t)+c_2\, f_2(t)]=c_1\, L[f_1(t)]+ c_2\, L[f_2(t)]= c_1\, F_1(s)+c_2\, F_2(s)$$

Ejemplo 1. Calcular

$$\boldsymbol{L}[\,\boldsymbol{4\, e^{5\,t} + 6\, t^3}\text{-}3 \text{ sen } 4\, t+ 2 \cos 2\, t] = \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{s-5}} + \frac{\boldsymbol{36}}{\boldsymbol{s^4}} - \frac{12}{s^2+16} + \frac{2\,s}{s^2+4}$$

8.4.2. Primera propiedad de la traslación Si L[f(t)]=F(s) , entonces se verifica

$$\boldsymbol{L}[\;\mathbf{e}^{\mathbf{a\,t}}\, f(t)] = F(s-a)$$

Ejemplo 2. Calcular

$$\boldsymbol{L}\left[\,\boldsymbol{t^2} e^{3t}\,\right] = \frac{2}{(s-3)^2} \quad , \; \boldsymbol{L}[\;e^{-2\,t}\, sen\, 4t] = \frac{4}{(s+2)^2+16}$$

8.4.3. Segunda propiedad de la traslación. Si L [f(t)]=F(s) y

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

Se verifica: $L[g(t)] = e^{-a\,s} F(s)$

Ejemplo 3. Sea $\boldsymbol{g(t)} = \begin{cases} \boldsymbol{(t-2)^3} & \boldsymbol{t > 2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{t < 2} \end{cases}$

Sabemos que: L $[t^3] = \frac{3!}{s^4}$. Por tanto $L[g(t)] = e^{-2\,s}\ \frac{6}{s^4}$

8.4.4. Propiedad del cambio de escala. Si L [f (t)]=F(s), se verifica

$$L[f(a\,t)] = \frac{1}{a}\ \mathrm{F}\left(\frac{s}{a}\right)$$

8.4.5. Transformada de Laplace de las derivadas Si L[f(t)]=F(s) , se verifica

$$L[f'(t)] = s\,F(s) - f(0) \qquad (1)$$

siendo f(t) continua para $0 \le t \le N$ y de orden exponencial γ para $t > N$, f´(t) continua a trozos en $0 \le t \le N$

Observaciones

1. Si f(t) no es continua en t = 0 , pero $\lim f(t) = f(0^+)$ existe aunque no sea igual f(0) , entonces se verifica

$$L[f'(t)] = s\,F(s) - f(0^+)$$

2. Si f (t) deja de ser continua en t = a, entonces se verifica

$$L[f'(t)] = s\,F(s) - f(0) - e^{-a\,s}\{f(a+) - f(a-)\}$$

Generalizando se tiene:

$$L[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}\text{f}(0) - \; s^{n-2}\, f'(0) \ldots\ldots\ldots - s\, f^{n-2}\;(0) - f^{n-1}(0)$$

Si f (t), f´ (t),..... $f^{n-1}(t)$ son continuas para 0≤ t ≤ N y de orden exponencial para t > N , además , $f^n(t)$ es continua a trozos para 0≤ t ≤ N

8. 4. 6. Transformada de Laplace en integrales Si L [f(t)]=F(s) , entonces se verifica

$$L[\int_0^t f(u)du] = \frac{F(s)}{s}$$

Ejemplo 4.Calcular

$$\boldsymbol{L[\int_0^t sen\, 2\, u\, du] = \frac{2}{s(s^2+4)}}$$

8.4.7. Multiplicación por potencias de t. Si L [f (t)]=F(s), entonces se verifica

$$L[t^n f(t)] = (-1\,)^n \;\; F^n(s) \qquad , n = 1\,, 2{,}3 \ldots\ldots$$

Ejemplo 5. Calcular L [t sen a t]

Sabemos que: L [sen at] = $\frac{a}{s^2+a^2}$

Por tanto: $L[\; t\; sen\; at\;] = (-1)^n \;\; \frac{d}{ds}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right] = \frac{2\;a\,s}{(s^2+a^2)^2}$

8.4.8. División por t. Si L [f (t)]=F(s). Entonces se verifica

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_0^\infty F(u)du$$

Ejemplo 6. Calcular $\int_0^\infty \frac{sen\;t\;\;dt}{t} = \frac{\pi}{2}$

$$L\left[\frac{sen\;t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{ds}{s^2+1} = [arcotang\; s]_s^\infty = \frac{\pi}{2}\text{-arc tang s=arc tang } \frac{1}{s}$$

8.5. Teoremas del valor inicial y final

8.5.1. Teorema del valor inicial

$$\boldsymbol{lim\, f(t)_{t\to 0} = lim\ \ s\ \ F\ (s)_{s\to\infty}}$$

8.5.2. Teorema del valor final.

$$\lim f(t)_{t\to\infty} = \lim\ \ s\, F(s)_{s\to 0}$$

Ejemplo 7. Demostrar que $\boldsymbol{L[t^n]= \frac{\gamma(n+1)}{s^{p+q}}}$, $\boldsymbol{si\, n > -1\, ,\ s > 0}$

$$\boldsymbol{L[t^n]=\int_0^\infty e^{-s\,t}\ t^n\ dt}$$

Cambio: s t = u

$$\boldsymbol{\int_0^\infty e^{-u}\ \left(\frac{u}{s}\right)^n\ \frac{du}{s} = \frac{\gamma(n+1)}{s^{n+1}}}$$

Ejemplo 8. Calcular $L\left[\, t^{\frac{-1}{2}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$, s > 0

Haciendo $t = \frac{-1}{2}$ en la expresión anterior .La función $f(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ no satisface las condiciones suficientes de la transformada de Laplace, sin embargo la transformada de Laplace existe

Ejemplo 9. Demostrar que $\boldsymbol{L\left[\int_0^t \frac{sen\, u}{u}\ du\right] = \frac{1}{s} arco\ tang\ \frac{1}{s}}$

Sea: $f(t) = \int_0^t \frac{sen\, u}{u}\ du$

$$f'(t) = \frac{sen\ t}{t}\ ,\ \ f(0) = 0\ \ , sen\ t = f'(t)\ t$$

$$l \qquad L[f'(t)\ t] = L[sen\ t]$$

$$(-1)\ \frac{d}{ds}[\ s\, F(s) - f(0)] = \frac{1}{s^2+1}$$

Integrando

$$\frac{d}{ds}[\, s\, F(s)] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$s\, F(s) = -arco\ tang\ s + C$$

Por el teorema del valor inicial

$$\lim s\, F(s)_{s\to\infty} \;=\; -\frac{\pi}{2} + C = \lim f(t)_{t\to 0} = f(0) = 0$$

$$s\, F(s) = -arco\ tang\ s + \tfrac{\pi}{2} = arco\ tang\ \tfrac{1}{s}$$

$$F(s) = \frac{1}{s}\, arco\ tang\ \frac{1}{s}$$

Ejemplo 10. Calcular $\int_0^\infty t\, e^{-2\,t} \cos t\, dt$

$$L[\, t \cos t] = (-1)\ \tfrac{d}{ds}[\tfrac{s}{s^2+1}] = \tfrac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-s\,t}\ t \cos t\, dt = L[\, t\cos t] = \frac{s^2\ -1}{(\, s^2+1)^2}$$

Para s = 2, se obtiene $\int_0^\infty e^{-2\,t}\ t\cos t\ dt = \frac{3}{25}$

8.6. Función escalón de Heaviside y función delta de Dirac

La función escalón de Heaviside se define como

$$H(t-t_0) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Esta función nos permite expresar en forma compacta las funciones que son cero para $\forall$t a la izquierda de t_0 . Por tanto para cualquier función f(t) se tiene

$$f(t)H(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ f(t) & t\geq t_0\end{cases}$$

Por tanto la función $H(t-t_0)$ puede ser interpretada como un mecanismo para que la función entre en funcionamiento para $t=t_0$

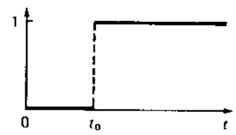

Fig.1.Función escalón Heaviside

Las funciones periódicas se pueden representar por una serie de términos que implican funciones escalón, por ejemplo

$$\sum_{0}^{\infty}\{H(t-2\,n)-H(t-2n-1)\}\equiv H(t)-H(t-1)+H(t-2)-\cdots\ldots$$

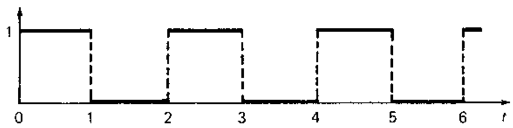

Fig.2.Gráfica de H(t)-H(t-1)+H(t-2)-H(t-3)+……..

Se define la función delta de Dirac como

$$\delta_\epsilon\,(\boldsymbol{t})=\begin{cases}\mathbf{0} & -\infty<\boldsymbol{t}<\mathbf{0}\\ \dfrac{\mathbf{1}}{\epsilon} & \mathbf{0}\ <\boldsymbol{t}<\epsilon\\ \mathbf{0} & \epsilon\ <\boldsymbol{t}<\infty\end{cases}$$

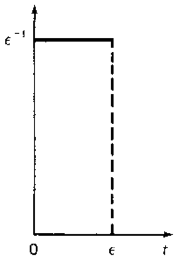

Fig.3.Gráfica de $\delta_\epsilon(t)$

La definición implica que $\delta(t)$ *es infinito en* $t = 0$ *siendo cero en cualquier otro punto* . La función $\delta(t)$ no es una función en el sentido usual, pero la Fig.3 la hace más comprensible.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t)dt = \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon}\,\mathrm{dt} = 1$$

Vamos a ver una importante propiedad de la función delta de Dirac, dada una función f(t) continua en t = a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)f(t)dt = f(a) \qquad (1)$$

Si ponemos a=0 y f(t)=1 , se obtiene también

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

Un resultado equivalente a la ecuación (1) es

$$\int_{a-\eta}^{a+\eta} \delta(t-a)f(t)dt = f(a)$$

Siendo η cualquier numero positivo

Se define la función

$$\delta_\varepsilon(t-a) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} & 0 \le t-a < \varepsilon \\ 0 & t < a \quad , t \ge a+\varepsilon \end{cases}$$

Veamos se transformada de Laplace

$$L[\delta_\epsilon(t-a)] = \int_0^a 0\, dt + \int_a^{a+\epsilon} e^{-s\,t}\,\frac{1}{\epsilon}\, dt + \int_{a+\varepsilon}^{\infty} 0\, dt = \frac{1}{\varepsilon\, s}[e^{-a\,s} - e^{-s(a+\varepsilon)}]$$

Se puede definir L [δ] de la siguiente forma

$$\delta(t-a) = \lim \delta_\epsilon(t-a)\ _{\epsilon\to 0^+}$$

Entonces

$$L[\delta(t-a)] = \lim L[\,\delta_\varepsilon\,(t-a)]_{\epsilon\to 0^+} = \lim \frac{e^{-a\,s}\,(1-e^{-\epsilon\,s})}{\epsilon\,s} = e^{-a\,s}$$

Cuando a = 0, se tiene la función δ de Dirac. Por tanto

$$L[\delta(t)]=1$$

8.7. Tabla de transformadas inversas de Laplace

F(s)	$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{1}{s^2}$	t
$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$
$\frac{1}{s-a}$	$e^{a\,t}$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{sh\ at}{a}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	Chat

8.8. Propiedades de la transformada inversa de Laplace

8.8.1. Propiedad de linealidad

$$\boldsymbol{L^{-1}\,[c_1\;F_1(s)+c_2\;F_2(s)] = c_1\,f_1(t)+c_2\,f_2(t) = c_1\,L^{-1}\,(s)+\;c_2\,L^{-1}\,(s)+}$$

Ejemplo 11. Calcular

$$\boldsymbol{L^{-1}\left[\frac{5\,s+4}{s^3} - \frac{2\,s-18}{s^2+9} + \frac{24-30\,\sqrt{s}}{s^4}\right] = L^{-1}[\frac{5}{s^2}+\frac{4}{s^3}-\frac{2\,s}{s^2+9}+\frac{18}{s^2+9}+\frac{24}{s^3}-\frac{30\,\sqrt{s}}{s^4}\;]=}$$

$\mathbf{5\,t + 4\,(\frac{t^2}{2!}) - 2\cos 3\,t + 18\,(\frac{1}{3}\,sen\,3\,t) + 2\,4\,\left(\frac{t^3}{3!}\right) + 30\,t^{\frac{5}{2}}\,\gamma(\frac{7}{2}) = 5\,t + 2\,t^2 - 2\,cos\,3\,t + 6\,sen\,3\,t + 4\,t^3 -}$

$\mathbf{-16\,t^{\frac{5}{2}}\sqrt{\pi}}$

8.8.2. Primera propiedad de la traslación. Si L [f (t)]=F(s) y L[$e^{a\,t}f(t)$]=F(s-a) entonces se verifica

$$L^{-1}[F(s-a)] = e^{a\,t}\,f(t)$$

8.8.3. Segunda propiedad de la traslación. Si

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a) & si \quad t > a \\ 0 & si \quad t < a \end{cases}$$

y se verifica L[g(t)]=F(s-a), entonces se tiene L^{-1} [F(s-a)]=g(t)

8.8.4. Propiedad del cambio de escala. Si $L[f(a\,t)] = \frac{1}{a}$ F ($\frac{s}{a}$) entonces se verifica

$$L^{-1}[\,\frac{1}{a}\ F\,(\frac{s}{a})] = f(a\,t)$$

8.8.5. Transformada inversa de las derivadas. Si

$$L[t^n\,f(t)] = (-1)^n\ \frac{d^n}{ds^n}\ F(s) = (-1)^n\ F^n(s)$$

Entonces se verifica

$$L^{-1}[F^n(s)] = (-1)^n\ t^n\ f(t)$$

8.8.6. Transformada inversa de integrales. Si

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)du$$

Entonces se verifica

$$L^{-1}[\,\int_s^{\infty} F(s)ds] = \frac{f(t)}{t}$$

8.9. Teorema de la convolución

Sean f (t) y g (t) dos funciones definidas en $[0,\infty)$ .Las convolución de f y g es la función definida por

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \qquad , \qquad t\geq 0$$

El teorema de la convolución nos dice que la transformada de Laplace de la convolución de dos funciones, es el producto de las transformadas de Laplace de las funciones

Teorema 2. Sea L [f (t)] =F(s) y L[g(t)]=G(s) . Se demuestra que

$$L[f * g] = F(s) . G(s)$$

8.10. Métodos para hallar la transformada inversa de Laplace

8.10.1. Método de las fracciones parciales

Sea la función $\frac{P(S)}{Q(s)}$, siendo grado P(s) < grado Q(s), entonces esta función se puede escribir como una suma de funciones racionales del tipo

$$\frac{A}{(a\,s+b)^r} \quad , \quad \frac{A\,s+B}{(as^2+b\,s+c)^r} \qquad r = 1, 2, 3\ldots.$$

Al calcular la transformada inversa de Laplace, se obtiene

$$L^{-1}[\frac{P(s)}{Q(s)}]$$

Ejemplo 12. Calcular

$$\frac{2\,s-5}{(3\,s-4)(2\,s+1)^3} = \frac{A}{(3s-4)} + \frac{B}{(2\,s+1)^3} + \frac{C}{(2\,s+1)^2} + \frac{D}{(2\,s+1)}$$

$$\frac{3\,s^2-4\,s+2}{(s^2+2\,s+4)^2(s-5)} = \frac{A\,s+B}{(s^2+2\,s+4)^2} + \frac{Cs+D}{(s^2+2\,s+4)} + \frac{E}{s-5}$$

8.10.2. Formula de Heaviside

Sea Q(s) es un polinomio con n ceros diferentes α_1, α_2….. α_n podemos poner

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{A_1}{(s-\alpha_1\ )}+\ \frac{A_2}{(s-\alpha_2\ )}+\cdots\ldots\ldots\ldots+\frac{A_n}{(s-\alpha_n\ )}$$

Multiplicando ambos miembros por $(s-\alpha_{k)}$, haciendo que $s\to\alpha_k$, y aplicando L ´Hospital

$$A_k=\lim_{s\to\alpha_k}\frac{P(s)}{Q(s)}\ (\mathrm{s}-\alpha_k)=\lim_{s\to\alpha_k}P(s).\lim\frac{(s-\alpha_k\ )}{Q(s)}=\lim P(s)\lim\frac{1}{Q'(s)}=\frac{P(\ \alpha_k)}{Q'(\alpha\ _k)}$$

Por tanto

$$\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{P(\alpha_1)}{Q\prime(\alpha_1)(s-\alpha_1)}+\ \frac{P(\alpha_2)}{Q\prime(\alpha_2)}\frac{1}{(s-\alpha_2)}+\ldots\ldots\ldots.+\frac{P(\alpha_n)}{Q'\ (\alpha_n\ )(s-\alpha_n)}$$

Finalmente

$$L^{-1}\left[\ \frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\ \frac{P(\alpha_1)}{Q\prime(\alpha_1)}\ e^{\alpha_1\,t}\ +\cdots\ldots\ldots\ldots.+\ \frac{P(\alpha_n)}{Q(\alpha_n)}\ e^{\ \alpha_n t}$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular L^{-1} $\left[\ \frac{2\,s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}\right]$

$$P(s)=\ 2\,s^2-4\ \ \ ,Q(s)=s^3-4\,s^2+6\ \ ,Q'(s)=3\,s^2-8\,s+1$$

$$\alpha_1=-1\ ,\ \ \alpha_2=2\ \ ,\ \ \ \alpha_3=3\ .$$

Transformada inversa

$$L^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)}\right]=\frac{P(-1)}{Q\prime(-1)}e^{-t}+\frac{P(2)}{Q\prime(2)}e^{2\,t}+\frac{P\prime(3)}{Q\prime(3)}e^{3\,t}$$

2. Calcular L^{-1} $\left[\ \frac{(3\,s+1)}{(s-1)(\ s^2+1)}\right]$

$$\boldsymbol{\alpha_1=1}\ \ ,\boldsymbol{\alpha_2}=\mathbf{i}\ \ \ ,\boldsymbol{\alpha_3}=\mathbf{-\ i}$$

$$\boldsymbol{P(s) = 3\,s+1\ ,Q(s) = \ s^3 - s^2 + s - 1\ ,Q'(s) = 3\,s^2 - 2\,s + 1}$$

$$A_1 = \frac{P(1)}{Q\prime(1)} = 2 \quad , A_2 = \frac{P(i)}{Q\prime(i)} = \frac{1+3\,i}{-2-2\,i} \quad , A_3 = \frac{P(-i)}{Q\prime(-i)} = \frac{1-3\,i}{-2+2\,i}$$

$$L^{-1}\left[\frac{(3\,s+1)}{(s-1)(\,s^2+1)}\right] = 2\,e^t + \frac{1+3\,i}{-2-2\,i}\,e^{i\,t} + \frac{1-3\,i}{-2+2\,i}\,e^{-i\,t}$$

3. Demostrar por el teorema de la convolución que $\boldsymbol{B(p,q) = \frac{\gamma(p)\gamma(q)}{\gamma(p+q)}}$

Sabemos que

$$\boldsymbol{B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}dx}$$

Consideremos la función

$$\boldsymbol{g(t) = \int_0^t x^{p-1}\,(t-x)^{q-1}\mathrm{dx}}$$

Apliquemos el teorema de la convolución

$$\boldsymbol{L[g(t)] = L[t^{p-1}]\,L[t^{q-1}\,] = \frac{\gamma(p)\gamma(q)}{s^p\,s^q} = \frac{\gamma(p+q)}{s^{p+q}}}$$

Aplicando L^{-1}

$$\boldsymbol{L^{-1}\left[\frac{\gamma(p)\gamma(q)}{s^{p+q}}\right] = \frac{\gamma(p)\gamma(q)}{\gamma(p+q)}t^{p+q+1} = B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}dx}$$

Para t = 1, se tiene la demostración

4. Resolver el sistema

$$\boldsymbol{\begin{cases} t\,y + z + t\,z' = (t-1)\,e^{-t} \\ \\ y' - z = e^{-t} \end{cases}}$$

con las condiciones y (0)=1 , z(0)= - 1

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene el sistema

$$-Y'(s) - s\,Z'(s) = \frac{-s}{(s+1)^2} \quad (1)$$

$$s\,Y(s) - Z(s) = \frac{s+2}{s+1} \qquad (2)$$

De la ecuación (2) se tiene

$$Z(s) = s\,Y(s) - \frac{s+2}{s+1} \Rightarrow Z'(s) = Y(s) + s\,Y'(s) + \frac{1}{(s+1)^2}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

$$Y'(s)[1+s^2] = -s\,Y(s)$$

Integrando la ecuación diferencial se obtiene

$$Y(s) = \frac{C}{\sqrt{1+s^2}}$$

Aplicando el teorema del valor inicial

$$\lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s\,C}{\sqrt{1+s^2}} = C = \lim_{t\to 0} f(t) = 1 = C$$

$$Y(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1+s^2}}\right] = y(t) = J_0(t)$$

$$z(t) = y'(t) - e^{-t} = [J_0(t)]' - e^{-t} = -J_1(t) - e^{-t}$$

5. Resolver el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{2\,x' + 3\,x - 4\,y + z = 0} \\ \mathbf{y' + x - z = 0} \\ \mathbf{2\,z' - 3\,x + 12\,y - 9\,z = 0} \end{cases}$$

con las condiciones x (0) =1 , y (0) = 0 , z (0)=1

$$\mathbf{(2s+3)X(s) - 4\,Y(s) + Z(s) = 2}$$
$$\mathbf{X(s) + s\,Y(s) - Z(s) = 0}$$
$$\mathbf{-3\,X(s) + 12\,Y(s) + (2\,s - 9)Z(s) = 2}$$

$$X(s) = \frac{s^2\ -5\,s+8}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} = \frac{4}{s} - \frac{4}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$
$$Y(s) = \frac{8}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} = \frac{4}{s} - \frac{8}{s-1} + \frac{4}{s-2}$$
$$Z(s) = \frac{s^2\ +3\,s+8}{s(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} = \frac{4}{s} - \frac{12}{s-1} + \frac{9}{s-2}$$

Calculando la transformada inversa de Laplace se tiene

$$x(t) = 4 - 4\,e^{t} + e^{2\,t}$$
$$y(t) = 4 - 8\,e^{t} + 4\,e^{2\,t}$$
$$x(t) = 4 - 12\,e^{t} + 9\,e^{2\,t}$$

6. Calcular $\int_0^\infty \boldsymbol{e^{-x^2}\,dx}$

Sea g (t) la función

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-t\,x^2}\,dx$$

$$L[g(t)] = \int_0^\infty e^{-s\,t}\ dt\ \int_0^\infty e^{-t\,x^2}\ \mathrm{dx} = \int_0^\infty dx\ \int_0^\infty e^{-s\,t}\,e^{-t\,x^2}\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^\infty L\left[e^{-t\,x^2}\right]dx = \int_0^\infty \frac{dx}{s+x^2} = \frac{1}{\sqrt{s}}\ \frac{\pi}{2}$$

$$L^{-1}[G(s)] = g(t) = L^{-1}\left[\frac{\pi}{2}\ \frac{1}{\sqrt{s}}\right] = \frac{\pi}{2}\ \ t^{\frac{-1}{2}}$$

Para t =1, se obtiene la integral pedida

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

7. Calcular aplicando el teorema de la convolución $\boldsymbol{L^{-1}}\ [\frac{\boldsymbol{s}}{(\boldsymbol{s^2+a^2})^2}\ \boldsymbol{]}$

Sea

$$\frac{s}{(\boldsymbol{s^2} + \boldsymbol{a^2})^2} = \frac{s}{s^2 + a^2} + \frac{1}{s^2 + a^2}$$

Ahora bien como

$$L^{-1}\ \left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos a\ t \quad , \quad L^{-1}[\frac{1}{s^2+a^2}] = \frac{sen\ a\ t}{a}$$

$$L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)}] = \int_0^t \cos a\ u\ \ \frac{sen\ a(t-u)}{a}\ du$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^t \cos a\ u\ \ sen\ (a\ t - a\ u)du = \frac{t\ sen\ a\ t}{2\ a}$$

8. Calcular aplicando el teorema de la convolución $\boldsymbol{L^{-1}}\ [\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{s^2(s^2+1)^2}}]$

Sabemos que

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = t\ ,\ L^{-1}\ [\frac{1}{(s+1)^2}] = t\ e^{-t}$$

$$L^{-1}\ \left[\frac{1}{s^2\ (s+1)^2}\right] = \int_0^t (u\ e^{-u})\ \ (t-u)du = t\ \ e^{-t} + 2\ e^{-t}\ \text{+t-2}$$

9. Resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{x'' + y' + 3\ x = 15\ e^{-t}} \\ \boldsymbol{y'' - 4\ x' + 3\ y = 15\ sen\ 2t}\end{array}\right\}$$

con las condiciones iniciales : x(0) =35 , x´(0) = - 48 , y(0) = 27 , y´(0) = - 55

$$\boldsymbol{X(s)\ (s^2+3) + Y(s)s = 3\,5\ s - 21 + \frac{15}{s+1}}$$

$$\boldsymbol{-4\ s\ X(s) + (s^2+3)Y(s) = 2\,7\ s - 195 + \frac{30}{s^2+4}}$$

$$X(s) = \frac{3\,5\ s^3 - 48\ \ s^2\ + 300\ s - 63}{(s^2+1\ )\ (s^2+9)}$$

$$Y(s) = \frac{27\, s^3 - 55\ s^2\ - 3\, s - 585}{(s^2 + 1\ )\ (s^2 + 9)}$$

Aplicando la transformada inversa

$$x(t) = 30 \cos t - 15\, sen\ 3t + 3\ e^{-t} + 2 \cos t$$

$$y(t) = 30 \cos 3t - 60\ sen\ t - 3\ e^{-t} + sen\ 2t$$

10. Resolver t $\boldsymbol{y'' + \mathbf{y}' + 4\ \mathbf{t}\ \mathbf{y} = 0}$, con las condiciones iniciales: y(0) = 0 , y´(0) = 0

$$\boldsymbol{\frac{-d}{ds}\left[s^2\ Y(s) - 3\ s\right] + s\ Y(s) - 3 - 4\ \frac{d\ Y(s)}{ds} = 0}$$

$$\boldsymbol{\frac{d\ Y(s)}{Y(s)} = -\ \frac{s\ ds}{s^2+4}}$$

Integrando esta ecuación diferencial

$$Y(s)\sqrt{s^2 + 4} = C \Rightarrow Y(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 4}}$$

Transformada inversa de Laplace

$$L^{-1}[Y(s)] = y(t) = C\ L^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{s^2+4}}\right] = C\ J_0\ (2\ t)$$

Condiciones iniciales: $y(0 = 3 = C$

$$y(t) = 3\ \ J_0(\ 2\ t)$$

11. Resolver $\mathbf{t\ y' + (4\ t - 2)y'\ - 4\ y = 0}$, condición inicial y(0) = 1

Supongamos: $y'(0) = \text{cte}$

$$\frac{d\ Y(s)}{ds}\ (-\ s^2 + 4\ s) - 4\ s\ Y(s) - 8\ Y(s) + 3 = 0$$

$$Y'(s) + \left(\frac{4\,s + 8}{s^2 + 4\,s}\right) Y(s) = \frac{3}{(s^2 + 4\,s\,)}$$

Ecuación diferencial lineal

$$Y(s) = \frac{s}{(s+4)^2} + \frac{6}{(s+4)^2} + \frac{C}{s^2(s+4)^2}$$

$$\frac{C}{s^2(s+4)^2} = \frac{K_1}{s^2} + \frac{K_2}{s} + \frac{K_3}{(s+4)^2} + \frac{K_4}{(s+4)}$$

Aplicando la transformada inversa

$$y(t) = e^{-4\,t} + 2\,t\,e^{-4\,t} + K\,[\,-1 + 2\,t + e^{-4\,t} + 2\,t\,e^{-4\,t}]$$

Siendo $K = \dfrac{C}{32}$