Tema 10 · Inferencia, distribuciones muestrales y contraste de hipótesis

Tema 10

Inferencia, distribuciones muestrales y contraste de hipótesis

En numerosas situaciones prácticas se pretenden calcular ciertos parámetros estadísticos (una proporción, media, varianza, etc.) asociados a poblaciones que son demasiado grandes para poder ser tratadas de forma exhaustiva (por ejemplo, la proporción de habitantes de un país de estatura superior a 1.60 metros, la estatura media de los habitantes de un país, etc.). Para ello es necesario recurrir a una muestra (subconjunto) de la población total y obtener *estimadores* de los estadísticos de la población. El estudio de una población a partir de sus muestras presenta dos claras ventajas: coste reducido y mayor rapidez. Por un lado el coste del proceso de recogida y tratamiento de datos resulta más barato al trabajar con una pequeña parte de la población y por otro lado el tiempo de cómputo se reduce disponiendo de los resultados en un tiempo menor. En este tema se introducen los conceptos fundamentales para trabajar con *muestras aleatorias* y se estudia el carácter aleatorio de los estadísticos asociados a este tipo de muestras así como las distribuciones asociadas para poder obtener *intervalos de confianza* para los mismos.

En cursos anteriores ha habido temas dedicados al estudio de la estadística descriptiva, al concepto de probabilidad y a las variables aleatorias y las distribuciones más comunes que permiten resolver numerosos problemas reales. En este tema tratamos el problema de la *inferencia estadística*, donde se pretende inferir propiedades de una población a partir de la observación de muestras de la misma. Este idea se aplica por ejemplo en un referendum, con los resultados del escrutinio de las primeras mesas electorales. Los porcentajes de votos obtenidos a partir de esa muestra, suelen dar una aproximación bastante buena del resultado final de las elecciones con la ventaja de que se dispone de la información muchas horas antes de que el recuento final haya terminado.

En un problema de inferencia estadística pueden tenerse distintas situaciones, dependiendo del tipo de conclusiones que se deseen obtener:

- Se pretende hallar la distribución de probabilidad asociada a una población a través del estudio de una muestra (ajuste de distribuciones).

- Se pretende obtener un pronóstico numérico único acerca de un determinado parámetro de la distribución. Este tipo de problemas corresponden al concepto de estimación puntual, que se desarrolla en este tema.
- Se pretende obtener un margen de variación para un determinado parámetro de la distribución; es decir, obtener un intervalo numérico que contenga al parámetro con una cierta probabilidad dada. En este caso hablamos de estimación por intervalos de confianza, que también desarrollamos en este tema.
- También podemos tener un tipo de problemas cuya finalidad es tratar de corroborar o invalidar una determinada hipótesis acerca de la distribución de probabilidad poblacional. Este tipo de problemas corresponden al contraste de hipótesis, que se estudiará al final de este tema.

10.1. Técnicas de Muestreo

Existen diversos métodos para obtener una muestra representativa de una cierta población. Sin embargo, para que los estudios tengan la validez y confiabilidad buscada es necesario que la muestra posea algunas características específicas que permitan, al final, generalizar los resultados. Estas características tienen que ver, principalmente, con el tamaño de la muestra (que se analizará más adelante) y la manera de obtener la muestra. La técnica de muestreo más simple se denomina *muestreo aleatorio simple*, en el que cada elemento de la población tiene la misma probabilidad de ser elegido y la distribución poblacional se mantiene invariante durante el muestreo.

Por otra parte, es importante utilizar cualquier información previa de la que se disponga para subdividir la población y simplificar el proceso de muestreo. Esto da lugar a otros tipos de muestreo como el muestreo estratificado o el sistemático. En el *muestreo estratificado* la población es dividida en estratos a los que se asigna una cuota en base al tamaño relativo o a la variabilidad de cada estrato. Por otra parte, en el *muestreo sistemático* la población se ordena y se procede a tomar los elementos correspondientes para un tamaño muestral dado.

Si se aplica cualquiera de las técnicas anteriores de forma apropiada se obtiene una *muestra aleatoria*; este concepto es de vital importancia para el posterior desarrollo del tema pues permite aplicar las herramientas estadísticas que se presentan y llevar a cabo generalizaciones válidas sobre los datos muestrales. Un conjunto de observaciones $x_1, \ldots, x_n$ constituye una muestra aleatoria de una población finita de tamaño N si se elige de tal forma que cada subconjunto de n elementos tenga la misma probabilidad de ser seleccionado. Si la población es infinita (con función de densidad $f_X(x)$), se dice que la muestra es aleatoria si los valores x_i corresponden a variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas por $f_X(x)$.

Definición 10.1 Muestra aleatoria. *Un conjunto de observaciones $x_1, \ldots, x_n$ constituye una muestra aleatoria de una población finita de tamaño N si se elige de tal forma que cada subconjunto de n elementos tenga la misma probabilidad* *de ser seleccionado. Si la población es infinita (con función de densidad $f_X(x)$), se dice que la muestra es aleatoria si cada x_i es un valor de una variable aleatoria cuya distribución está dada por $f_X(x)$.*

10.2. Estimación de una Proporción

Definición 10.2 Proporciones poblacional y muestral. *Dada una población con N individuos, de los cuales M poseen cierta propiedad que no poseen los demás, la proporción poblacional de dicha propiedad es $P = M/N$. Si de la población anterior se extrae una muestra de tamaño n, en la que aparecen m individuos con esa propiedad, entonces la proporción muestral es $p = m/n$.*

La definición anterior pone de manifiesto que la proporción poblacional es una constante, mientras que cada muestra de esta población puede tener una proporción muestral distinta. De hecho, la proporción muestral es una variable aleatoria y, por ello, es importante determinar su distribución.

10.2.1. Distribución muestral de la proporción muestral

En esta sección se considera sólo el problema de muestreo con reemplazamiento, correspondiente a poblaciones infinitas o a muestras obtenidas con reemplazamiento. En este caso, el número de individuos, m, que poseen la propiedad en la muestra es una variable aleatoria binomial (se repiten n experimentos de Bernouilli):

$$P(m) = \binom{n}{m} P^m (1-P)^{n-m} \quad si\ 0 \leq m \leq n \tag{10.1}$$

Por tanto, la media y varianza de la proporción muestral $p = m/n$ serán, respectivamente

$$E[p] = \frac{E[m]}{n} = \frac{n\,P}{n} = P \tag{10.2}$$

$$Var[p] = Var[m/n] = \frac{Var[m]}{n^2} = \frac{n\,P\,(1-P)}{n^2} = \frac{P\,(1-P)}{n} \tag{10.3}$$

De las ecuaciones anteriores puede deducirse que el valor medio de la proporción muestral coincide con la proporción poblacional y que a medida que aumenta el tamaño de la muestra la varianza disminuye y por lo tanto también disminuye la incertidumbre.

Cuando la población es finita (población de tamaño N), el muestreo con reemplazamiento ya no es válido y es necesario analizar el caso en el que las muestras se extraen sin reemplazamiento; es decir, una vez obtenido un individuo para formar parte de la muestra, no se reintegra éste a la población de partida antes de extraer el siguiente, o dicho de otra forma, no se permite que un mismo individuo aparezca más de una vez en la muestra. En este caso, el número de individuos, m, que poseen la propiedad en la muestra es una variable hipergeométrica, por lo que la media y varianza de la proporción muestral $p = m/n$ resultan:

$$E[p] = P; \quad Var[p] = \frac{N-n}{N-1}\frac{P(1-P)}{n} \tag{10.4}$$

10.2.2. Intervalos de probabilidad de una proporción

Después de haber analizado la distribución de la proporción muestral p, procedemos a calcular los intervalos (simétricos en torno a la proporción poblacional P) tales que la probabilidad de que p esté contenida en dichos intervalos sea un valor dado. Esto nos permite medir la variabilidad de la proporción muestral.

Definición 10.3 Intervalo de probabilidad. *Se dice que el intervalo* $(P-e, P+e]$ *es un intervalo para* p *con probabilidad* $1-\alpha$ *si se verifica que* $P(P-e < p \leq P+e) = 1-\alpha$. *Donde* $1-\alpha$ *se conoce como nivel de confianza y* α *es el nivel de significación.*

Los intervalos de probabilidad permanecen constantes para diferentes muestras, mientras que los valores de p varían de muestra a muestra.

Si el tamaño de la muestra es suficientemente grande, la distribución de p puede aproximarse por una distribución normal y los intervalos de probabilidad pueden obtenerse fácilmente.

$$\begin{aligned} P(P-e < p \leq P+e) &= F_{N(\mu,\sigma^2)}(P+e) - F_{N(\mu,\sigma^2)}(P-e) = \\ &= F_{N(0,1)}\left(\frac{P+e-\mu}{\sigma}\right) - F_{N(0,1)}\left(\frac{P-e-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right) - \left(1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right)\right) \\ &= 2F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right) - 1 = 1-\alpha. \end{aligned}$$

de donde

$$F_{N(0,1)}\left(\frac{e}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow e = z_{\alpha/2}\,\sigma \tag{10.5}$$

siendo $z_{\alpha/2} \equiv F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2)$. Los valores de $z_{\alpha/2}$ para los valores de $1-\alpha$ más usuales se muestran en la Tabla 10.1.

Practica con R 10.1 Los valores de $z_{\alpha/2}$ de la tabla 10.1 se pueden obtener con las siguientes órdenes de R.

```
n_conf <- 0.95
alfa_medios <- (1 - n_conf)/2
z_alfa_medios <- qnorm(1- alfa_medios,0,1)
```

La tabla 10.2 recoge los intervalos de probabilidad de una proporción al nivel $(1-\alpha)$ en el caso de muestreos con y sin reemplazamiento y las condiciones de validez de la aproximación normal considerada.

Ejemplo 10.1 *El $20\,\%$ de las rocas de una cierta explotación minera son ricas en contenido mineral. Se elige una muestra al azar de 50 rocas. Determinar un intervalo de probabilidad del $95\,\%$ para la proporción de rocas con alto contenido mineral en la muestra (simétrico respecto del valor medio).*

Por tratarse de un intervalo de probabilidad del $95\,\%$, $\alpha/2 = 0.025$, luego $z_{\alpha/2}$ vale 1.96 (ver Tabla 10.1). Por tanto, el intervalo de probabilidad pedido es

$$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}} = 0.2 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.2\times 0.8}{50}} = 0.2 \pm 0.111 \;\Rightarrow\; (0.089, 0.311).$$

Ejemplo 10.2 *La población de internados en un centro médico es de 1000 enfermos, de los cuales el $20\,\%$ padecen afecciones cardiacas. Se elige una muestra de 50 enfermos del fichero de registro. Se pide:*

1. *Determinar un intervalo de probabilidad al 0.95 de p, simétrico respecto de P, para el caso de muestreo sin reemplazamiento.*
2. *Idem con reemplazamiento.*

1. En este caso se tiene $nP = 10 > 5,\ n(1-P) = 40 > 5$ y $n/N = 0.05 < 0.9$ por lo que es válida la aproximación normal. Además, por tratarse de un intervalo de probabilidad del $95\,\%$, z_α vale 1.96. Por tanto, el intervalo de probabilidad pedido es

$$\begin{aligned} &P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{N-n}{N-1}\tfrac{P(1-P)}{n}} = \\ &= 0.2 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{1000-50}{(1000-1)}\tfrac{0.2\times(1-0.2)}{50}} = \\ &= 0.2 \pm 0.108 \qquad \Rightarrow \qquad (0.092, 0.308) \end{aligned}$$

2. Para el caso de muestreo con reemplazamiento resulta:

$$\begin{aligned} &P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{P(1-P)}{n}} = 0.2 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{0.2\times(1-0.2)}{50}} = \\ &= 0.2 \pm 0.111 \qquad \Rightarrow \qquad (0.089, 0.311) \end{aligned}$$

$1-\alpha$	$z_{\alpha/2}$
0.998	3.090
0.99	2.576
0.98	2.326
0.95	1.960
0.90	1.645
0.80	1.280

Tabla 10.1: Valores de $z_{\alpha/2}$ más usuales.

	Muestreo con reemplazamiento	Muestreo sin reemplazamiento
Intervalo	$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{P(1-P)}{n}}$	$P \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{P(1-P)}{n}}$
Condiciones	$nP > 5$ $n(1-P) > 5$	$nP > 5$ $n(1-P) > 5$ $n/N < 0.9$

Tabla 10.2: Intervalos de probabilidad de una proporción

10.2.3. Estimadores de una proporción

Estimación puntual

El problema que aparece con más frecuencia en la práctica es el de la estimación de la proporción poblacional P, que es desconocida. Para ello en la práctica sólo se suele disponer de una muestra de tamaño n. En este caso, la proporción muestral p es un buen estimador puntual de la proporción poblacional P, ya que la probabilidad de que el error cometido en la estimación $|P-p|$ sea mayor que un cierto valor fijado e tiende a cero al crecer el tamaño de la muestra n.

Por ello, para estimar puntualmente la proporción basta extraer una muestra y dar como valor de P (estimación) el valor de la proporción muestral.

Estimación por intervalos

La estimación por intervalos se utiliza para complementar la estimación puntual precisando la exactitud de la estimación; para ello se obtiene un intervalo $(a,b]$ que contenga al valor P con una cierta probabilidad o confianza.

Definición 10.4 Intervalo de confianza. *Un intervalo $(a,b]$ se dice que es un intervalo de confianza $(1-\alpha)$ de la proporción de la población (P) si se verifica que $P(a < P \leq b) = 1-\alpha$.*

Para obtener los intervalos de confianza de la proporción poblacional se parte de los intervalos de probabilidad ya estudiados. Si el intervalo $(P-e, P+e]$ es un intervalo de probabilidad $(1-\alpha)$, se tiene

Ejemplo 10.3 *En una muestra aleatoria de* 50 *rocas tomadas de una mina se observa que* 20 *de ellas son ricas en contenido mineral. Estimar puntualmente la proporción de rocas con alto contenido mineral en la mina. Calcular un intervalo de confianza* 0.95 *de esta proporción.*

El estimador puntual de la proporción poblacional es la proporción muestral $p = 20/50 = 0.4$. El intervalo de confianza vendrá dado por:

$$0.4 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0.4 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{50}} = \; = 0.4 \pm 0.1358 \;\Rightarrow\; (0.3642, 0.5358).$$

$$P(P - e < p \leq P + e) = 1 - \alpha$$

que puede escribirse también como

$$P(p - e \leq P < p + e) = 1 - \alpha$$

lo cual quiere decir que el intervalo $[p - e, p + e)$ tiene una probabilidad asociada de $1 - \alpha$. La tabla 10.3 recoge los intervalos de confianza de una proporción al nivel $(1 - \alpha)$ en el caso de muestreos con y sin reemplazamiento así como las condiciones de validez de la aproximación normal considerada.

	Muestreo con reemplazamiento	Muestreo sin reemplazamiento
Intervalo	$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{p(1-p)}{n}}$
Condiciones	$n\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) > 5$ $n\left(1 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) > 5$	$n\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{p(1-p)}{n}}\right) > 5$ $n\left(1 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\frac{p(1-p)}{n}}\right) > 5$ $n/N < 0.9$

Tabla 10.3: Intervalos de confianza de una proporción

Mientras el intervalo de probabilidad no dependía de la muestra, el intervalo de confianza dependerá de cada muestra específica. Es decir, a cada muestra le corresponde un intervalo de confianza diferente y el $100(1-\alpha)\,\%$ de las muestras dan intervalos de confianza que contienen a la proporción poblacional P.

10.2.4. Tamaño de muestra para estimar una proporción

En la práctica el planteamiento del problema cambia y el cálculo del estimador debe plantearse para un error y un nivel de confianza dados. En ese caso, será necesario calcular el tamaño de la muestra necesario para conseguir este objetivo. En

Ejemplo 10.4 *Un médico de cabecera tiene asignados* 1000 *pacientes, de los que se extrae una muestra aleatoria de tamaño* 50 *y se observa que* 20 *de ellos padecen enfermedades psicológicas. Se pide:*

1. *Estimar puntualmente la proporción de pacientes con enfermedades psicológicas entre los asignados a dicho médico.*
2. *Idem por intervalos al nivel de confianza* 0.95 *en el caso de que el muestreo haya sido sin reemplazamiento.*
3. *Idem para el caso con reemplazamiento.*

1. El estimador puntual de la proporción poblacional es la proporción muestral y por tanto es

$$p = \frac{m}{n} = \frac{20}{50} = 0.4$$

2. En este caso se tiene

$$\begin{aligned} &p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{N-n}{N-1}\tfrac{p(1-p)}{n}} = 0.4 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{(1000-50)}{(1000-1)}\tfrac{0.4\times(1-0.4)}{50}} \\ &= 0.4 \pm 0.1324 \qquad \Rightarrow \qquad (0.268, 0.532) \end{aligned}$$

que es válido por verificarse las condiciones que hace buena la aproximación normal:

$$\begin{aligned} n(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{N-n}{N-1}\ \tfrac{p(1-p)}{n}}) = 13.38 > 5 \\ n(1 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{N-n}{N-1}\ \tfrac{p(1-p)}{n}}) = 23.38 > 5 \end{aligned}$$

3. Análogamente, resulta el intervalo

$$\begin{aligned} &p \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}} = 0.4 \pm 1.96\sqrt{\tfrac{0.4\times(1-0.4)}{50}} = \\ &= 0.4 \pm 0.1358 \qquad \Rightarrow \qquad (0.264, 0.536) \end{aligned}$$

ya que se verifican las condiciones de validez

$$\begin{aligned} n\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right) = 13.21 > 5 \\ n\left(1 - p - z_{\alpha/2}\sqrt{\tfrac{p(1-p)}{n}}\right) = 23.21 > 5 \end{aligned}$$

este caso tenemos si el muestreo es con reemplazamiento:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{z_{\alpha/2}^2\, p\,(1-p)}{e^2} \tag{10.6}$$

y si es sin reemplazamiento resulta:

$$e = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}\,\frac{p(1-p)}{n}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{N}{1+\dfrac{e^2(N-1)}{z_{\alpha/2}^2 p(1-p)}} \tag{10.7}$$

Estas expresiones tienen el inconveniente de utilizar el producto $p(1-p)$, en el que aparece precisamente el valor que se busca. Sin embargo, en la mayoría de los casos prácticos se tiene una idea del rango de valores donde se está buscando la proporción, con lo que se puede dar una cota superior del producto $p(1-p)$. Si no se tuviera idea previa de esta cota, se puede utilizar el valor $1/4$, que, como se observa en la figura 10.1, es el máximo del producto $p(1-p)$. Utilizando esta cota n resulta ser para cada caso:

$$n = \left\lceil \frac{z_{\alpha/2}^2}{4e^2} \right\rceil \qquad\qquad n = \left\lceil \frac{z_{\alpha/2}^2 N}{4e^2(N-1)+z_{\alpha/2}^2} \right\rceil \tag{10.8}$$

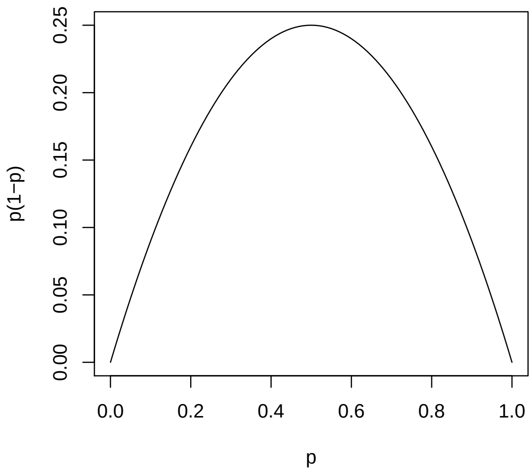


Figura 10.1: Función $y = p(1-p)$

Ejemplo 10.5 *¿Qué tamaño de muestra sería necesario para estimar con error* 0.1 *la proporción de rocas con alto contenido mineral del ejemplo anterior, utilizando muestreo al nivel* 0.95*?*

$$n = \left\lceil \frac{z^2_{\alpha/2}}{4e^2} \right\rceil = \left\lceil \frac{1.96^2}{4 \times 0.1^2} \right\rceil = \lceil 96.04 \rceil = 97$$

10.3. Estimación de una Media

En este apartado se analiza la estimación de medias siguiendo un esquema similar al de la estimación de poporciones.

Sea una población con N individuos que poseen cierta propiedad como puede ser su altura. Esa propiedad o variable tendrá asociada su media poblacional μ. Si el valor de μ no se conoce, se puede estimar a partir de una muestra aleatoria de tamaño n de la población con media muestral $\bar{x}$. La media muestral se trata por tanto de una variable aleatoria ya que cada muestra tiene un valor distinto.

10.3.1. Distribución muestral de la media muestral

Debido al carácter aleatorio de la media muestral resulta de gran interés estudiar su función de probabilidad y en especial su media y su varianza.

En el caso de muestreo con reemplazamiento o población infinita la media y la varianza de la función de probabilidad de $\bar{x}$ son, respectivamente:

$$E[\bar{x}] = \mu \tag{10.9}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = var[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{10.10}$$

Si la población es finita y el muestreo es sin reemplazamiento, estos parámetros resultan ser:

$$E[\bar{x}] = \mu \tag{10.11}$$

$$\sigma^2_{\bar{x}} = var[\bar{x}] = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \tag{10.12}$$

En el caso de la media muestral, el valor medio de $\bar{x}$ coincide con la media poblacional μ y a medida que el tamaño de la muestra aumenta la varianza disminuye y, por tanto, también la dispersión. Además, el teorema del límite central asegura que su distribución se aproxima a una ley normal para n tendiendo a infinito.

10.3.2. Intervalos de probabilidad de una media

Al igual que ocurría para la propoción, conociendo la función de probabilidad de la media muestral, se pueden encontrar unos intervalos (simétricos en torno a la media poblacional μ) tales que la probabilidad de que $\bar{x}$ pertenezca a ellos tome un valor dado.

Definición 10.5 Intervalo de probabilidad. *Se dice que el intervalo $(\mu - e, \mu + e)$ es un intervalo para $\bar{x}$ con probabilidad $1 - \alpha$ si se verifica que $P(\mu - e < \bar{x} < \mu + e) = 1 - \alpha$.*

En algunos casos la estimación de los intervalos de probabilidad se complica cuando es difícil conocer las funciones de probabilidad. En el caso de la media muestral, el teorema central del límite asegura que su distribución se aproxima a una ley normal $N(\mu, \sigma^2/n)$ cuando el tamaño de muestra es grande. Así, procediendo como se hizo con la proporción, el intervalo de probabilidad de la media vendrá dado por:

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}} = \mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{10.13}$$

Si la varianza de la población es desconocida (caso más realista) o n es pequeña, la consideración de la ley normal no es válida. En este caso se puede utilizar la cuasi-varianza muestral (S^2) como estimador de σ^2, pero hay que tener en cuenta que entonces la distribución ya no es una distribución normal (ya que S no es una constante, sino una variable aleatoria que varía de muestra en muestra). En el caso de que la población de partida sea normal, este problema se resuelve teniendo en cuenta que el estadístico:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \tag{10.14}$$

se distribuye según una t de Student con $n - 1$ grados de libertad. Bajo estas condiciones, el intervalo de probabilidad $(1 - \alpha)$ vendrá dado por[1]:

$$\mu \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \tag{10.15}$$

donde $t_{n-1,\alpha/2} \equiv F^{-1}_{t(n-1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ es el cuantil $1 - \alpha/2$ de la distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad.
La tabla 10.4 muestra los valores de $t_{n;p}$ para algunos valores de n y de la probabilidad p.

Nótese que, para valores de n grandes (se suele tomar $n \geq 30$), la t de Student tiende a la normal y se puede volver a utilizar la ecuación 10.13 sustituyendo σ por la cuasi-varianza muestral.

[1] Se deduce igual que en el caso normal: $1 - \alpha = P(\mu - e < \bar{x} < \mu + e) = P(\frac{\mu - e - \mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} < \frac{\mu + e - \mu}{S/\sqrt{n}}) = P(-\frac{e\sqrt{n}}{S} < t < \frac{e\sqrt{n}}{S}) = F_{t(n-1)}(\frac{e\sqrt{n}}{S}) - F_{t(n-1)}(-\frac{e\sqrt{n}}{S}) = \ldots$

Practica con R 10.2 Los valores de $t_{n;p}$ de la tabla 10.4 se pueden obtener con las siguientes órdenes de R. Notar que si el tamaño de la muestra es 4 y $(1-\alpha) = 0.95$, el valor de la tabla que debe buscarse corresponde $t_{3;0.975}$.

```
n<-4  # tamaño de la muestra
n_conf <- 0.95  # nivel del confianza
alfa_medios <- (1 - n_conf)/2
t_alfa_medios <- qt(1-alfa_medios,n-1)
```

Ejemplo 10.6 *En un estudio se quiere estimar el intervalo de probabilidad para el peso medio de una muestra de 100 recién nacidos, con un nivel de confianza de 0.9. Se sabe que el peso sigue una distribución normal de media 3.1Kg y desviación standard 150gr.*

En este caso la muestra de recién nacidos es grande (n=100) y se conoce $\sigma = 150$ luego el intervalo de probabilidad vendrá dado por:

$$\mu \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

siendo $z_{\alpha/2} = F^{-1}_{N(0,1)}(1-\alpha/2) = 1.645$ luego:

$$3.1 \pm 1.645\frac{0.150}{\sqrt{100}} = 3.1 \pm 0.025$$

Por tanto, la media muestral estará comprendida en el intervalo (3.075,3.125).

Ejemplo 10.7 *En un instituto se conoce que la estatura de los alumnos de ESO se ajusta a la normal* $N(165, 8^2)$*, en cm.*

1. *Calcular el porcentaje de alumnos que dará una media entre 163 y 167 cm si se toman muestras de tamaño 64.*

2. *Calcular el intervalo de probabilidad con un nivel de confianza del 90 % para ese tamaño de muestra.*

1. Ya que conocemos σ y el tamaño de la muestra es suficientemente grande podemos calcular el porcentaje de alumnos mediante:

$$e = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Si la media muestral está entre 163 y 167 cm, entonces $\mu \pm e = \mu \pm 2$ ya que e=(167-163)/2=2. Luego:

$$\begin{aligned} z_{\alpha/2} &= \frac{e\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{2\sqrt{64}}{8} = 2 \\ F_{N(0,1)}(2) &= 1 - \alpha/2 = 0.977 \quad \rightarrow 1 - \alpha = 0.954 \end{aligned}$$

2. $1 - \alpha = 0.9$, luego buscando en la tabla 10.1 $z_{\alpha/2} = 1.64$

$$\mu \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 165 \pm 1.64 \frac{8}{\sqrt{64}} = 165 \pm 1.64 \quad \rightarrow (163.36, 166.64)$$

10.3.3. Estimadores de una media

Estimación puntual

La media muestral es un buen estimador puntual de la media poblacional. Por tanto, para obtener un valor de éste basta con extraer una muestra y utilizar su media como aproximación del valor verdadero de la población.

Estimación por intervalos

Usando la hipótesis de normalidad y siguiendo un estudio análogo al realizado para proporciones, se puede obtener un intervalo de confianza para μ con confianza $1-\alpha$:

$$P(\bar{x}-e \leq \mu \leq \bar{x}+e) = 1-\alpha$$

siendo

$$e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{10.16}$$

Si la aproximación normal no es válida (σ desconocida o n pequeña), entonces es necesario considerar la variable

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}},$$

que sigue una distribución t de Student con $n-1$ grados de libertad. En este caso, el intervalo de confianza vendrá dado por:

$$e = |\mu - \bar{x}| \leq t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

10.3.4. Tamaño de muestra para estimar una media

Al igual que con la proporción, en la realidad el problema que se plantea se centra en estimar el tamaño de muestra necesario para estimar una media con un error y nivel de confianza dados. Es decir, se conocen e y $1-\alpha$ y se busca calcular n.

A partir de la ecuación 10.16 fácilmente se puede deducir el valor de n buscado:

$$n = \left\lceil z^2_{\alpha/2}\frac{\sigma^2}{e^2}\right\rceil \tag{10.17}$$

En el caso en el que la aproximación Normal no sea válida la estimación del tamaño de muestra no se deduce de forma tan sencilla ya que el valor de n aparece de forma implícita en $t_{n-1,\alpha/2}$.

Ejemplo 10.8 *En una cadena de producción se quiere estimar la longitud media (ℓ) de un cable fabricado mediante un proceso de producción que sigue una distribución normal. Para ello se toma una muestra de 16 cables con los siguientes valores de longitud en cm:*

4.8, 4.94, 4.75, 4.78, 4.95, 4.91, 4.95, 4.96, 5.02, 4.9, 4.86, 5.01, 5.07, 4.95, 5, 4.84

¿Cuál será el intervalo de confianza del 95 % para ℓ?

La media de la muestra es igual a 4.92 cm y la cuasi-desviación estándar de 0.0913. Tenemos entonces la siguiente información:
n = 16, $\bar{x} = 4.92$, $S = 0.0913$, $t_{n-1,\alpha/2} = F^{-1}_{t(n-1)}(1-\alpha/2) = 2.131$
El intervalo de confianza del 95 % está dado por:

$$\bar{x} \pm t_{n-1,\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} = 4.92 \pm 2.131 \cdot 0.0913/4 = 4.92 \pm 0.0486 \quad \Rightarrow (4.871, 4.969)$$

10.4. Estimación de una Varianza

En este apartado damos los estimadores puntuales y los estimadores por intervalos de la varianza de una población utilizando la varianza S_n^2 y cuasi-varianza S^2 muestrales. Para ello, se sigue un desarrollo paralelo a los estadísticos anteriores. Sin embargo, en este caso sólo se considera el supuesto de muestreo con reemplazamiento, dado que el caso general sin reemplazamiento complica los resultados notablemente.

10.4.1. Distribución de la Varianza muestral

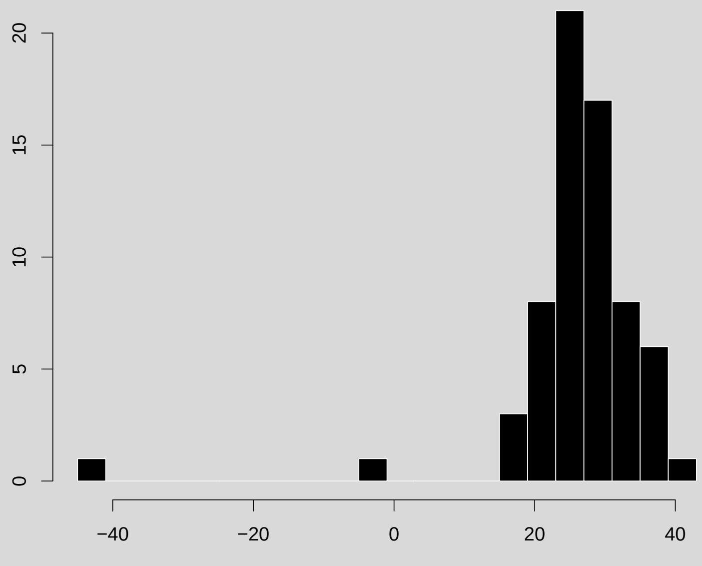
Al igual que ocurre con la proporción y con la media muestrales, la varianza muestral y la cuasi-varianza muestral son variables aleatorias ya que dependen de la muestra seleccionada, por lo que tiene mucho interés el conocimiento de sus funciones densidad. Sin embargo, en el caso de estas dos variables, se dan problemas importantes. Para la proporción y la media, la obtención de los intervalos de probabilidad y de confianza se basaba en la aproximación normal, que simplificaba mucho los cálculos y el tratamiento estadístico. Esta aproximación normal resulta adecuada desde un punto de vista práctico sin más que tomar muestras suficientemente grandes y gracias a la convergencia de la distribución binomial a la normal (en el caso de la proporción) y al teorema del límite central (en el caso de la media).

Para el caso de la varianza y la cuasi-varianza muestrales no existe una distribución a la que converjan todos los casos posibles de distribución poblacional. Dicho de otra forma, la distribución de la varianza muestral depende en alto grado

Ejemplo 10.9 *Con la intención de comprobar experimentalmente la velocidad de propagación de la luz, Simon Newton realizó* 66 *mediciones del tiempo que necesitaba un rayo de luz para viajar desde su laboratorio sobre el río Potomac hasta un espejo situado en la base del monumento a Washington (una distancia de, aproximadamente, 7400 metros). Los valores obtenidos (en millonésimas de segundo) fueron:*

28, 22, 36, 26, 28, 28, 26, 24, 32, 30, 27, 24, 33, 21, 36, 32, 31, 25, 24, 25, 28, 36, 27, 32, 34, 30, 25, 26, 26, 25, -44, 23, 21, 30, 33, 29, 27, 29, 28, 22, 26, 27, 16, 31, 29, 36, 32, 28, 40, 19, 37, 23, 32, 29, -2, 24, 25, 27, 24, 16, 29, 20, 28, 27, 39, 23

Un histograma de estos resultados (ver figura) muestra una distribución normal, excepto dos "outliers" en los valores -44 *y* -4*. Se trata de calcular la media muestral y el intervalo de confianza para la velocidad de la luz, incluyendo y excluyendo los outliers.*
Para más información consultar: Moore, David S., and George P. McCabe (1989). Introduction to the Practice of Statistics. Original source: Stigler, S.M., "Do robust estimators work with real data?" Annals of Statistics, 5 (1977), pp. 1055-1078.



Cuando se analiza el conjunto completo de datos se obtiene $\mu = 26.21$ y $\sigma = 10.74$. Por tanto, la media y varianza de la media muestral resultan $E[\bar{x}] = 26.21$, $Var[\bar{x}] = \frac{10.74^2}{66} = 1.74$. En cambio, si descartamos los datos negativos (debidos a errores) tenemos $\mu = E[\bar{x}] = 27.75$ y $Var[\bar{x}] = \frac{25.40}{64} = 0.39$. Por tanto, en este caso obtenemos un intervalo de confianza para la velocidad de la luz: $(\frac{7.4\,Km}{(27.75+0.63)\,10^{-6}\,s}, \frac{7.4\,Km}{(27.75-0.63)\,10^{-6}\,s}) = (260747, 272861)\,Km/s$.

de cuál sea la distribución poblacional de partida. Las complicaciones que surgen nos obligan a considerar en los apartados que siguen sólo el caso de población normal.
La media y la varianza de la varianza muestral son:

$$E[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2; \;\; Var[S_n^2] = \frac{(n-1)^2}{n^3}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\,\sigma^4).$$

donde μ_4 es el momento poblacional de cuarto orden respecto de la media. En el caso de la cuasi-varianza se tiene:

$$E[S^2] = \sigma^2; \;\; Var[S^2] = \frac{1}{n}(\mu_4 - \frac{n-3}{n-1}\,\sigma^4).$$

Como se puede deducir de estas expresiones, la distribución muestral de la varianza no está centrada en el estadístico de la población σ^2, puesto que el valor medio de la varianza muestral no coincide con el de la varianza poblacional. Sin embargo, se aproxima tanto más a él cuanto mayor es el tamaño de la muestra, tendiendo a coincidir con ella cuando n tiende a infinito. El valor medio de la cuasi-varianza muestral si coincide con la varianza de la población independientemente del tamaño de la muestra. Se dice que la cuasi-varianza es un estimador centrado (o no sesgado) de la varianza de la población. En cuanto a las varianzas de la varianza y cuasi-varianza muestrales se observa que tienden a cero cuando n tiende a infinito.

10.4.2. Intervalos de probabilidad de una varianza

En el caso particular de una población de partida normal $N(\mu, \sigma^2)$, el estadístico $n\,S_n^2/\sigma^2$ se distribuye según una distribución χ^2 de Pearson (ver sección **??**) con $n-1$ grados de libertad, $\chi^2(n-1)$, independientemente de μ. Por tanto, el intervalo $(a, b]$ de probabilidad $1-\alpha$ para la varianza muestral se puede deducir de:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P(a < S_n^2 \leq b) = P\left(\frac{na}{\sigma^2} < \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{nb}{\sigma^2}\right) = \\ &= F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{nb}{\sigma^2}\right) - F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{na}{\sigma^2}\right) \end{aligned} \tag{10.18}$$

Al igual que ocurría en el caso de la proporción y la media, existen un conjunto infinito de valores a y b que cumplen esta ecuación. En los casos anteriores se tomó un intervalo simétrico alrededor del valor poblacional del estadístico. En este caso, el intervalo con el que trabajamos no es simétrico respecto al valor central ya que, como vimos en la figura **??**, la función de densidad de la distribución χ^2 no es simétrica y presenta diferentes formas según el número de grados de libertad. La elección óptima de los valores a y b es aquella que minimiza el tamaño del intervalo para una confianza dada. Una elección menos óptima, pero más sencilla de obtener, es aquella que deja una probabilidad $\alpha/2$ a la izquierda de a y a la

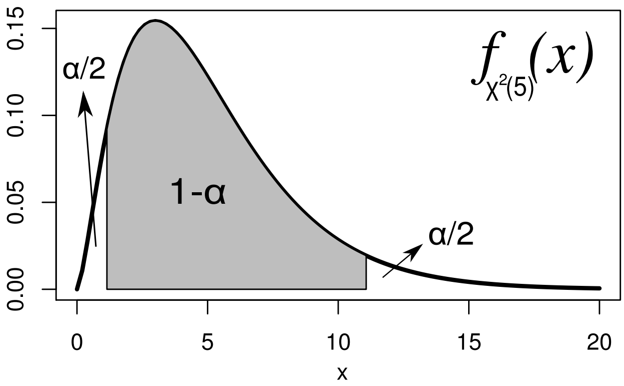


Figura 10.2: Intervalo de probabilidad para $\chi^2(5)$ dejando un valor $\alpha/2$ a ambos lados.

derecha de b (ver figura 10.2). Es decir, realizar la partición de $1-\alpha$ de la siguiente manera:

$$F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{na}{\sigma^2}\right) = \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sigma^2}{n}F^{-1}_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{10.19}$$

$$F_{\chi^2(n-1)}\left(\frac{nb}{\sigma^2}\right) = 1-\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sigma^2}{n}F^{-1}_{\chi^2(n-1)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{10.20}$$

Usando la notación $\chi^2_{(n,\alpha)} \equiv F^{-1}_{\chi^2(n)}(\alpha)$, se tiene el intervalo de probabilidad para la varianza muestral

$$P\left(\frac{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}\sigma^2}{n} \leq S_n^2 \leq \frac{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}\sigma^2}{n}\right) = 1-\alpha \tag{10.21}$$

La tabla 10.5 muestra los valores de $\chi^2_{(n,\alpha)}$ para algunos valores de n y de la probabilidad p.

Practica con R 10.3 Los valores de $\chi^2_{(n,p)}$ de la tabla 10.5 se pueden obtener con las siguientes órdenes de R. Notar que si el tamaño de la muestra es 4 y $(1-\alpha) = 0.95$, como el intervalo (a,b] que buscamos no es simétrico, en la tabla debemos buscar los valores de $\chi^2_{(3,0.025)}$ y $\chi^2_{(3,0.975)}$.

```
n<-4  # tamaño de la muestra
n_conf <- 0.95  # nivel del confianza
alfa_medios <- (1 - n_conf)/2
chi_alfa_medios <- qchisq(alfa_medios,n-1) # Valor de a
chi_1_menos_alfa_medios <- qchisq(1-alfa_medios,n-1) # Valor de b
```

10.4.3. Estimadores de una varianza

Estimación puntual

Según lo que hemos visto, la varianza y la cuasi-varianza muestrales son buenos estimadores puntuales de la varianza poblacional. Ello quiere decir que para estimar puntualmente la varianza poblacional bastará extraer una muestra aleatoria y calcular la varianza o la cuasi-varianza muestrales, siendo cualquiera de estos valores la estimación buscada. La cuasi-varianza tiene la ventaja de ser un estimador centrado (su esperanza coincide con el valor a estimar) de la varianza poblacional.

Estimación por intervalos

El intervalo de confianza para la varianza poblacional con una confianza $1-\alpha$ se puede deducir fácilmente a partir de (10.21), resultando:

$$P\left(\frac{nS_n^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{nS_n^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}\right) = 1-\alpha, \tag{10.22}$$

lo que prueba que $\left(\frac{nS_n^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}, \frac{nS_n^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}\right)$ es un intervalo de confianza $(1-\alpha)$ para σ^2.

Utilizando la cuasi-varianza muestral, el intervalo de confianza de σ^2 se calcularía de la misma manera, resultando ser: $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,1-\alpha/2)}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(n-1,\alpha/2)}}\right)$

Ejemplo 10.10 *Los tiempos de respuesta de un servidor web en segundos fueron: 69.5, 71.9, 72.6, 73.3, 73.5, 75.5, 75.7, 75.8, 76.1, 76.2, 77, 77.9, 78.1, 79.6, 79.7, 79.9, 80.1, 82.2, 83.7, 93.7*
Calcular un intervalo de confianza para la varianza de la distribución de tiempos al nivel de confianza 0.99. ¿Es válido el intervalo hallado independientemente del tipo de distribución de la variable aleatoria X?

La media de esa muestra de tiempos es $\bar{x} = 77.6$ y la varianza $S_n^2 = 25.61$. Como sabemos que $n\,S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$, se tiene con una confianza del 99 % que:

$$P(a \leq \frac{n\,S_n^2}{\sigma^2} \leq b) = 0.99$$

donde:
$F_{\chi^2_{n-1}}(a) = 0.005 \quad \rightarrow a = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.005) = 6.844$
$F_{\chi^2_{n-1}}(b) = 0.995 \quad \rightarrow b = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(0.995) = 38.582$
Luego el intervalo resulta ser:

$$(6.844 \leq \frac{n\,S_n^2}{\sigma^2} \leq 38.582)$$

que despejando σ^2:

$$(\frac{n\,S_n^2}{38.582} \leq \sigma^2 \leq \frac{n\,S_n^2}{6.844}) = (13.276, 74.84)$$

El intervalo obtenido es válido si la variable aleatoria X de los tiempos se distribuye de forma normal, ya que la variable aleatoria $n\,S_n^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$ cuando X es normal $N(\mu, \sigma^2)$

	Valores de p					
n	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	0.6938	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	0.6912	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	0.6901	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	0.6884	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	0.6876	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	0.6864	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	0.6858	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188
23	0.6853	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	0.6848	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	0.6840	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	0.6837	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	0.6834	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	0.6830	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	0.6807	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	0.6786	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
70	0.6780	1.2938	1.6669	1.9944	2.3808	2.6479
80	0.6776	1.2922	1.6641	1.9901	2.3739	2.6387
90	0.6772	1.2910	1.6620	1.9867	2.3685	2.6316
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.3642	2.6259
110	0.6767	1.2893	1.6588	1.9818	2.3607	2.6213
120	0.6765	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174

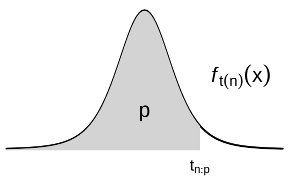


Tabla 10.4: Valores de $t_{n;p} \equiv F^{-1}_{t(n)}(p)$.

	Valores de p									
n	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995
1	0.0_439	0.0_316	0.0_398	0.0_239	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
31	14.458	15.655	17.539	19.281	21.434	41.422	44.985	48.232	52.191	55.003
32	15.134	16.362	18.291	20.072	22.271	42.585	46.194	49.480	53.486	56.328
33	15.815	17.074	19.047	20.867	23.110	43.745	47.400	50.725	54.776	57.648
34	16.501	17.789	19.806	21.664	23.952	44.903	48.602	51.966	56.061	58.964
35	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	46.059	49.802	53.203	57.342	60.275
36	17.887	19.233	21.336	23.269	25.643	47.212	50.998	54.437	58.619	61.581
37	18.586	19.960	22.106	24.075	26.492	48.363	52.192	55.668	59.893	62.883
38	19.289	20.691	22.878	24.884	27.343	49.513	53.384	56.896	61.162	64.181
39	19.996	21.426	23.654	25.695	28.196	50.660	54.572	58.120	62.428	65.476
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
41	21.421	22.906	25.215	27.326	29.907	52.949	56.942	60.561	64.950	68.053
42	22.138	23.650	25.999	28.144	30.765	54.090	58.124	61.777	66.206	69.336
43	22.859	24.398	26.785	28.965	31.625	55.230	59.304	62.990	67.459	70.616
44	23.584	25.148	27.575	29.787	32.487	56.369	60.481	64.201	68.710	71.893
45	24.311	25.901	28.366	30.612	33.350	57.505	61.656	65.410	69.957	73.166
46	25.041	26.657	29.160	31.439	34.215	58.641	62.830	66.617	71.201	74.437
47	25.775	27.416	29.956	32.268	35.081	59.774	64.001	67.821	72.443	75.704
48	26.511	28.177	30.755	33.098	35.949	60.907	65.171	69.023	73.683	76.969
49	27.249	28.941	31.555	33.930	36.818	62.038	66.339	70.222	74.919	78.231
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

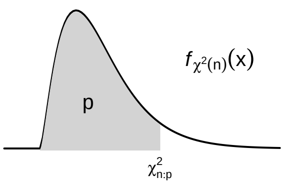


Tabla 10.5: Valores de $\chi^2_{n;p} \equiv F^{-1}_{\chi^2(n)}(p)$. Los subíndices indican el número de repeticiones de un digito. Por ejemplo, $F^{-1}_{\chi^2(1)}(0.005) = 0.0_439 = 0.000039$.

10.5. Contrastes de Hipótesis

Lo que distingue a una teoría científica es que ésta, a diferencia de la que no lo es, puede ser refutada de forma objetiva; es decir, puede existir un conjunto de resultados u observaciones que demuestran que la teoría está equivocada. Hacemos observaciones en la naturaleza y a través de un proceso creativo generamos hipótesis de cómo funciona cierto aspecto de la naturaleza. Estas hipótesis son luego sometidas a pruebas continuas para contrastar su veracidad. Para ello, se diseñan distintos experimentos basados en la necesaria ocurrencia de ciertos resultados si la hipótesis es cierta. En un problema con incertidumbre, la ocurrencia se entiende de forma probabilística de forma que si una hipótesis es cierta entonces ciertos sucesos han de tener una probabilidad muy baja, que puede considerarse despreciable. En el caso de que estas observaciones no ocurran nuestras hipótesis necesitan ser revisadas.

Llamaremos hipótesis estadística a una suposición que determina, total o parcialmente, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria:

1. Las hipótesis que determinan totalmente el *tipo de distribución* que ha generado los datos son de la forma: “los datos provienen una población normal”, etc. Estas pruebas se denominan genéricamente de *bondad de ajuste*.

2. Las hipótesis parciales especifican un valor concreto o un intervalo para algún estadístico relacionado con la población. En ocasiones se tiene una única muestra asociada a una población y las hipótesis son de la forma: “la media de la población es 7”. En otras ocasiones se dispone de dos o más muestras y la hipótesis es relativa a la igualdad de algún parámetro estadístico de las poblaciones correspondientes: “las medias de ambas poblaciones son iguales”.

Llamaremos *hipótesis nula*, H_0, a la hipótesis acerca de la población que se contrasta. El nombre de “nula” proviene de que H_0 representa la hipótesis que mantendremos a no ser que los datos indiquen su falsedad, y debe entenderse, por tanto, en el sentido de “neutra”. La hipótesis nula nunca se considera probada, aunque puede ser rechazada por los datos. Por ejemplo, la hipótesis de que todos los elementos de las poblaciones A y B son idénticos puede ser rechazada encontrando dos elementos distintos, pero no puede ser “demostrada” más que estudiando todos los elementos de ambas poblaciones, tarea que puede ser imposible.

10.5.1. El enfoque de Neyman y Pearson

Un contraste implica la elección entre dos hipótesis. La hipótesis H_0, que contrastamos y la hipótesis alternativa, H_1 que está implícita en el rechazo de H_0. Aunque en los contrastes de significación, que se verán en la siguiente sección, se supone que H_1 es la negación de H_0, resulta interesante entender la teoría para situaciones donde H_1 sea arbitraria. Consideremos el contraste:

$$H_0 \; : \; \{\theta = \theta_0\}$$

con hipótesis alternativa

$$H_1 \ : \ \{\theta = \theta_1\}$$

donde suponemos que los únicos valores posibles del parámetro son θ_0 y θ_1. Como se muestra en la tabla 10.6, en todo contraste existen dos posibilidades de tomar una decisión equivocada con respecto al verdadero estado de la naturaleza, es decir podemos cometer dos tipos de errores:

1. Rechazar H_0 cuando es cierta, que llamaremos error tipo I.

2. Aceptar H_0 cuando es falsa, que llamaremos error tipo II.

		Aceptar H_0	Rechazar H_0
	H_0 cierta	Correcto	Error tipo I (α)
Realidad	H_0 falsa	Error tipo II (β)	Correcto

Tabla 10.6: Contrastes de hipótesis.

Estos dos tipos de errores están siempre presentes en un contraste estadístico. Definir la región de rechazo mediante α, *nivel de significación*, es fijar la probabilidad de cometer un error tipo I:

$$\alpha = \text{P(rechazar } H_0 | H_0 \text{ es cierta)}$$

Por tanto, un contraste será mejor cuanto menor nivel de significación tenga, por lo que será un valor pequeño. Normalmente se fija en 0.1, 0.05, 0.01, dependiendo de la importancia de la hipótesis en juego. Esto quiere decir que el investigador está dispuesto a permitir una probabilidad de 0.1, 0.05, o 0.01 de cometer un error tipo I: rechazar la hipótesis nula cuando es cierta.

La probabilidad de cometer un error tipo II será:

$$\beta = \text{P(aceptar } H_0 | H_1 \text{ es cierta)}$$

Al valor $1 - \beta$ se le denomina *potencia del test* y es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa,

$$1 - \beta = \text{P(rechazar } H_0 | H_0 \text{ es falsa)}$$

Por tanto, un contraste será mejor cuanto mayor sea su potencia, por lo que será un valor grande ($>$ 0.9, 0.95, 0.99). Los valores de α y β mantienen entre sí una relación inversa: para un tamaño muestral fijo, si disminuimos uno, el otro aumentará y al revés. La única forma de disminuir ambos simultaneamente es aumentar el tamaño muestral.

Para entender mejor el planteamiento de la hipótesis nula y alternativa y los errores asociados podemos establecer un paralelismo con lo que ocurre en un proceso judicial. Una máxima de los procesos judiciales es: *el acusado es inocente hasta que no se demuestre lo contrario*. Esta sería la hipótesis nula. Sin embargo, el acusado está en el juicio porque, por alguna razón, se sospecha que su condición pueda ser la de culpable (hipótesis alternativa) en lugar de inocente. El objeto del juicio es dilucidar si, a la vista de las pruebas aportadas (la muestra), se puede rechazar la hipótesis de inocencia (la hipótesis nula). Si se rechaza la hipótesis nula, se acepta la hipótesis alternativa (ser culpable) y el acusado va a la carcel. En este símil, condenar a una persona inocente sería cometer un error tipo I y dejar en libertad al culpable sería un error tipo II. En este caso, el error de tipo I es mucho más grave que el error de tipo II (en ambos casos el culpable está libre, con el agravante de que en el caso del error de tipo I se ha encarcelado a un inocente). En general, se acepta la premisa de que el error tipo I es mucho más serio que el error de tipo I.

		Veredicto	
		Inocente	Culpable
	Inocente	Correcto	Error muy grave (α)
Realidad	Culpable	Error grave (β)	Correcto

Ejemplo 10.11 *Un médico dice poseer un método para determinar el sexo de los niños un mes antes de su nacimiento con un 80 % de seguridad. Para probar esta afirmación se utiliza el siguiente procedimiento. Se le dejan hacer 14 predicciones. Si el número de éxitos es mayor o igual que 11 se acepta su método y en caso contrario no se acepta. ¿Cuál es la probabilidad de que*

1. *se acepte su método siendo malo?.*
2. *se rechace su método siendo bueno?.*

H_0*:p=0.5 (se le considera de un suceso aleatorio)*
H_1*:p=0.8*

La probabilidad de que se acepte su método siendo malo vendrá dado por el error tipo I:

$$\alpha = P(\textit{Rechazar } H_0|H_0 \textit{ es cierta}) = P(x \geq 11|p = 0.5)$$

Dado que el número de éxitos X sigue una distribución binomial con parámetros n = 14 y p=0.5 bajo la hiótesis nula,luego:

$$\alpha = P(x \geq 11) = \sum_{i=11}^{14} p_X(x = i) = 0.029$$

La probabilidad de que se rechace su método siendo bueno vendrá dado por el error tipo II:

$$\beta = P(\textit{aceptar } H_0|H_1 \textit{ es cierta}) = P(x \leq 10|p = 0.80)$$

Ahora se trata de una distribución binomial con parámetros n = 14 y p=0.5

$$\beta = P(x \leq 10) = \sum_{i=0}^{10} p_X(x = i) = 0.3018$$

Este procedimiento no parece justo pues, aunque es pequeña la probabilidad de que se le admita su método siendo realmente malo (0.029), la probabilidad de rechazarle cuando su método es válido es del 0.3. Un buen procedimiento debe tener estas dos probabilidades pequeñas. Un contraste es mejor cuanto mayor sea su potencia y en este caso la potencia del test es $1-\beta=0.7$ *que no es un valor alto.*

Ejemplo 10.12 *Vacunas frias*

$$\alpha = P(rechazar H_0|H_0 cierta) = P(X>8|P{=}1/4) = \quad (10.23)$$
$$= 1-P(X\leq 8|P{=}1/4)) = 1-F_{B(20,1/4)}(8) = \quad (10.24)$$
$$= 1-0.9591 = 0.0409 \quad (10.25)$$

$$\beta = P(aceptar H_0|H_0 falsa) = P(X\leq 8|P{=}1/2) = \quad (10.26)$$
$$= F_{B(20,1/2)}(8) = 0.2517 \quad (10.27)$$

$$\alpha = 1-F_{B(20,1/4)}(7) = 0.1018 \quad (10.28)$$
$$\beta = F_{B(20,1/2)}(7) = 0.1316 \quad (10.29)$$
$$(10.30)$$

10.6. Contrastes de Significación

El método de contraste de hipótesis más sencillo es el contraste de significación, introducido por Fisher hacia 1920. Sus etapas son:

1. Definir la hipótesis a contrastar, que llamaremos H_0. Supondremos que H_0 es del tipo $\{\theta=\theta_0\}$ (por ejemplo $\mu=3$).

2. Definir una medida de discrepancia entre la muestra y H_0 del tipo: $d(\theta_0,\hat{\theta})$ donde $\hat{\theta}$ es una estimación de θ obtenida de la muestra. Este estadístico debe tener una distribución muestral conocida cuando H_0 sea cierta.

3. Definir una región de rechazo a partir del valor de significación α requerido.

4. Tomar una muestra estimar $\hat{\theta})$ y calcular d. Si el valor se halla en la región de rechazo, entonces rechazaremos H_0; en caso contrario la aceptaremos.

La primera solución y la más simple para decidir qué discrepancias son "demasiado" grandes es fijar α, o *nivel de significación*, que representa un nivel de probabilidad tal que los sucesos con probabilidad de ocurrir menor que α los consideramos despreciables.

El valor de α determina un valor d_c en la distribución de d tal que $P(d > d_c \mid H_0) = \alpha$. Por tanto discrepancias mayores de d_c tienen una probabilidad de ocurrir menor de α si la hipótesis H_0 es cierta. Definiremos la *región de rechazo* por $d>d_c$ y la *región de aceptación*, la complementaria $d\leq d_c$.

10.6.1. Críticas a la selección del nivel de significación

Cuando la discrepancia observada en la muestra pertenece a la región de rechazo, se dice que se ha producido una diferencia significativa, y se rechaza la H_0. La terminología diferencia significativa hace referencia a un concepto estadístico que puede tener poca relación con la significatividad práctica. Por ejemplo, se trata de contrastar si la produción de una máquina tiene una resistencia por término medio de μ_0. Si tomamos una muestra muy grande, es bastante probable que observemos una diferencia significativa y rechacemos que la media es μ_0. Sin embargo, la conclusión puede ser que la media es $\mu = \mu_0 + 0.00001$, y la diferencia entre μ y μ_0 puede ser perfectamente irrelevante en la práctica.

Por otra parte, el procedimiento de selección de una región de rechazo mediante el nivel de significación está sujeto a dos críticas principales:

1. El resultado del test puede depender mucho del valor de α, que es arbitrario, siendo posible rechazar H_0 con $\alpha = 0.05$ y aceptarla con $\alpha = 0.04$.

2. Dar sólo el resultado del test no permite diferenciar el grado de evidencia que la muestra indica a favor o en contra de H_0. Nótese que valores cercanos o lejanos al valor crítico producen el mismo resultado.

Un procedimienyo para hacer frente a estas críticas es utilizar en lugar del nivel de significación α, el nivel crítico de un test p. Se define el *nivel crítico* p del contraste como la probabilidad de obtener una discrepancia mayor o igual que la observada en la muestra, cuando H_0 es cierta. Es decir

$$p = P(d \geq \hat{d}|H_0).$$

Por tanto, el valor de p no se fija a priori, sino que se determina a partir de la muestra. Cuanto menor es p con más confianza puedo rechazar H_0.

10.7. Contrastes con Una Muestra

Una vez vista la metodología general del contraste de significación, a continuación se muestra su aplicación a una serie de casos prácticos en los que se quiere contrastar un valor para un estadístico poblacional y se dispone de una muestra de la población.

10.7.1. Contraste de una Proporción

En este caso se trata de contrastar un valor para la proporción poblacional en base al valor observado en una muestra:

$$\begin{array}{l} H_0 : P = p_0 \\ H_1 : P \neq p_0 \end{array}$$

donde p_0 es un valor prefijado.

1. Basándonos en un estadístico (de contraste) que ya fue considerado anteriormente en la construcción de intervalos de confianza para proporciones y que sigue una distribución aproximadamente normal para tamaños muestrales suficientemente grandes,

$$p = \frac{m}{n} \Rightarrow N(P, \frac{P(1-P)}{n})$$

   Si la hipótesis H_0 es cierta:

$$p = \frac{m}{n} \Rightarrow N(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n})$$

   y se toma como medida de discrepancia

$$d = \frac{p - p_0}{\sqrt{p_0\,(1-p_0)/n}}$$

   donde d se ajusta a una distribución $N(0,1)$

2. Fijado α, si $|d| > z_{1-\alpha/2}$ se RECHAZA H_0

Ejemplo 10.13 *(¿es una moneda regular?).*
Se dispone de una moneda cuyo aspecto no es simétrico y se observa que al lanzarla 1000 veces se obtiene 550 veces "cruz". ¿Qué podemos decidir sobre la moneda a un nivel del $5\,\%$?
Se quiere verificar si la moneda está trucada luego, el contraste de hipótesis que se plantea en este caso debe ser bilateral:
$H_0 : P = 1/2$
$H_1 : P \neq 1/2$

$$d = \frac{0.55-0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/1000}} = 3.16$$

$z_{\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{N(0,1)}(0.975) = 1.96$
$|d| > z_{\frac{\alpha}{2}}$ *luego se rechaza* H_0.

Este tipo de hipótesis se denominan *bilaterales*, pues se quiere contrastar si el estadístico es igual o distinto a un valor, sin importar si es mayor o menor. Sin embargo en algunos casos prácticos se sabe que el estadístico no puede ser menor que un valor y se quiere contrastar su igualdad:

$$H_0 : P = p_0 \Leftrightarrow P \leq p_0$$
$$H_1 : P > p_0$$

o al contrario:

$$H_0 : P = p_0 \Leftrightarrow P \geq p_0$$
$$H_1 : P < p_0$$

Este tipo de test se denominan unilaterales y en este caso la región de rechazo se reduce sólo a una de las dos colas de la distribución. En el primer caso se rechaza la hipótesis si $d > z_{1-\alpha}$, mientras que en el segundo se rechaza si $d < -z_{1-\alpha}$. Nótese que ahora se considera $z_{1-\alpha}$ porque es el valor crítico que deja una probabilidad $1 - \alpha$ a un lado y α al otro.

En el resto de los test se sigue la misma pauta, siendo necesario determinar si el test es bilateral o unilateral para calcular correctamente la región de aceptación y rechazo.

10.7.2. Constraste de la Media de una Población Normal

En este caso se trata de contrastar un valor para la media de una población normal.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

donde μ_0 es un valor prefijado.

Como en el caso de la proporción, la técnica para hacer el contraste consiste en suponer que H_0 es cierta, y averiguar con esta hipótesis quien es la distribución del estadístico del contraste. Al igual que en el tema anterior trabajaremos con dos hipótesis:

1. Varianza de la población (σ^2) conocida.

2. Varianza de la población (σ^2) desconocida.

En el primer caso, (σ^2 conocida), con las suposiciones hechas, la distribución de la media muestral sigue una distribución

$$\bar{x} \Rightarrow N(\mu, \sigma^2/n)$$

Si la hipótesis H_0 es cierta:

$$\bar{x} \Rightarrow N(\mu_0, \sigma^2/n)$$

se toma como medida de discrepancia

$$d = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

donde d se ajusta a una distribución $N(0, 1)$

Si H_0 es cierta, se espera que el valor de d esté próximo a cero con una gran probabilidad. De esta manera fijado un nivel de significación α y tomando como región crítica a los valores que son muy extremados y con probabilidad α, se cumple que si $|d| > z_{\alpha/2}$ se RECHAZA H_0.

En el caso de test de una cola, H_0 se rechaza si $d > z_\alpha$ cuando el contraste es unilateral derecho, mientras que H_0 se rechaza si $d < -z_\alpha$ en el caso de ser un contraste unilateral izquierdo.

Si la varianza de la población es desconocida, se hace necesario estimarla a partir de su estimador insesgado, la cuasivarianza muestral, S^2. Por ello la distribución del estimador del contraste será una t de Student que ha perdido un grado de libertad:

$$d = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \Rightarrow t(n-1)$$

En el caso de contraste bilateral, fijado α, si $|d| > t_{1-\alpha/2,n-1}$ se RECHAZA la H_0. Si se trata de un contraste unilateral derecho, H_0 se rechaza si $d > t_{1-\alpha,n-1}$, mientras que H_0 se rechaza si $d < -t_{1-\alpha,n-1}$ si el contraste es unilateral izquierdo.

En el caso de que el tamaño de la muestra sea grande, entonces no importa si la población es normal ni si la varianza es conocida y se puede aproximar el estadístico de discrepancia como en el primer caso, utilizando la distribución normal.

Ejemplo 10.14 *Sabiendo que la altura de los individuos de una población siguen una distribución gaussiana, se desea contrastar si su altura media es diferente de 174 cm con una significación de* $\alpha = 0.05$. *Para ello nos basamos en un estudio en el que con una muestra de 25 personas se obtuvo una media de 170 cm y una desviación típica de 10 cm.*

El contraste que se plantea es un contraste bilateral:

$$H_0 : \mu = 174cm$$
$$H_1 : \mu \neq 174cm$$

La técnica a utilizar consiste en suponer que H0 es cierta y ver si el valor que toma el estadístico de contraste d, es "razonable" o no bajo esta hipótesis, para el nivel de significación dado.

$$d = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{170 - 174}{10.206/\sqrt{25}} = -1.96$$

siendo, $S = S_n\sqrt{\frac{n}{n-1}} = 10\sqrt{\frac{25}{24}} = 10.206$
$d \Rightarrow t(n-1)$ *luego, fijado* α*, si* $|d| > t_{1-\alpha/2,n-1}$ *se ACEPTA (i.e. NO SE PUEDE RECHAZAR)* H_0.

$$|-1.96| < t_{1-\alpha/2,n-1} = t_{0.975,24} = 2.06$$

Luego, aunque podamos pensar que ciertamente el verdadero valor de μ *no es 174, no hay una evidencia suficiente para rechazar esta hipótesis al nivel de confianza del* $95\,\%$.

10.7.3. Constraste para la Varianza de una Población Normal

En este caso se trata de contrasta un valor para la varianza de una población normal.

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

1. Sean n y $\hat{s}^2$ los datos de la muestra , entonces, se toma como medida de discrepancia

$$d = \frac{(n-1)\, S^2}{\sigma_0^2} \qquad \text{ó} \qquad d = \frac{n\, S_n^2}{\sigma_0^2}$$

   donde d se ajusta a una distribución χ^2 con $n-1$ grados de libertad.

2. Fijado α, si $d > \chi^2_{1-\alpha/2, n-1}$ o $d < \chi^2_{\alpha/2, n-1}$ se RECHAZA la H_0

Ejemplo 10.15 *Se desea controlar un lote grande de piezas mecánicas. Una característica de estas piezas X, es una v. a. cuya distrib. es normal, de media μ conocida y de varianza σ^2 desconocida. Se desea tomar una decisión acerca de σ^2, con ayuda de una muestra de tamaño $n = 12$. Se sabe que:*

$$S^2 = \sum (x_i - \mu)^2 = 650$$

Construir la región crítica a un nivel de significación del $5\,\%$ contrastando $H_0 : \sigma^2 = 100$ frente a $H_1 : \sigma^2 \neq 100$, y $H_1 : \sigma^2 < 100$, respectivamente.

10.8. Contrastes con Dos Muestras

A continuación se muestran una serie de casos prácticos en los que se quiere contrastar la igualdad de un estadístico en dos poblaciones distintas y se dispone de dos muestras distintas. Normalmente se quiere comprobar si ambas muestras provienen de la misma población y se utilizan las diferencias en los estadísticos de ambas para tratar de hallar diferencias entre ellas.

10.8.1. Contraste de dos Proporciones

Comenzamos con un ejemplo ilustrativo de este problema:

Periodo	Nación	Hombres	Mujeres	Total
1871-1900	Suiza	1.359.671	1.295.086	2.654.757
1927-1932	Polonia	3.032.452	2.833.422	5.865.874

Sea p_1 la proporción de varones en Suiza y p_2 la proporción en Polonia. Si se quiere comprobar si ambas proporciones pueden considerarse iguales. Una forma de responder es calcular el intervalo de confianza para p_1 y el intervalo para p_2

y ver si se solapan. Se tiene, para Suiza $\hat{p}_1 = \frac{1359671}{2654757} = 0.51216$ y para Polonia 0.51696; los intervalos correspondientes son:

$$\hat{p}_1 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\,(1-\hat{p}_1)}{n_1}} = (0.51132, 0.513004). \tag{10.31}$$

$$\hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_2\,(1-\hat{p}_2)}{n_2}} = (0.5164, 0.51752). \tag{10.32}$$

Como los intervalos anteriores no se solapan rechazamos que $p_1 = p_2$ al $95\,\%$ de confianza. Una forma directa de proceder es la siguiente, en la cual se utiliza un único estadístico de contraste que combina la información de ambas muestras. Para ello se consideran las siguientes hipótesis:

$$H_0 : P_1 = P_2$$
$$H_1 : P_1 \neq P_2$$

1. Sean $\hat{p}_1 = x_1/n_1$ y $\hat{p}_2 = x_2/n_2$ los estimadores de las proporciones poblacionales p_1 y p_2. Como estadístico de contraste se utiliza:

   $$d = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}}$$

   donde d se ajusta a una distribución $N(0,1)$

2. Fijado α, si $|d| > z_{\alpha/2}$ se RECHAZA la H_0

10.8.2. Constraste de dos Medias

En este caso se trata de contrastar la igualdad de las medidas de dos poblaciones normales con varianzas conocidas σ_1^2 y σ_2^2, a través de una muestra de cada una de ellas.

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq d$$

1. Se considera el estadístico de contraste

   $$d = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

2. Fijado α, si $|d| > z_{1-\alpha/2}$ se RECHAZA la H_0

Cuando las varianzas no son conocidas pero los tamaños de las muestra son grandes $n_1 > 15, n_2 > 15$, entonces se utilizan las varianzas muestrales como estimadores y se procede de forma similar (sustituyendo los términos $\frac{\sigma_i^2}{n_i}$ por $\frac{S_i^2}{n_i-1}$.

Finalmente, si la muestra es pequeña y las varianzas son desconocidas, entonces es necesario recurrir a la siguiente prueba:

1. Se considera el estadístico de contraste

$$d = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{S}_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

donde

$$\hat{S}_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}.$$

2. Fijado α, si $|d| > t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}$ se RECHAZA la H_0

Ejemplo 10.16 *Se miden los contenidos de nicotina de dos marcas de cigarrillos. Si en un experimento de 50 cigarrillos de la primera marca se obtuvo un contenido medio de 2.61 mg con una cuasidesv de 0.12 mg, mientras que 40 cigarrillos de la segunda marca dieron un contenido medio de 2.38 mg con una cuasidesv. de 0.14 mg, contrastar la hipótesis nula* $\mu_1 - \mu_2 = 0.2$ *frente a la alternativa* $\mu_1 - \mu_2 \neq 0.2$*.*

Ejemplo 10.17 *Las siguientes muestras aleatorias de las medidas de la capacidad calorífica de trozos de carbón (en millones de calorías por tonelada) extraidos de dos minas:*

Mina 1	*8.26*	*8.13*	*8.35*	*8.07*	*8.34*	
Mina 2	*7.95*	*7.89*	*7.90*	*8.14*	*7.92*	*7.84*

Usando un nivel de significación del 0.01 efectuar el contraste de que el rendimiento medio entre ambas minas es el mismo. Suponer $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2 \approx \sigma^2$

$$\bar{x}_1 = 8.23, \qquad \hat{S}_1^2 = \frac{63}{4} = 0.016$$

$$\bar{x}_2 = 7.94, \qquad \hat{S}_2^2 = \frac{54.6}{5} = 0.011$$

$$\hat{S}_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{(5-1)0.016 + (6-1)0.011}{5+6-2} = 0.0147$$

Se obtiene el valor $d = 3.95$*. Como* $t_{0.005,9} = 3.25$*, se rechaza la hipótesis nula.*

Muestras emparejadas

Imaginemos el caso de que tomamos una muestra de tamaño n y valores $\{x_1, ..., x_n\}$ y otra muestra $\{y_1, ..., y_n\}$ en la que cada valor de y_i depende de x_i. Estas dos muestras son dependientes y no se puede utilizar la teoría mostrada anteriormente. Supongamos que, aparte de la dependencia entre miembros de una pareja, los pares son independientes entre sí (i.e. no hay relación entre x_i y x_j).

Ejemplos de este tipo de muestreos son aquellos que involucran medir una cualidad en unos objetos, realizar un proceso y medir otra (o la misma) cualidad en *los mismos* objetos.

> Horas perdidas por un trabajador antes y despues de implantar un programa de aprovechamiento del tiempo.

Otro ejemplo pueden ser objetos que han pasado emparejados un proceso aleatorio.

> Desgaste de un par de zapatos en los que uno de ellos ha sido tratado con un nuevo polímero protector.

Entonces, si construimos una nueva variable $D_i = x_i - y_i$, sus elementos serán independientes entre sí y podremos tratarla como una muestra única y el estadístico:

$$d = \frac{\overline{D} - (\mu_x - \mu_y)}{S_D/\sqrt{n}}$$

seguirá una distribución t(n-1).

10.9. Contraste de la bondad de ajuste

Hablamos de bondad de ajuste cuando intentamos comparar una distribución de frecuencia observada con los valores correspondientes a un valor teórico. Para contrastar si las discrepancias entre las frecuencias observadas y esperadas puede ocurrir al azar, se puede usar el estadístico:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}$$

Que se distribuye según una $\chi^2(k-m)$. Con k el número de clases y m el número de parámetros estimados de la distribución teórica.

		m														
n	p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	90.	39.863	49.5	53.593	55.833	57.24	58.204	58.906	59.439	59.858	60.195	60.473	60.705	60.903	61.073	61.22
1	95.	161.45	199.5	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	242.98	243.91	244.69	245.36	245.95
1	97.5	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	973.03	976.71	979.84	982.53	984.87
1	99.	4052.2	4999.5	5403.4	5624.6	5763.6	5859.	5928.4	5981.1	6022.5	6055.8	6083.3	6106.3	6125.9	6142.7	6157.3
1	99.5	16211.	19999.	21615.	22500.	23056.	23437.	23715.	23925.	24091.	24224.	24334.	24426.	24505.	24572.	24630.
2	90.	8.5263	9.	9.1618	9.2434	9.2926	9.3255	9.3491	9.3668	9.3805	9.3916	9.4006	9.4081	9.4145	9.42	9.4247
2	95.	18.513	19.	19.164	19.247	19.296	19.33	19.353	19.371	19.385	19.396	19.405	19.413	19.419	19.424	19.429
2	97.5	38.506	39.	39.165	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.407	39.415	39.421	39.427	39.431
2	99.	98.503	99.	99.166	99.249	99.299	99.333	99.356	99.374	99.388	99.399	99.408	99.416	99.422	99.428	99.433
2	99.5	198.5	199.	199.17	199.25	199.3	199.33	199.36	199.37	199.39	199.4	199.41	199.42	199.42	199.43	199.43
3	90.	5.5383	5.4624	5.3908	5.3426	5.3092	5.2847	5.2662	5.2517	5.24	5.2304	5.2224	5.2156	5.2098	5.2047	5.2003
3	95.	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.7633	8.7446	8.7287	8.7149	8.7029
3	97.5	17.443	16.044	15.439	15.101	14.885	14.735	14.624	14.54	14.473	14.419	14.374	14.337	14.304	14.277	14.253
3	99.	34.116	30.817	29.457	28.71	28.237	27.911	27.672	27.489	27.345	27.229	27.133	27.052	26.983	26.924	26.872
3	99.5	55.552	49.799	47.467	46.195	45.392	44.838	44.434	44.126	43.882	43.686	43.524	43.387	43.271	43.172	43.085
4	90.	4.5448	4.3246	4.1909	4.1072	4.0506	4.0097	3.979	3.9549	3.9357	3.9199	3.9067	3.8955	3.8859	3.8776	3.8704
4	95.	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.041	5.9988	5.9644	5.9358	5.9117	5.8911	5.8733	5.8578
4	97.5	12.218	10.649	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7935	8.7512	8.715	8.6838	8.6565
4	99.	21.198	18.	16.694	15.977	15.522	15.207	14.976	14.799	14.659	14.546	14.452	14.374	14.307	14.249	14.198
4	99.5	31.333	26.284	24.259	23.155	22.456	21.975	21.622	21.352	21.139	20.967	20.824	20.705	20.603	20.515	20.438
5	90.	4.0604	3.7797	3.6195	3.5202	3.453	3.4045	3.3679	3.3393	3.3163	3.2974	3.2816	3.2682	3.2567	3.2468	3.238
5	95.	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.704	4.6777	4.6552	4.6358	4.6188
5	97.5	10.007	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5678	6.5245	6.4876	6.4556	6.4277
5	99.	16.258	13.274	12.06	11.392	10.967	10.672	10.456	10.289	10.158	10.051	9.9626	9.8883	9.8248	9.77	9.7222
5	99.5	22.785	18.314	16.53	15.556	14.94	14.513	14.2	13.961	13.772	13.618	13.491	13.384	13.293	13.215	13.146
6	90.	3.7759	3.4633	3.2888	3.1808	3.1075	3.0546	3.0145	2.983	2.9577	2.9369	2.9195	2.9047	2.892	2.8809	2.8712
6	95.	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.099	4.06	4.0274	3.9999	3.9764	3.9559	3.9381
6	97.5	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.4098	5.3662	5.329	5.2968	5.2687
6	99.	13.745	10.925	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.26	8.1017	7.9761	7.8741	7.7896	7.7183	7.6575	7.6049	7.559
6	99.5	18.635	14.544	12.917	12.028	11.464	11.073	10.786	10.566	10.391	10.25	10.133	10.034	9.9501	9.8774	9.814
7	90.	3.5894	3.2574	3.0741	2.9605	2.8833	2.8274	2.7849	2.7516	2.7247	2.7025	2.6839	2.6681	2.6545	2.6426	2.6322
7	95.	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.866	3.787	3.7257	3.6767	3.6365	3.603	3.5747	3.5503	3.5292	3.5107
7	97.5	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.7095	4.6658	4.6285	4.5961	4.5678
7	99.	12.246	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.84	6.7188	6.6201	6.5382	6.4691	6.41	6.359	6.3143
7	99.5	16.236	12.404	10.882	10.05	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803	8.2697	8.1764	8.0967	8.0279	7.9678
8	90.	3.4579	3.1131	2.9238	2.8064	2.7264	2.6683	2.6241	2.5893	2.5612	2.538	2.5186	2.502	2.4876	2.4752	2.4642
8	95.	5.3177	4.459	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.313	3.2839	3.259	3.2374	3.2184
8	97.5	7.5709	6.0595	5.416	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.2434	4.1997	4.1622	4.1297	4.1012
8	99.	11.259	8.6491	7.591	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143	5.7343	5.6667	5.6089	5.5589	5.5151
8	99.5	14.688	11.042	9.5965	8.8051	8.3018	7.952	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106	7.1045	7.0149	6.9384	6.8721	6.8143
9	90.	3.3603	3.0065	2.8129	2.6927	2.6106	2.5509	2.5053	2.4694	2.4403	2.4163	2.3961	2.3789	2.364	2.351	2.3396
9	95.	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	3.1025	3.0729	3.0475	3.0255	3.0061
9	97.5	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.197	4.102	4.026	3.9639	3.9121	3.8682	3.8306	3.798	3.7694
9	99.	10.561	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565	5.1779	5.1114	5.0545	5.0052	4.9621
9	99.5	13.614	10.107	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172	6.3142	6.2274	6.153	6.0887	6.0325
10	90.	3.285	2.9245	2.7277	2.6053	2.5216	2.4606	2.414	2.3772	2.3473	2.3226	2.3018	2.2841	2.2687	2.2553	2.2435
10	95.	4.9646	4.1028	3.7083	3.478	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.943	2.913	2.8872	2.8647	2.845
10	97.5	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.779	3.7168	3.6649	3.6209	3.5832	3.5504	3.5217
10	99.	10.044	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491	4.7715	4.7059	4.6496	4.6008	4.5581
10	99.5	12.826	9.427	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467	5.7462	5.6613	5.5887	5.5257	5.4707
11	90.	3.2252	2.8595	2.6602	2.5362	2.4512	2.3891	2.3416	2.304	2.2735	2.2482	2.2269	2.2087	2.193	2.1792	2.1671
11	95.	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.948	2.8962	2.8536	2.8179	2.7876	2.7614	2.7386	2.7186
11	97.5	6.7241	5.2559	4.63	4.2751	4.044	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4737	3.4296	3.3917	3.3588	3.3299
11	99.	9.646	7.2057	6.2167	5.6683	5.316	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315	4.5393	4.4624	4.3974	4.3416	4.2932	4.2509
11	99.5	12.226	8.9122	7.6004	6.8809	6.4217	6.1016	5.8648	5.6821	5.5368	5.4183	5.3197	5.2363	5.1649	5.1031	5.0489
12	90.	3.1765	2.8068	2.6055	2.4801	2.394	2.331	2.2828	2.2446	2.2135	2.1878	2.166	2.1474	2.1313	2.1173	2.1049
12	95.	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.7173	2.6866	2.6602	2.6371	2.6169
12	97.5	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.3215	3.2773	3.2393	3.2062	3.1772
12	99.	9.3302	6.9266	5.9525	5.412	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875	4.2961	4.2198	4.1553	4.0999	4.0518	4.0096
12	99.5	11.754	8.5096	7.2258	6.5211	6.0711	5.757	5.5245	5.3451	5.2021	5.0855	4.9884	4.9062	4.8358	4.7748	4.7213
13	90.	3.1362	2.7632	2.5603	2.4337	2.3467	2.283	2.2341	2.1953	2.1638	2.1376	2.1155	2.0966	2.0802	2.0658	2.0532
13	95.	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.671	2.6347	2.6037	2.5769	2.5536	2.5331
13	97.5	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.388	3.312	3.2497	3.1975	3.1532	3.115	3.0819	3.0527
13	99.	9.0738	6.701	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.441	4.3021	4.1911	4.1003	4.0245	3.9603	3.9052	3.8573	3.8154
13	99.5	11.374	8.1865	6.9258	6.2335	5.791	5.4819	5.2529	5.0761	4.9351	4.8199	4.724	4.6429	4.5733	4.5129	4.46
14	90.	3.1022	2.7265	2.5222	2.3947	2.3069	2.2426	2.1931	2.1539	2.122	2.0954	2.0729	2.0537	2.037	2.0224	2.0095
14	95.	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.5655	2.5342	2.5073	2.4837	2.463
14	97.5	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0946	3.0502	3.0119	2.9786	2.9493
14	99.	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.695	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297	3.9394	3.864	3.8001	3.7452	3.6975	3.6557
14	99.5	11.06	7.9216	6.6804	5.9984	5.5623	5.2574	5.0313	4.8566	4.7173	4.6034	4.5085	4.4281	4.3591	4.2993	4.2468
15	90.	3.0732	2.6952	2.4898	2.3614	2.273	2.2081	2.1582	2.1185	2.0862	2.0593	2.0366	2.0171	2.0001	1.9853	1.9722
15	95.	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.5068	2.4753	2.4481	2.4244	2.4034
15	97.5	6.1995	4.765	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	3.0078	2.9633	2.9249	2.8915	2.8621
15	99.	8.6831	6.3589	5.417	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948	3.8049	3.7299	3.6662	3.6115	3.5639	3.5222
15	99.5	10.798	7.7008	6.476	5.8029	5.3721	5.0708	4.8473	4.6744	4.5364	4.4235	4.3295	4.2497	4.1813	4.1219	4.0698
16	90.	3.0481	2.6682	2.4618	2.3327	2.2438	2.1783	2.128	2.088	2.0553	2.0281	2.0051	1.9854	1.9682	1.9532	1.9399
16	95.	4.494	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.4564	2.4247	2.3973	2.3733	2.3522
16	97.5	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.9337	2.889	2.8506	2.817	2.7875
16	99.	8.531	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804	3.6909	3.6162	3.5527	3.4981	3.4506	3.4089
16	99.5	10.575	7.5138	6.3034	5.6378	5.2117	4.9134	4.692	4.5207	4.3838	4.2719	4.1785	4.0994	4.0314	3.9723	3.9205
17	90.	3.0262	2.6446	2.4374	2.3077	2.2183	2.1524	2.1017	2.0613	2.0284	2.0009	1.9777	1.9577	1.9404	1.9252	1.9117
17	95.	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.81	2.6987	2.6143	2.548	2.4943	2.4499	2.4126	2.3807	2.3531	2.329	2.3077
17	97.5	6.042	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.061	2.9849	2.9222	2.8696	2.8249	2.7863	2.7526	2.723
17	99.	8.3997	6.1121	5.185	4.669	4.3359	4.1015	3.9267	3.791	3.6822	3.5931	3.5185	3.4552	3.4007	3.3533	3.3117
17	99.5	10.384	7.3536	6.1556	5.4967	5.0746	4.7789	4.5594	4.3894	4.2535	4.1424	4.0496	3.9709	3.9033	3.8445	3.7929
18	90.	3.007	2.6239	2.416	2.2858	2.1958	2.1296	2.0785	2.0379	2.0047	1.977	1.9535	1.9333	1.9158	1.9004	1.8868
18	95.	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.3742	2.3421	2.3143	2.29	2.2686
18	97.5	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.382	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.8137	2.7689	2.7302	2.6964	2.6667
18	99.	8.2854	6.0129	5.0919	4.579	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971	3.5082	3.4338	3.3706	3.3162	3.2689	3.2273
18	99.5	10.218	7.2148	6.0278	5.3746	4.956	4.6627	4.4448	4.2759	4.141	4.0305	3.9382	3.8599	3.7926	3.7341	3.6827

Tabla 10.7: $F^{-1}_{F(m,n)}(p)$

		m														
n	p	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.	30.
1	90.	61.35	61.464	61.566	61.658	61.74	61.815	61.883	61.945	62.002	62.055	62.103	62.148	62.19	62.229	62.265
1	95.	246.46	246.92	247.32	247.69	248.01	248.31	248.58	248.83	249.05	249.26	249.45	249.63	249.8	249.95	250.1
1	97.5	986.92	988.73	990.35	991.8	993.1	994.29	995.36	996.35	997.25	998.08	998.85	999.56	1000.2	1000.8	1001.4
1	99.	6170.1	6181.4	6191.5	6200.6	6208.7	6216.1	6222.8	6229.	6234.6	6239.8	6244.6	6249.1	6253.2	6257.1	6260.6
1	99.5	24681.	24727.	24767.	24803.	24836.	24866.	24892.	24917.	24940.	24960.	24980.	24997.	25014.	25029.	25044.
2	90.	9.4289	9.4325	9.4358	9.4387	9.4413	9.4437	9.4458	9.4478	9.4496	9.4513	9.4528	9.4542	9.4556	9.4568	9.4579
2	95.	19.433	19.437	19.44	19.443	19.446	19.448	19.45	19.452	19.454	19.456	19.457	19.459	19.46	19.461	19.462
2	97.5	39.435	39.439	39.442	39.445	39.448	39.45	39.452	39.454	39.456	39.458	39.459	39.461	39.462	39.463	39.465
2	99.	99.437	99.44	99.444	99.447	99.449	99.452	99.454	99.456	99.458	99.459	99.461	99.462	99.463	99.465	99.466
2	99.5	199.44	199.44	199.44	199.45	199.45	199.45	199.45	199.46	199.46	199.46	199.46	199.46	199.46	199.47	199.47
3	90.	5.1964	5.1929	5.1898	5.187	5.1845	5.1822	5.1801	5.1781	5.1764	5.1747	5.1732	5.1718	5.1705	5.1693	5.1681
3	95.	8.6923	8.6829	8.6745	8.667	8.6602	8.654	8.6484	8.6432	8.6385	8.6341	8.6301	8.6263	8.6229	8.6196	8.6166
3	97.5	14.232	14.213	14.196	14.181	14.167	14.155	14.144	14.134	14.124	14.115	14.107	14.1	14.093	14.087	14.081
3	99.	26.827	26.787	26.751	26.719	26.69	26.664	26.64	26.618	26.598	26.579	26.562	26.546	26.531	26.517	26.505
3	99.5	43.008	42.941	42.88	42.826	42.778	42.733	42.693	42.656	42.622	42.591	42.562	42.535	42.511	42.487	42.466
4	90.	3.8639	3.8582	3.8531	3.8485	3.8443	3.8405	3.8371	3.8339	3.831	3.8283	3.8258	3.8235	3.8213	3.8193	3.8174
4	95.	5.8441	5.832	5.8211	5.8114	5.8025	5.7945	5.7872	5.7805	5.7744	5.7687	5.7635	5.7586	5.7541	5.7498	5.7459
4	97.5	8.6326	8.6113	8.5924	8.5753	8.5599	8.546	8.5332	8.5216	8.5109	8.501	8.4919	8.4834	8.4755	8.4681	8.4613
4	99.	14.154	14.115	14.08	14.048	14.02	13.994	13.97	13.949	13.929	13.911	13.894	13.878	13.864	13.85	13.838
4	99.5	20.371	20.311	20.258	20.21	20.167	20.128	20.093	20.06	20.03	20.002	19.977	19.953	19.931	19.911	19.892
5	90.	3.2303	3.2234	3.2172	3.2117	3.2067	3.2021	3.1979	3.1941	3.1905	3.1873	3.1842	3.1814	3.1788	3.1764	3.1741
5	95.	4.6038	4.5904	4.5785	4.5678	4.5581	4.5493	4.5413	4.5339	4.5272	4.5209	4.5151	4.5097	4.5047	4.5001	4.4957
5	97.5	6.4032	6.3814	6.3619	6.3444	6.3286	6.3142	6.3011	6.2891	6.278	6.2679	6.2584	6.2497	6.2416	6.234	6.2269
5	99.	9.6802	9.6429	9.6096	9.5797	9.5526	9.5281	9.5058	9.4853	9.4665	9.4491	9.4331	9.4182	9.4043	9.3914	9.3793
5	99.5	13.086	13.033	12.985	12.942	12.903	12.868	12.836	12.807	12.78	12.755	12.732	12.711	12.691	12.673	12.656
6	90.	2.8626	2.855	2.8481	2.8419	2.8363	2.8312	2.8266	2.8223	2.8183	2.8147	2.8113	2.8082	2.8053	2.8025	2.8
6	95.	3.9223	3.9083	3.8957	3.8844	3.8742	3.8649	3.8564	3.8486	3.8415	3.8348	3.8287	3.823	3.8177	3.8128	3.8082
6	97.5	5.2439	5.2218	5.2021	5.1844	5.1684	5.1538	5.1406	5.1284	5.1172	5.1069	5.0973	5.0884	5.0802	5.0724	5.0652
6	99.	7.5186	7.4827	7.4507	7.4219	7.3958	7.3722	7.3506	7.3309	7.3127	7.296	7.2805	7.2661	7.2527	7.2402	7.2285
6	99.5	9.7582	9.7086	9.6644	9.6247	9.5888	9.5562	9.5264	9.4992	9.4742	9.4511	9.4298	9.41	9.3915	9.3743	9.3582
7	90.	2.623	2.6148	2.6074	2.6008	2.5947	2.5892	2.5842	2.5796	2.5753	2.5714	2.5677	2.5643	2.5612	2.5582	2.5555
7	95.	3.4944	3.4799	3.4669	3.4551	3.4445	3.4349	3.426	3.4179	3.4105	3.4036	3.3972	3.3913	3.3858	3.3806	3.3758
7	97.5	4.5428	4.5206	4.5008	4.4829	4.4667	4.452	4.4386	4.4263	4.415	4.4045	4.3949	4.3859	4.3775	4.3697	4.3624
7	99.	6.275	6.2401	6.2089	6.1808	6.1554	6.1324	6.1113	6.0921	6.0743	6.058	6.0428	6.0287	6.0157	6.0034	5.992
7	99.5	7.9148	7.8678	7.8258	7.7881	7.754	7.723	7.6947	7.6688	7.645	7.623	7.6027	7.5838	7.5662	7.5498	7.5345
8	90.	2.4545	2.4458	2.438	2.431	2.4246	2.4188	2.4135	2.4086	2.4041	2.3999	2.3961	2.3925	2.3891	2.386	2.383
8	95.	3.2016	3.1867	3.1733	3.1613	3.1503	3.1404	3.1313	3.1229	3.1152	3.1081	3.1015	3.0954	3.0897	3.0844	3.0794
8	97.5	4.0761	4.0538	4.0338	4.0158	3.9995	3.9846	3.9711	3.9587	3.9472	3.9367	3.9269	3.9178	3.9093	3.9014	3.894
8	99.	5.4766	5.4423	5.4116	5.384	5.3591	5.3364	5.3157	5.2967	5.2793	5.2631	5.2482	5.2344	5.2214	5.2094	5.1981
8	99.5	6.7633	6.718	6.6775	6.6411	6.6082	6.5783	6.551	6.526	6.5029	6.4817	6.462	6.4438	6.4268	6.4109	6.3961
9	90.	2.3295	2.3205	2.3123	2.305	2.2983	2.2922	2.2867	2.2816	2.2768	2.2725	2.2684	2.2646	2.2611	2.2578	2.2547
9	95.	2.989	2.9737	2.96	2.9477	2.9365	2.9263	2.9169	2.9084	2.9005	2.8932	2.8864	2.8801	2.8743	2.8688	2.8637
9	97.5	3.7441	3.7216	3.7015	3.6833	3.6669	3.652	3.6383	3.6257	3.6142	3.6035	3.5936	3.5845	3.5759	3.5679	3.5604
9	99.	4.924	4.8902	4.8599	4.8327	4.808	4.7856	4.7651	4.7463	4.729	4.713	4.6982	4.6845	4.6717	4.6598	4.6486
9	99.5	5.9829	5.9388	5.8994	5.8639	5.8318	5.8027	5.776	5.7516	5.7292	5.7084	5.6892	5.6714	5.6548	5.6393	5.6248
10	90.	2.233	2.2237	2.2153	2.2077	2.2007	2.1944	2.1887	2.1833	2.1784	2.1739	2.1697	2.1657	2.1621	2.1586	2.1554
10	95.	2.8276	2.812	2.798	2.7854	2.774	2.7636	2.7541	2.7453	2.7372	2.7298	2.7229	2.7164	2.7104	2.7048	2.6996
10	97.5	3.4963	3.4737	3.4534	3.4351	3.4185	3.4035	3.3897	3.377	3.3654	3.3546	3.3446	3.3353	3.3267	3.3186	3.311
10	99.	4.5204	4.4869	4.4569	4.4299	4.4054	4.3831	4.3628	4.3441	4.3269	4.3111	4.2963	4.2827	4.27	4.2581	4.2469
10	99.5	5.4221	5.3789	5.3403	5.3055	5.274	5.2454	5.2192	5.1953	5.1732	5.1528	5.1339	5.1164	5.1001	5.0848	5.0706
11	90.	2.1563	2.1467	2.138	2.1302	2.123	2.1165	2.1106	2.1051	2.1	2.0953	2.0909	2.0869	2.0831	2.0795	2.0762
11	95.	2.7009	2.6851	2.6709	2.6581	2.6464	2.6358	2.6261	2.6172	2.609	2.6014	2.5943	2.5877	2.5816	2.5759	2.5705
11	97.5	3.3044	3.2816	3.2612	3.2428	3.2261	3.2109	3.197	3.1843	3.1725	3.1616	3.1516	3.1422	3.1334	3.1253	3.1176
11	99.	4.2134	4.1801	4.1503	4.1234	4.099	4.0769	4.0566	4.038	4.0209	4.0051	3.9904	3.9768	3.9641	3.9522	3.9411
11	99.5	5.0011	4.9586	4.9205	4.8863	4.8552	4.827	4.8012	4.7775	4.7557	4.7356	4.717	4.6997	4.6835	4.6684	4.6543
12	90.	2.0938	2.0839	2.075	2.067	2.0597	2.053	2.0469	2.0412	2.036	2.0312	2.0267	2.0225	2.0186	2.0149	2.0115
12	95.	2.5989	2.5828	2.5684	2.5554	2.5436	2.5328	2.5229	2.5139	2.5055	2.4977	2.4905	2.4838	2.4776	2.4718	2.4663
12	97.5	3.1515	3.1286	3.1081	3.0896	3.0728	3.0575	3.0434	3.0306	3.0187	3.0077	2.9976	2.9881	2.9793	2.971	2.9633
12	99.	3.9724	3.9392	3.9095	3.8827	3.8584	3.8363	3.8161	3.7976	3.7805	3.7647	3.75	3.7364	3.7237	3.7119	3.7008
12	99.5	4.6741	4.6321	4.5945	4.5606	4.5299	4.502	4.4765	4.453	4.4314	4.4115	4.393	4.3759	4.3599	4.3449	4.3309
13	90.	2.0419	2.0318	2.0227	2.0145	2.007	2.0001	1.9939	1.9881	1.9827	1.9778	1.9732	1.9689	1.9649	1.9611	1.9576
13	95.	2.5149	2.4987	2.4841	2.4709	2.4589	2.4479	2.4379	2.4287	2.4202	2.4123	2.405	2.3982	2.3918	2.3859	2.3803
13	97.5	3.0269	3.0039	2.9832	2.9646	2.9477	2.9322	2.9181	2.9052	2.8932	2.8821	2.8719	2.8623	2.8534	2.8451	2.8372
13	99.	3.7783	3.7452	3.7156	3.6888	3.6646	3.6425	3.6224	3.6038	3.5868	3.571	3.5563	3.5427	3.53	3.5182	3.507
13	99.5	4.4132	4.3716	4.3344	4.3008	4.2703	4.2426	4.2173	4.194	4.1726	4.1528	4.1344	4.1174	4.1015	4.0866	4.0727
14	90.	1.9981	1.9878	1.9785	1.9701	1.9625	1.9555	1.949	1.9431	1.9377	1.9326	1.9279	1.9235	1.9194	1.9155	1.9119
14	95.	2.4446	2.4282	2.4134	2.4	2.3879	2.3768	2.3667	2.3573	2.3487	2.3407	2.3333	2.3264	2.3199	2.3139	2.3082
14	97.5	2.9234	2.9003	2.8795	2.8607	2.8437	2.8282	2.8139	2.8009	2.7888	2.7777	2.7673	2.7577	2.7487	2.7403	2.7324
14	99.	3.6187	3.5857	3.5561	3.5294	3.5052	3.4832	3.463	3.4445	3.4274	3.4116	3.3969	3.3833	3.3706	3.3587	3.3476
14	99.5	4.2005	4.1592	4.1221	4.0888	4.0585	4.031	4.0058	3.9827	3.9614	3.9417	3.9234	3.9064	3.8906	3.8758	3.8619
15	90.	1.9605	1.9501	1.9407	1.9321	1.9243	1.9172	1.9106	1.9046	1.899	1.8939	1.8891	1.8846	1.8804	1.8765	1.8728
15	95.	2.3849	2.3683	2.3533	2.3398	2.3275	2.3163	2.306	2.2966	2.2878	2.2797	2.2722	2.2652	2.2587	2.2525	2.2468
15	97.5	2.836	2.8128	2.7919	2.773	2.7559	2.7403	2.726	2.7128	2.7006	2.6894	2.679	2.6692	2.6602	2.6517	2.6437
15	99.	3.4852	3.4523	3.4228	3.3961	3.3719	3.3498	3.3297	3.3111	3.294	3.2782	3.2635	3.2499	3.2372	3.2253	3.2141
15	99.5	4.0237	3.9827	3.9459	3.9127	3.8826	3.8552	3.8301	3.8071	3.7859	3.7662	3.748	3.7311	3.7153	3.7006	3.6867
16	90.	1.9281	1.9175	1.9079	1.8992	1.8913	1.884	1.8774	1.8712	1.8656	1.8603	1.8554	1.8508	1.8466	1.8426	1.8388
16	95.	2.3335	2.3167	2.3016	2.288	2.2756	2.2642	2.2538	2.2443	2.2354	2.2272	2.2196	2.2125	2.2059	2.1997	2.1938
16	97.5	2.7614	2.738	2.717	2.698	2.6808	2.6651	2.6507	2.6374	2.6252	2.6138	2.6033	2.5935	2.5844	2.5758	2.5678
16	99.	3.372	3.3391	3.3096	3.2829	3.2587	3.2367	3.2165	3.1979	3.1808	3.165	3.1503	3.1366	3.1238	3.1119	3.1007
16	99.5	3.8747	3.8338	3.7972	3.7641	3.7342	3.7069	3.6819	3.6589	3.6378	3.6182	3.6	3.5831	3.5674	3.5527	3.5389
17	90.	1.8997	1.8889	1.8792	1.8704	1.8624	1.855	1.8482	1.842	1.8362	1.8309	1.8259	1.8213	1.8169	1.8128	1.809
17	95.	2.2888	2.2719	2.2567	2.2429	2.2304	2.2189	2.2084	2.1987	2.1898	2.1815	2.1738	2.1666	2.1599	2.1536	2.1477
17	97.5	2.6968	2.6733	2.6522	2.6331	2.6158	2.6	2.5855	2.5721	2.5598	2.5484	2.5378	2.528	2.5187	2.5101	2.502
17	99.	3.2748	3.2419	3.2124	3.1857	3.1615	3.1394	3.1192	3.1006	3.0835	3.0676	3.0529	3.0392	3.0264	3.0145	3.0032
17	99.5	3.7473	3.7066	3.6701	3.6372	3.6073	3.5801	3.5552	3.5323	3.5112	3.4916	3.4735	3.4566	3.4409	3.4262	3.4124
18	90.	1.8747	1.8638	1.8539	1.845	1.8368	1.8294	1.8225	1.8162	1.8103	1.8049	1.7999	1.7951	1.7907	1.7866	1.7827
18	95.	2.2496	2.2325	2.2172	2.2033	2.1906	2.1791	2.1685	2.1587	2.1497	2.1413	2.1335	2.1262	2.1195	2.1131	2.1071
18	97.5	2.6404	2.6168	2.5956	2.5764	2.559	2.5431	2.5285	2.5151	2.5027	2.4912	2.4806	2.4706	2.4613	2.4527	2.4445
18	99.	3.1904	3.1575	3.128	3.1013	3.0771	3.055	3.0348	3.0161	2.999	2.9831	2.9683	2.9546	2.9418	2.9298	2.9185
18	99.5	3.6373	3.5967	3.5603	3.5275	3.4977	3.4705	3.4456	3.4228	3.4017	3.3822	3.3641	3.3472	3.3315	3.3168	3.303

Tabla 10.8: $F^{-1}_{F(m,n)}(p)$ continuación