CAPITULO 1. CURVAS Y SUPERFICIES

1.1. Curvas en el plano

Definición 1 . Definimos curva en el plano

$$C \equiv \alpha : [a,b] \subset R \to R^2$$
$$t \to \alpha(t) = (x(t), y(t))$$

que nos lleva a la ecuación paramétrica de la curva C : $t\in[a,b]$,curva que une el punto A con el punto B del plano

En este punto definimos las características más importantes de las curvas o caminos.

• Una curva C es continua si x (t), y (t) son continúas.

• Una curva C es cerrada si A = B, es decir, si empieza y termina en el mismo punto.

• Una curva C es simple si no pasa dos veces por el mismo punto.

• Una curva C es regular si existen x'(t) y'(t) y son continuas. Cuando ocurre esto salvo en un número finito de puntos se dice que la curva es regular a trozos. Salvo que se indique lo contrario trabajaremos con curvas regulares a trozos.

• Una curva C es rectificable si tiene longitud finita.

• Una curva C es de Jordan si es cerrada y simple.

1.2. Superficies: primeros conceptos

El estudio de las superficies exige una representación analítica de ellas. Vamos a ver diversas representaciones comenzando por el caso de coordenadas cartesianas. Consideremos una referencia afín, $\{0,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ en R^3 donde los vectores $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ forman base ortonormal.

Definición 2 . Una superficie es una aplicación $\bar{r} : D \subset R^2 \to R^3$, es decir

$$\bar{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad , (u,v) \in D$$

La expresión $\bar{r}(u,v) = x(u,v)\bar{i} + y(u,v)\bar{j} + z(u,v)\bar{k}$ recibe el nombre de ecuación vectorial de la superficie. Descomponiendo dicha expresión en sus funciones componentes se obtiene

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

Denominadas ecuaciones paramétricas de la superficie. Los parámetros u y v reciben el nombre de coordenadas curvilíneas de la superficie. Se denomina ecuación explícita de la superficie aquella en que los parámetros son dos las variables por ejemplo (x, y) obteniéndose z = f (x, y) Una relación entre las variables x, y, z de la forma F(x, y, z) = 0 recibe el nombre de ecuación implícita de la superficie.

Una superficie se dice de clase C^k si la función $\bar{r}$ (u, v) es de clase C^k, o lo que es lo mismo, si las funciones x (u, v), y (u, v), z (u, v) son de clase C^k .Si no se dice otra cosa se supondrá que la superficie es de clase C^k

1.3. Algunas superficies importantes

Describiremos aquí las superficies más importantes que aparecen en la práctica. Empezaremos con las principales cuádricas canónicas: Esfera, elipsoide, hiperboloides, paraboloides, y algunos casos de cilindros y conos. A continuación analizaremos las superficies de revolución y traslación para acabar con una pincelada sobre las superficies regladas, que serán analizadas con más detenimiento posteriormente. Esta clasificación que hemos realizado no es excluyente. Por ejemplo un cilindro circular es una superficie de revolución y reglada.

La esfera de ecuación implícita $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, admite como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v & -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ y = a\cos u \,\mathrm{sen}\, v & 0 \le v < 2\pi \\ z = a\,\mathrm{sen}\, u \end{cases}$$

El elipsoide (Fig.1) de ecuación implícita $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, admite como ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = a\cos u \cos v & -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2} \\ y = b\cos u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c \operatorname{sen} u & \end{cases}$$

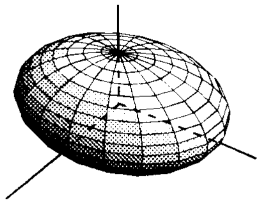

Fig. 1. Elipsoide

Paraboloide elíptico: Tiene por ecuación explicita: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ .Las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\,u\cos v & 0 \le u < \infty \\ y = b\,u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = u^2 & \end{cases}$$

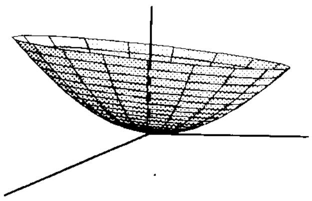

Fig. 2. Paraboloide elíptico

Si a = b el paraboloide se denomina circular.

Paraboloide Hiperbólico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ es la ecuación del paraboloide hiperbólico (Fig.3). La intersección de esta superficie con planos z = Cte. son hipérbolas. Unas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\,u & -\infty < u < \infty \\ y = b\,v & -\infty < v < \infty \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

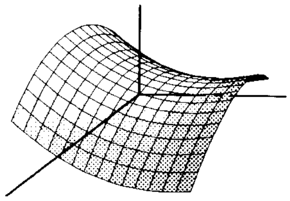

Fig.3.Paraboloide hiperbólico

Hiperboloide de una hoja: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (Fig. 4). Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\,\cosh u \cos v & -\infty < u < \infty \\ y = b\,\cosh u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c \operatorname{senh} u \end{cases}$$

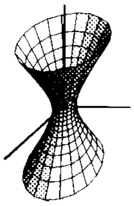

Fig. 4. Hiperboloide de una hoja

Hiperboloide de dos hojas: $\dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ .Unas ecuaciones paramétricas de la primera hoja son

$$\begin{cases} x = a \operatorname{senh} u \cos v & 0 \le u < \infty \\ y = b \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v & 0 \le v < 2\pi \\ z = c \cosh u \end{cases}$$

y unas ecuaciones paramétricas de la segunda hoja son

$$\begin{cases} x = a \operatorname{sen} h\, u \cos v & 0 \leq u < \infty \\ y = b \operatorname{sen} h\, u \operatorname{sen} v & 0 \leq v < 2\pi \\ z = .- c \cos u & \end{cases}$$

Cilindro circular con generatrices paralelas al eje OZ, tiene por ecuación implícita $x^2 + y^2 = a^2$. Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a \cos v & -\infty < u < \infty \\ y = a \operatorname{sen} v & 0 \leq v < 2\pi \\ z = u & \end{cases}$$

Cono circular de vértice el origen puede expresarse en forma $x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$

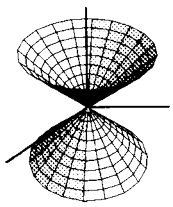

Fig. 5: Cono circular

Unas posibles ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = a\, u \cos v & -\infty < u < \infty \\ y = a\, u \operatorname{sen} v & 0 \leq v < 2\pi \\ z = u & \end{cases}$$

1.4. Primeros conceptos sobre superficies

Definición 3 . Sea la superficie S definida en forma implícita por F(x, y, z) = 0, donde la función F es al menos de clase C^1. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie S, esto es, verifica $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ .El punto P_0 se dice punto singular de S sí

$$|F_x(x_0, y_0, z_0)| + |F_y(x_0, y_0, z_0)| + |F_z(x_0, y_0, z_0)| = 0$$

En caso contrario el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ recibe el nombre de punto regular.

Sea la superficie S de ecuaciones paramétricas

$$\bar{r}(u,v)=\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

donde **r** (u, v) es al menos de clase C^1 en un entorno de (u, v) $\in$ D.

El punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ =(x (u_0, v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0)) es un punto regular de S si se verifica $\left(\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right)_{(u_0,v_0)} \neq 0$ que es equivalente a decir que la matriz tiene rango dos.

Un punto de la superficie S es punto singular de S si no es regular.

El que un punto sea singular para una superficie expresada en forma implícita es algo inherente a la superficie. Así por ejemplo, el punto (0, 0, 0) es un punto singular para el cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, que corresponde a su vértice.

Sin embargo, ser punto singular para una superficie expresada en forma paramétrica puede depender de la parametrización elegida, pudiendo un punto ser singular para una parametrización y regular para otra.

Los dos ejemplos anteriores muestran que hay dos tipos de puntos singulares: Esenciales, que son debidos a la "geometría" de la superficie y que son independientes de la parametrización de la superficie y artificiales, que se deben a la parametrización elegida para la superficie.

En todo lo que sigue supondremos que todos los puntos de una superficie son regulares. En caso de existencia de puntos singulares se pondrá de manifiesto de forma explícita.

1.5. Vectores normales a una superficie. Plano tangente

Un vector normal a la superficie $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ en un punto regular P, correspondiente a los valores (u_0, v_0) de los parámetros, es cualquier vector que tenga la dirección del vector

$$\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right)_{(u_o,v_0)} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

Si la superficie viene expresada en la forma implícita, $F(x, y, z) = 0$, un vector normal a la superficie, en un punto regular $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de ella, viene dado por el vector $(F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0,y_0,z_0))$

Un vector normal unitario será el vector $\nu_{(u_0,v_0)} = \dfrac{\left(\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right)_{(u_0,v_0)}}{\left|\left(\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right)_{(u_0,v_0)}\right|}$

El plano tangente a la superficie $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$ en un punto regular P de coordenadas (x_0, y_0, z_0) correspondiente a los valores (u_0, v_0) de los parámetros, es el plano que pasa por P y tiene como vector característico un vector normal a la superficie en P. Siendo $\overline{r_*} = (x, y, z)$ una ecuación del plano tangente será

$$\left(\bar{r}^* - \bar{r}(u_0, v_0)\right).\left(\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right)_{(u_0,v_0)} = 0$$

que puede expresarse en la forma

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0$$

El plano tangente contiene a los vectores $\bar{r}_u$, $\overline{r_v}$ lo que nos permitirá deducir, en el apartado siguiente, que dicho plano contiene a todas las rectas tangentes a curvas que estén contenidas en la superficie y pasen por el punto $\bar{r}(u_0, v_0)$

Se denomina recta normal a la superficie en un punto regular P, correspondiente a los valores (u_0, v_0) de los parámetros, a la recta que pasa por P y tiene como vector director un vector normal a la superficie en P. Una ecuación vectorial de la recta normal será

$$\overline{R} = \bar{r}(u_0, v_0) + \lambda\, \bar{r}(u_0, v_0)$$

1.6. Expresiones de una curva sobre una superficie

Sea la superficie $\bar{r} = \bar{r}(u,v)$.Una curva sobre dicha superficie viene dada por una relación entre los parámetros u y v. Esta relación puede adoptar diversas formas:

1. Forma implícita: $\varphi(u, v)=0$ con $|\varphi_u| + |\varphi_v| = 0$

2. Forma explícita: u = φ (v)

3. Forma paramétrica: u=u(λ) , v=v(λ)

4. Forma diferencial: $\frac{dv}{du} = f(u, v)$

La forma diferencial representa una familia de curvas, ya que su integración dará lugar a una expresión de la forma φ(u, v, k)=0, debiéndose fijar alguna condición para determinar la constante k.

5. Forma cuadrática diferencial: $A(u,v)du^2+2B(u,v)du\ dv+C(u,v)dv^2=0$. Vamos a suponer $C \neq 0$. Resolviendo $C\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2B\frac{dv}{du} + A = 0$ se obtienen dos familias de curvas en forma diferencial que son: $\frac{dv}{du} = f_1(u, v), \frac{dv}{du} = f_2(u, v)$ para valores (u, v) tales que $B^2 - AC > 0$.Representa pues dos familias de curvas sobre la superficie.

1.7. Curvas coordenadas sobre una superficie

Las relaciones u=C_1 (Cte.), v=C_2 determinan al variar v y u respectivamente, dos familias de curvas sobre la superficie que reciben el nombre de curvas coordenadas o paramétricas

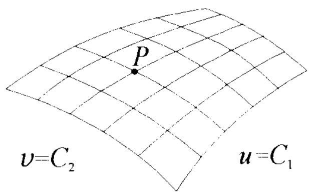

Fig. 8

Las curvas $u = C_1, v = C_2$ fibran la superficie

Si queremos prever el futuro de la matemática, el camino adecuado para conseguirlo es el de estudiar la historia y el estado actual de esta ciencia.

Henri Poincaré

CAPITULO 2.INTEGRALES MULTIPLES

2.1. Integral doble

Sea D un dominio acotado del plano XOY, limitado por una curva cerrada C que se supondrá rectificable. Supongamos que dicho dominio D tiene un área A. Sea f(x,y) una función acotada en el dominio D . Dividamos de forma arbitraria D en n dominios parciales, Δ_1, $\Delta_2 \ldots\ldots \Delta_n$ □□de áreas $\omega_1, \omega_2 \ldots\ldots \omega_n$. Cualquiera que sea la forma en que se ha hecho la partición, se

$$A = \sum_{p=1}^{n} \omega_p \tag{1}$$

Consideremos ahora en cada dominio parcial Δp un punto arbitrario de coordenadas (ωp , ηp) y formemos la siguiente suma

$$\Omega = \sum_{p=1}^{n} f\left(\psi_p , \eta_p\right)\omega_p \tag{2}$$

Llamemos diámetro del dominio al extremo superior de la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos.

Diremos que la función f(x ,y) es integrable en D si el límite de la expresión (2) tiende a un límite finito I cuando $n \to \infty$ de modo que el mayor de los diámetros de los dominios parciales tienda a cero.

$$\boxed{I = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} f\left(\psi_p , \eta_p\right)\omega_p = \iint_D f(x, y)dxdy}$$

2.2. Clase de funciones integrables

1.Toda función continua en un dominio D es integrable en este dominio.

2.Si f(x,y) permanece acotada en D y tiene en dicho dominio un número finito o infinito de puntos de discontinuidad , estando estos puntos distribuidos sobre un número finito de arcos rectificables de curvas planas contenidas en D , la función es integrable en el citado dominio.

2.3. Propiedades de la integral doble

1.Si la función f(x,y) es acotada e integrable en los dominios D y E teniendo estos dominios una parte de frontera común , también es integrable en D+E

$$\iint_{D+E} f(xy)dxdy = \iint_{D} f(xy)dxdy + \iint_{E} f(x,y)dxdy$$

2.Si las funciones f(x,y) y g(x,y) son acotadas e integrables en D , se verifica

$$\int\int_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \int\int_D f(x,y)dxdy + \int\int_D g(x,y)dxdy$$

3.Si f(x,y) es acotada e integrable en D y k es una constante, se verifica

$$\iint_D k\, f(x,y)dxdy = k\iint_D f(x,y)dxdy$$

4.Si f(x,y) es integrable en D , también lo es | f(x,y) | verificándose

$$\left|\int\int_D f(x,y)\, dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|dxdy$$

2.4. Teorema de la media

Si f(x,y) y g(x,y) son funciones acotadas e integrables en un dominio D y g(x,y) tiene signo constante en el citado dominio, se verifica

$$\boxed{\int\int_D f(x,y)\, g(x,y)\, dxdy = \mu \int\int_D g(x,y)\, dxdy} \qquad (3)$$

μ es un número comprendido entre los extremos m y M de f(x,y) en D

Casos particulares

1. Si f(x,y) es continua en el dominio D , tomara el valor μ en un cierto punto (ψ ,η) del dominio y de la expresión (3) se obtiene

$$\int\int_D f(x,y)\, g(x,y)\, dxdy = f(\psi(\eta) \int\int_D g(x,y)\, dxdy \qquad (4)$$

Si f(x,y) es continua en el dominio D y g(x,y)=1 en las fórmulas (3) y (4), se verifica

$$\boxed{\int\int_D f(x,y) dx\, dy = \mu A \Rightarrow \int\int_D f(x,y) dxdy = A f(\psi,\eta)}$$

$f(\psi , \eta)$ es el valor medio de f(x,y) en el dominio D

$$\boxed{f_{medio(x,y)} = \frac{1}{A}\int\int_D f(x\ ,y)\, dxdy}$$

2.5. Calculo de integrales dobles

Si D es un dominio de integración horizontalmente simple o verticalmente simple , la integral doble sobre D de una función continua es una integral iterada. Es decir, sea

$$D = \{(x\ ,y) /\ \ a \le x \le b\ \ ,f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$$

Siendo $f_1(x)$ y $f_2(x)$ funciones continuas en [a,b]. Entonces

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy} \qquad (5)$$

Análogamente, sea

$$D = \{(x,y) / \ c \le y \le d \ , g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$$

Siendo $g_1(y)$ y $g_2(y)$ funciones continuas en [c, d] . Se verifica

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx}$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $I = \iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy$ D es el dominio limitado por el triángulo de lados x =1, y = 0, y =x

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy$$

Calculemos la integral $I_1 = \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy$

Cambio de variable: y =2 x sen t y límites de integración: $t = \frac{\pi}{6}$, $t = 0$

$$I_1 = 4x^2 \int_0^{\pi/6} |\cos t| \cos t\,dt = 4x^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = x^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Por tanto. $I = \int_0^1 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x^2\,dx = \frac{3\sqrt{3} + 2\pi}{18}$

2. Calcular $I = \iint_D x\,y\,dxdy$ donde D es el área limitada por la recta y= x y la curva y= x^2

$$I = \int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{x} y\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^3 - x^5\right)dx = \frac{1}{24}$$

2.6. Suplicación del cálculo de integrales dobles

Sea f(x,y) integrable en un dominio D acotado

1. Si D es simétrico respecto al eje OX y f(x,-y)=-f(x,y) , entonces I=0

2. Si D es simétrico respecto al eje OX y f(x,-y) = f(x,y)

$$I = 2\int\int f(x,y)\,dxdy$$

extendida a la mitad inferior o superior del dominio D

3. Si D es simétrico respecto al eje OY y f(-x , y)= -f(x ,y) , entonces I=0

4. Si D es simétrico respecto al eje OY y f(-x , y)=f(x,y)

$$I = 2\int\int f(x,y)\,dxdy$$

extendida a la mitad izquierda o derecha del dominio D

5. Si D es simétrico respecto al origen de coordenadas y f(- x ,-y)=-f(x,y) , I=0

6. Si D es simétrico respecto al origen de coordenadas y f(- x ,-y)=f(x,y)

$$I = 2\int\int f(x,y)\,dxdy$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $I=\iint_D \left(x^3y+y-x\right)dxdy$ donde D es el dominio $x^2+y^2-1\leq 0$, $x\geq 0$

D es un dominio simétrico respecto al eje OX

$$I=\int\int_D x^3 y\ dxdy+\int\int_D y\ dxdy-\int\int_D x\ dxdy$$

$$\underline{\quad I_1 \quad} \qquad \underline{\quad I_2 \quad} \qquad \underline{\quad I_3 \quad}$$

Cálculo de I_1: $f(x,-y)=-f(x,y)\Rightarrow I_1=0$

Cálculo de I_2

$$f(x,-y)=-f(x,y)\Rightarrow I_2=0$$

Calculo de I_3

$$I_3=-2\int_0^1 x\,dx\int_0^{+\sqrt{1-x^2}}dy=-2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}=-\frac{2}{3}$$

$$\text{Luego }\boxed{I=\frac{-2}{3}}$$

2. Calcular $I=\iint_D \operatorname{sen}\left(x^3+y^3\right)dxdy$ donde D es el dominio $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

D es un dominio simétrico respecto al origen de coordenadas, verificándose:

$\operatorname{sen}[(-x)^3+(-y)^3]=-\operatorname{sen}(x^3+y^3)$

Luego, I=0

2.7. Cambio de variables en integrales dobles

Sea la integral doble $\int\int_D f(x,y)dxdy$ extendida a un dominio plano D limitado por la curva cerrada C.

Se quiere cambiar las variables (x, y) por otras (u ,v) mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = x(u\,,v) \\ y = y(u\,,v) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

La nueva integral se extenderá a un dominio R limitado por una curva T imagen de C . La correspondencia definida por las ecuaciones (6) es biunívoca cuando a cada punto del dominio D limitado por C , le corresponde un único punto del dominio R limitado por T y recíprocamente. Para que la correspondencia sea biunívoca es preciso que el determínate Jacobiano sea $\neq 0$

Se denomina determinante Jacobiano (x,y) con respecto a u y v y se simboliza por $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ al determinante

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Si f(x,y) es continua en D y las funciones x(u ,v) , y(u,v) son derivables con derivadas continuas en R y el Jacobiano anteriormente definido es $\neq 0$ en R , entonces se tiene

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f[x(u,v),y(u,v)]\frac{D(x,y)}{D(u,v)}dudv \qquad (7)$$

El elemento diferencial dx dy se ha tomado positivo . Si queremos considerar positivo du dv , será preciso tomar positivo el jacobiano , lo cual implica que la expresión (7) adopta la forma

$$\boxed{\int\int_\Delta f[x(u,v),y(u,v)]\,|\,J\,|\,du\,dv} \qquad (8)$$

Coordenadas Polares: $x=\rho \, \text{Cos}\, \theta$, $y=\rho \, \text{Sin}\, \theta$

$$\frac{D(x\,,y)}{D(u\,,v)}=\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\boxed{\iint_D f(x\,,y)dxdy=\iint_\Delta f(\rho\cos\theta\,,\rho\,\text{sen}\,\theta)\rho\, d\rho\, d\theta}$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $I=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$ donde D es el área de la lemniscata $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$.

Coordenadas polares

$$I=4\int\int_D \rho^2\rho d\rho d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho^3 d\rho=4a^4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta d\theta=\frac{\pi\, a^4}{2}$$

2.8. Calculo de volúmenes

Se trata de calcular el volumen del cuerpo limitado por la superficie z=f(x,y) el plano XOY y una superficie cilíndrica de generatrices paralelas a O Z , cuya directriz es la curva C del dominio D , en el cual se supondrá f(x,y) positiva e integrable. Este volumen viene dado por la integral doble

$$\boxed{V=\int\int_D f(x,y)dxdy}$$

El volumen comprendido entre dos superficies $z_1=f_1(x,y)$ y $z_2=f_2(x,y)$ siendo $f_2(x,y) > f_1(x,y)$ contenido en un cilindro de base D y generatrices paralelas a OZ viene dado por

$$\boxed{V=\int\int_D [f_2(x,y)-f_1(x,y)]dx\,dy}$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular el volumen limitado por $(x-c)^2+(y-d)^2=R^2$, z=0 y x y =a z

Cambio de variables

$$\left.\begin{array}{l} x-c=X\Rightarrow x=c+X \\ y-d=Y\Rightarrow y=d+Y \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{J(x,y)}{J(X,Y)}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$$

El plano z=0 se transforma en z=0 , la superficie x y = a z se ha transformado en (X+c) (Y + d)= a Z y el cilindro $(x-c)^2+(y-d)^2=R^2$ se ha transformado en $X^2+Y^2=R^2$. Por tanto, el volumen será

$$V=\iint_D z\,dxdy\,,$$

Siendo D= $X^2+Y^2=R^2$

$$V=\frac{1}{a}\iint_D XY\,dXdY+\frac{d}{a}\iint_D X\,dXdY+\frac{c}{a}\iint_D Y\,dXdY+\frac{dc}{a}\iint_D X\,dY$$

Calculemos $I_2=\frac{d}{a}\iint_D X\,dX\,dY$:

f(-X ,Y)=-f(X,Y) y el dominio es simétrico respecto del eje OY. Por tanto $I_2=0$

De la misma forma

$$I_3=\frac{c}{a}\iint_D Y\,d\,X\,dY=0$$

f(X ,-Y)=- f(X,Y) y el dominio es simétrico respecto al eje OX . Igualmente

$$I_1=\frac{1}{a}\iint_D XY\,dX\,dY=0$$

f(-X ,Y)=f(X,Y) y el dominio es simétrico respecto al eje OY.

El valor del volumen será

$$V = \frac{dc}{a} \iint_D dX\, dY = \frac{\pi R^2\, dc}{a}$$

2. Calcular el volumen del sólido determinado por las superficies $x=y^2$, y=0 , z=0 y z + x=1

$$V = \iint_D z\, dx\, dy = \iint_D (1-x)\, dx\, dy = \int_0^1 (1-x)\, dx \int_0^{\sqrt{x}} dy = \frac{4}{15}$$

3. Calcular el volumen común a la esfera y al cilindro de ecuaciones $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2-R\,x= 0$.

Coordenadas polares:

$$V = 4 \iint_D z\, dxdy = 4 \iint_D \sqrt{R^2-\rho^2}\; \rho\, d\rho\, d\theta$$

D es el primer cuadrante del círculo de ecuación: $\rho=R\cos\theta$

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-\rho^2}\; \rho\, d\rho = \frac{2R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$$

2.9.Integrales triples

Sea K un dominio acotado del espacio limitado por una superficie cerrada que constituye su contorno. Sea V el volumen de K y consideremos la función f(x,y,z) acotada en K . Descompongamos de forma arbitraria mediante superficies auxiliares el dominio K en n dominios parciales Δ_1 , $\Delta_2 \ldots\ldots \Delta_n$ de volúmenes v_p y elijamos en cada dominio parcial Δ_p un punto de coordenadas $(\psi_p , \eta_p , \theta_p)$. Diremos que f(x, y, z) es integrable en K si la suma

$$\sigma = \sum_{p=1}^{n} f\left(\psi_p, \eta_p, \theta_p\right) v_p$$

tiene limite finito cuando $n \to \infty$ de forma que el mayor de los diámetros de los dominios parciales tienda a cero , cualquiera que sea la forma de realizar la partición y elegir un punto (ψ_p , η_p , θ_p) en cada uno de los dominios parciales. El valor I es

$$\boxed{I = \iiint_V f(x, y, z)dxdydz}$$

2.10. Cálculo de integrales triples

Vamos a suponer que el dominio K que se proyecta en el dominio D del plano XOY , está limitado superior e inferiormente por las superficies S_1 y S_2 de ecuaciones $z=z_1(x,y)$, $z=z_2(x,y)$, con $z_2 \geq z_1$, siendo ambas superficies continuas en D . El dominio D está limitado por una curva simple cerrada C . K se supondrá limitado lateralmente por una superficie cilíndrica de generatrices paralelas a OZ

Supongamos que toda paralela a OZ trazada desde un punto (x ,y) interior a C corta al contorno C en dos puntos de cotas $z_1(x,y)$ y $z_2(x,y)$ siendo $z_1 < z_2$ y suponiendo que toda paralela a OY que corte al eje OX en un punto x comprendido entre a y b , corta a la curva C en sólo dos puntos de coordenadas $f_1(x)$, $f_2(x)$ con $f_1(x) < f_2(x)$ siendo estas funciones continuas. El cálculo de la integral se reduce a tres integraciones reiteradas.

$$\boxed{\iiint_K f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx\int_{f_1(x)}^{f_2(x)}dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x, y, z)dz = \iint_D dx\,dy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz}$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular la integral $\iiint_D x^2\, y z^3\, dx\, dy\, dz$ extendida al volumen comprendido entre el plano X Z y las dos superficies cilíndricas $y^2= a\,x - x^2$, $z^2 = 4\,a\,x$

$$I = 2\int\int x^2 dxdy \int_0^{\sqrt{4ax}} z^3 dz = 4a^2 \int_0^a x^4 dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} y\, dy = 2a^2 \int_0^a x^4 \left(ax - x^2\right) dx = \frac{2a^9}{21}$$

2. Calcular $\iiint_D \left(\frac{x^2\, y}{1+z^2} - x\, z^2\right) dx\, dy\, dz$ donde D es el paralelepípedo construido sobre los ejes de longitudes 1, 2, 1.

$$\iiint_D \left(\frac{x^2\, y}{1+z^2} - x\, z^2\right) dx\, dy\, dz = \int_o^1 dx \int_0^2 dy \int_0^1 \left(\frac{x^2\, y}{1+z^2} - x\, z^2\right) dz = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}$$

3. Calcular $\iiint_D z\, dx\, dy\, dz$ donde D es el primer octante positivo limitado por los planos y=0 , z=0 , x+ y=2 , 2y + x = 6 y el cilindro y2+z2=4

$$. \iiint_D z\, dx\, dy\, dz = \int_0^2 dy \int_{2-y}^{6-2y} dx \int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\, dz = \frac{26}{3}$$

2.11 .Cambio de variables en integrales triples

Sea la integral $\iiint_K f(x, y, z) dxdydz$ extendida al dominio K. Se quieren cambiar las variables x, y, z por otras u, v, w mediante las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{array}\right\} \qquad (9)$$

La nueva integral se extenderá a un dominio K' imagen de K por las ecuaciones (9) . La correspondencia que definen las ecuaciones (9) es biunívoca cuando a cada punto de K le corresponde un único punto de K'. Recíprocamente, para que la correspondencia sea biunívoca es preciso que el jacobiano

En estas condiciones se tiene

$$\boxed{\int\int\int_{K} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{K'} f\left[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\right] |J| dudvdw}$$

Coordenadas Cilíndricas

$$x = \rho\cos\theta\sigma y = \rho\,\mathrm{sen}\theta, z = z$$

$$\frac{J(x,y,z)}{J(\rho,\theta,z)} = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\theta\cos\varphi \\ z &= \rho\,\mathrm{sen}\varphi \end{aligned}$$

θ varía de 0 a 2π , φ varía de $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, ρ varía de 0 a $+\infty$

En estas condiciones se barre todo el espacio. Cálculo del jacobiano

$$\frac{J(x,y,z)}{J(\rho,\theta,\varphi)} = \rho^2\cos\varphi$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $\boldsymbol{I} = \int\int\int_{D} x^2\,\mathrm{sen}\sqrt{x^2+4y^2+9z^2}\,dx\,dy\,dz$ donde D es es el dominio limitado por la elipse $x^2+4y^2+9z^2=1$

Transformemos el elipsoide en una esfera mediante el cambio

$$x = X \ , \ y = \frac{1}{2}Y \ , \ z = \frac{1}{3}Z$$

El elipsoide se ha transformado en la esfera $X^2+Y^2+Z^2=1$

$$\frac{J(x\,,y\,,z)}{J(X\,,Y\,,Z)}=\frac{1}{6}$$

Por tanto: $I=\frac{1}{6}\iiint X^2\mathrm{sen}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,dXdYdZ$

Pasando a coordenadas esféricas

$$I=\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi\int_0^1\rho^4\mathrm{sen}\rho\,d\rho=\frac{2\pi}{9}[\cos 1+2\,\mathrm{sen}\,1-2]$$

2. Calcular $\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ D es el dominio limitado por la superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2$

$-2\,R\,y=0$

Pasando a coordenadas esféricas

$I=\iiint_{D'}\frac{\rho^2\cos\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta}{\rho|\cos\varphi|}$ Donde D' es el dominio de ecuación: $D'=2R\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2R\mathrm{sen}\theta R\mathrm{se}\varphi}\rho d\rho=\pi^2\,R^2$$

2.12. Simplificación en el cálculo de integrales triples

1. f(-x,y,z)=-f(x,y,z) y dominio simétrico respecto al plano $x=0 \Longrightarrow I=0$

2. f(x,-y, z)=-f(x, y, z) y dominio simétrico respecto al plano $y=0 \Longrightarrow I=0$

3. f(x, y,-z)=-f(x, y, z) y dominio simétrico respecto al plano z=0 $\Longrightarrow I=0$

4. f (-x,-y, z)=-f(x, y, z) y dominio simétrico respecto al eje O Z $\Longrightarrow I=0$

5.f(-x,y,-z)=-f(x,y,z) y dominio simétrico respecto al eje OY $\Longrightarrow$ I=0

6. f(x,-y,-z)=-f(x, y, z) y dominio simétrico respecto al eje OX $\Longrightarrow$I=0

7. f(-x,-y,-z)=-f(x,y,z) y dominio simétrico respecto al origen $\Longrightarrow$I=0

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $\int\int\int_K x\,\mathrm{sen}(x,y,z)\cos\sqrt{x^2y^2+z^2+1}\,dxdydz$ siendo K: $x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}=9$

f(x,-y ,z)=-f(x,y,z) y el dominio es simétrico respecto al plano y=0 .Por tanto I= 0

Ejercicios de aplicación

1. Calcular el volumen del elipsoide $(x/a)^2+(y/b)^2+(z/c)^2=1$

Al ser el elipsoide simétrico respecto a los planos coordenados, podemos hallar la octava parte del volumen y el volumen total será

$$V=8\iiint dxdydz$$

Cambio de variables: $x=au^{1/2}$, $y=bv^{1/2}$, $z=cw^{1/2}$

El nuevo dominio es el limitado por los planos: u=0 ,v=0 , w=0 , u+v+w=1

$$\frac{J(x,y,z)}{J(u,v,w)}=\frac{1}{8}a\,b\,c\,u^{\frac{-1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}\,w^{-\frac{1}{2}}$$

$$I=8\int\int\int dxdydz=8\int\int\int\frac{1}{8}a\,b\,c\,u^{-\frac{1}{2}}\,v^{-\frac{1}{2}}\,w^{-\frac{1}{2}}dudvdw$$

Por tanto: $I = abc\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = \dfrac{4}{3}\pi\, a\, b\, c$

2.13. Teoremas de Guldin

Primer Teorema El área engendrada por una línea plana al girar alrededor de un eje de su plano, es igual al producto de la longitud de la línea por la circunferencia descrita por su centro de gravedad.

El área engendrada por una curva regular al girar alrededor del eje OX viene dada por

$$\boxed{A = 2\pi\int_a^b y\,ds = 2\pi\,\eta\, L}$$

Segundo Teorema El volumen engendrado por un recinto plano al girar alrededor de un eje de su plano es igual al producto del área de dicho recinto por la circunferencia descrita por su c. d. g .

$$\boxed{V = 2\,\pi A\eta}$$

Ejercicios de aplicación

1. Hallar el centro de gravedad de un cuadrante de círculo.

Hay simetría respecto de la bisectriz $y = x$, con lo cual $\xi = \eta$ Apliquemos el teorema de Guldín

$$V = 2\,\pi\,\eta\, A \Rightarrow \eta = \frac{V}{2\,\pi\, A} = \frac{\frac{2}{3}\pi R^3}{2\pi\frac{\pi\, R^2}{4}} = \frac{4\,R}{3\pi}$$

ya que al girar alrededor del eje OX , el cuadrante de círculo engendra media esfera de volumen $\frac{2}{3}\pi R^3$.

2. Hallar el c. d. g del recinto formado por el eje OX, la parábola y=x2 y las rectas x = -1 , x=1

Por ser el eje OY de simetría $\xi = 0$. Apliquemos el segundo teorema de Guldin:

$$V = 2\pi\,\eta\,A \Rightarrow \eta = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\pi\int y^2\,dx}{2\pi\int y\,dx} = \frac{1}{2}\frac{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx} = \frac{3}{10}$$

Ejercicios de aplicación

1. Calcular $I = \int\int \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$ extendida al primer cuadrante del círculo $x^2+y^2=1$.

Coordenadas polares

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho$$

Calculemos la integral $I_1 = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}}\,\rho\,d\rho$

Cambio $\rho^2 = u$

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}\,du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-u)du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcosen} u + \sqrt{1-u^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-1\right] \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-1\right]\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$$

2. Calcular el volumen limitado por la superficie $x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$

La superficie es simétrica respecto a los tres ejes de coordenadas.

$$z=\pm\frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}\left(1-x^{\frac{4}{3}}-4y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$z=\frac{1}{5^{\frac{3}{2}}}\left(1-x^{\frac{4}{3}}-4y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Al realizar la integral sobre el octante positivo, adoptamos el signo positivo.

$$V=8\iint z\,dxdy=\frac{8}{5^{\frac{3}{2}}}\iint\left(1-x^{\frac{4}{3}}-4y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dxdy$$

Transformemos la integral en una de Dirichlet mediante el cambio de variables

$$x^{\frac{4}{3}}=u\rightarrow x=\pm u^{\frac{3}{4}} \quad , \; 4y^{\frac{2}{3}}=v\rightarrow \; y=\pm\left(\frac{1}{4}v\right)^{\frac{3}{2}}$$

Adoptaremos el signo (+) ya que en el primer octante $x\geq 0$, $y\geq 0$. Por otra parte la proyección de la superficie sobre el plano z=0 se transforma en el recinto $u\geq 0$, $v\geq 0$, $u+v=1$

$$\frac{J(x,y)}{J(u,v)}=\frac{9}{64}\,u^{\frac{-1}{4}}\,v^{\frac{1}{2}}$$

$$V=\frac{72}{320\sqrt{5}}\iint u^{\frac{-1}{4}}\,v^{\frac{1}{2}}\,(1-u-v)^{\frac{3}{2}}dudv=\frac{8}{5^{\frac{3}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\,\Gamma(\frac{3}{2})\,\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{19}{4})}=\frac{9\pi}{1925\sqrt{5}}$$

3. Hallar el volumen común al paraboloide $z=2x^2+y^2$ y al cilindro $z=4-y^2$

Primer método

$$V = \iint z\,dxdy$$

$$z = z_{cilindro} - z_{paraboloide} = 4 - y^2 - 2x^2 - y^2 = 4 - 2x^2 - 2y^2$$

$$z_{paraboloide} = z_{cono}$$

Recinto proyección sobre el plano X Y: $2x^2+2y^2=4$. Pasando a coordenadas polares el nuevo dominio es $\rho = \sqrt{2}$

$$V = 4\iint \left(4 - 2x^2 - 2y^2\right)dxdy = 4\int\int \left(4 - 2\rho^2\right)\rho\, d\rho d\theta =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho = 4\pi$$

Segundo método

$$V = \left|\iint z dxdy\right|$$

$$z = z_{paraboloide} - z_{cilindro} = 2x^2 + 2y^2 - 4$$

$$V = \left|\iint \left(2x^2 + 2y^2 - 4\right)dx\, dy\right| = 4\left|\iint \left(2\rho^2 - 4\right)\rho\, d\rho\, d\theta\right| =$$

$$= 4\left|\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - 4\int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right| = 4\pi$$

4. Calcular el volumen engendrado por la superficie $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1$ y los planos $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$V = \int\int\int dxdydz$, extendida al primer octante de dicha superficie.

Pongamos ahora la superficie en la forma siguiente

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{a}\right)^{2/3}=1$$

Cambio de variables

$$x=au^{3/2}, y=av^{3/2}, z=aw^{3/2}$$

$$\frac{J(x,y,z)}{J(u,v,w)}=\frac{27}{8}a^3u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}}$$

$V=\int\int\int dxdydz=\frac{27}{8}a^3\int\int\int u^{\frac{1}{2}}\ v^{\frac{1}{2}}\ w^{\frac{1}{2}}dudvdw$, donde el dominio es el limitado por los planos u=0 , v=0 , w=0 , u+v+w=1 .

$$V=\frac{27}{8}a^3\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}=\frac{\pi a^3}{70}$$

5. Calcular $I=\iiint\left(x^3+y^3+z^3\right)dxdydz$ extendida al interior de la curva $x^2+y^2+z^2-2\,a(x+y+z)+2\,a^2=0$

El recinto pertenece a la esfera: $(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$ (10)

Hagamos una transformación de ejes al punto (a ,a ,a)

$$\begin{aligned}x-a=X\rightarrow x=a+X\\ y-a=Y\rightarrow y=a+Y\\ z-a=Z\rightarrow z=a+Z\end{aligned}$$

La ecuación (10) se transforma en la esfera $X^2+Y^2+Z^2=a^2$

$$I=\iiint\left[(a+X)^3+(a+Y)^3+(a+Z)^3\right]dXdYdZ$$

Por simetría, los términos de potencia de grado impar se anulan y, por tanto, el valor de la integral será

$$I = 3\iiint \left(a^3 + aX^2 + aY^2 + aZ^2\right) dXdYdZ$$, extendida a la esfera $X^2+Y^2+Z^2=a^2$

Transformemos la esfera mediante el cambio

$$X = a\,u^{\frac{1}{2}}, Y = a\,v^{\frac{1}{2}}, Z = a\,w^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{J(X,Y,Z)}{J(u,v,w)} = \frac{1}{8} a^3\, u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}}$$

Podemos calcular la integral extendida al recinto limitado por los planos u=0 , v=0 w=0 , u+v+w=1 y multiplicar por 8

$$I = 24\iiint \left(a^3 + aX^2 + aY^2 + aZ^2\right) dXdYdZ = 3a^6 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} = 4\,\pi\, a^6$$

$$I_2 = 24\,a \iiint X^2 dXdYdZ = 3a^6 \iiint v^{\frac{1}{2}}\, u^{-\frac{1}{2}}\, w^{-\frac{1}{2}} dudvdw = \frac{12\,\pi\, a^6}{15}$$

De la misma forma se obtiene: $I_3 = \frac{12\pi 2^6}{15}$, $I_4 = \frac{12\pi 2^6}{15}$

Por tanto: $I = \frac{32\,\pi\, a^6}{5}$

6. Un sólido está limitado por los planos x=0 , y=0 , z=0 , $x/a + y/b + z/c = 1$. La densidad del sólido en el punto (x,y,z) es , $k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1\right)^{-4}$ donde k es una constante. Calcular la masa del sólido.

$$m = \iiint_V \delta(x\,,y\,z)dv = \iiint_V k\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}+1\right)^{-4} dxdydz$$

Primer cambio de variables: x= a X , y= b Y , z= c Z

$$\frac{J(x\,,y\,,z)}{J(X,Y,Z)}=a\,b\,c$$

$m=k\,abc\iiint_D (X+Y+Z+1)^{-4}\ dXdYdZ$: D es el volumen limitado por los planos: X=0 , Y=0 , Z=0 , Z+X+Y+1=0

Segundo cambio de variables

$$\left.\begin{array}{l} X=U(1-V) \\ Y=U\,V(1-W) \\ Z=U\,V\,W \end{array}\right\}$$

$$\frac{J(X,Y,Z)}{J(U,V,W)}=U^2VdUdVdW$$

$$m=k\,abc\iiint_{D'} (U+1)^{-4}\,U^2\ V\,dUdVdW$$

D' es el volumen limitado por los planos U=0 ,V=0 W=0 y por los planos U=1 ,V=1 ,W=1 . Por tanto

$$m=k\,abc\int_0^1 \frac{U^2}{(U+1)^4}\,dU\int_0^1 V\,dV\int_0^1 dW=\frac{k\,a\,b\,c}{48}$$

Ejercicios propuestos

1. Calcular $\iint_D x\,y\,dxdy$ extendida a la parte del cuadrado $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$ situada entre la diagonal y=x y la curva $y=x^3$

SOLUCION: $\frac{1}{16}$

2. Calcular $\iint_D x\,e^{-x^2/y}\,dxdy$ extendida a la porción de plano limitada por x=0 , y= x^2 , y =1, y=2

SOLUCION: $\dfrac{3(e-1)}{4e}$

3. Calcular $\iint_D \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy$ a lo largo del primer cuadrante del círculo $x^2+y^2=a^2$.

SOLUCION: $\dfrac{2a^3}{3}$

4. Calcular $\iint_D x\,dx\,dy$ siendo D el recinto plano limitado por las líneas x =0, y =0, $x^2+y^2=10$, x y=3.

SOLUCION: $\dfrac{\sqrt{1000}-8}{3}$

5. Calcular $\iint_D (2x^2+y^2+1)dxd\boldsymbol{y}$ siendo D el cuadrante de vértices (1,0), (2,1), (1,2) y (0,1).

SOLUCION: 9

6. Calcular $\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho d\rho d\theta$ extendida al círculo de centro (a,0) y radio a , $\rho = 2a\cos\theta$

SOLUCION: $\dfrac{16a^3}{3}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)$

7. Calcular $\iint_D \dfrac{x^2+y^2-2ay}{y}dxdy$ extendida al dominio D limitado por la semicircunferencia x^2+y^2-2 a y=0, ($0 \le y \le a$) y por el diámetro y=a (-a $\le x \le$ a).

SOLUCION: $\dfrac{a^3}{9}(4+3\pi)$

8. Calcular $\iint_D \rho^2 \cos\theta \, d\upsilon \, d\theta$ siendo D el recinto plano limitado por la cardiode $\rho = 1+\cos\theta$.

SOLUCION: $\frac{5\pi}{4}$

9. Calcular $\iint_D xy\,dxdy$ extendida al recinto D limitado en el primer cuadrante por los círculos $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x=0$ y el eje OX.

SOLUCION: 10

10. Hallar las áreas de las figuras limitadas por las siguientes curvas:

a) $x\,y = a^2$, $x+y = 5\,a/2$, $(a > 0)$

b) $(x-y)^2 + x^2 = a^2$, $(a > 0)$

SOLUCION: a) $\left(\frac{15}{8} - 2L2\right)a^2$ b) πa^2

11. Calcular $\iint \frac{(x^2-y^2)x - 2y^2x}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ donde D es el primer cuadrante del círculo de centro el origen y radio 3.

SOLUCION: -3

12. Calcular el volumen comprendido entre $x^2+y^2 = a\,z$, $x^2+y^2 = ax$ y el plano z=0

SOLUCION: $\frac{3\pi\pi^3}{32}$

13. Calcular el volumen del cuerpo limitado por el paraboloide : $x^2-y^2=2\,a\,z$ y el cilindro $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ y el plano XY

SOLUCION: $\frac{a^3}{6}$

14. Calcular $I = \int\int_D \arccos\left(x^2 + y^2\right)dxdy$ extendida al dominio $\rho = \sqrt{\cos\theta}$ □

SOLUCION: π-2

15. Dado el cambio de variables: v=x+y , u=- x + y , calcular

$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}\, dx\, d\boldsymbol{y}$, siendo D el triángulo de vértices (0, 0) , (0, 1) , (1, 0).

SOLUCION: $\frac{1}{2}\text{Sh}1$

16. Calcular el volumen común a los dos cilindros circulares $x^2+y^2=a^2$, $x^2+z^2=a^2$

SOLUCION: $\frac{16a^3}{3}$

17. Calcular $\iint_D x^2\left(b^2 x^2 + a^2 y^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\, d\boldsymbol{y}$ donde D es el área encerrada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

SOLUCION: $\frac{\pi a^4 b^2}{5}$

18. Calcular $\iint_D \left(y^2 - 2y + 2\right)dx\, dy$ donde D es el dominio que representa la elipse de ecuación 4 x^2+9 y^2-16 x+18 y+24=0 .

SOLUCION: $\frac{181\pi}{216}$

19. Calcular el volumen limitado por el paraboloide $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$ y los planos x=0 ,y=0 , a x + b y =c

SOLUCION: $\frac{c^4}{24ab}\left(\frac{1}{a^2p}+\frac{1}{b^2q}\right)$

20. Calcular el volumen limitado por el conoide $cz = y\sqrt{a^2-x^2}$,el plano XOY y los planos x=0 ,x=a , y=0 , y=b .

SOLUCION: $\frac{\pi a^2b^2}{8c}$

21. Calcular el volumen limitado por el plano XY, el cilindro $x^2+y^2-2ax=0$ y el cono circular recto que tiene su vértice en O, siendo su eje OZ y su ángulo en el vértice de 90 grados

SOLUCION: $\frac{32a^3}{9}$

22. Hallar el volumen comprendido entre el paraboloide $x^2+y^2=a(a-z)$ y el plano z=0 .

SOLUCION: $\frac{\pi a^3}{2}$

23. Hallar el área limitada por las parábolas de ecuaciones $y^2=x$, $y^2=2x$, $x^2=y$, $x^2=3y$.

SOLUCION: 2/3

24. Calcular $\iint_D \operatorname{sen}\sqrt{4x^2+9y^2}\,dx\,dy$ siendo D es el dominio limitado por la elipse $4x^2+9y^2=1$.

SOLUCION: $\frac{\pi}{3}(\operatorname{sen}1-\cos 1)$

25. Calcular el volumen encerrado por la superficie de ecuación $x^2+y^2=4az$ y el plano $x+y+2z=4a$

SOLUCION: $\frac{25\pi a^3}{2}$

26 Calcular el volumen encerrado por las superficies z=0 y $z = y^2 \, e^{-\left(x^2+y^2\right)}$.

SOLUCION: $\dfrac{\pi}{8}$

27. Calcular el volumen comprendido entre los planos x=0 , y=0 ,z=0 y los cilindros $x^2+z^2=25$ $y^2+z^2=25$

SOLUCION: $\dfrac{250}{3}$

28. Calcular $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$ siendo D el dominio limitado por la astroide de ecuación $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

SOLUCION: $I = \dfrac{21\,\pi\,a^4}{2^8}$

29. Calcular $\iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$ donde D es el área del triángulo limitado por los ejes y la recta $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

SOLUCION: $I = \dfrac{a\,b}{12}\left(a^2+b^2\right)$

30. Calcular $I = \iint_D \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$ donde D es el primer cuadrante del círculo de ecuación $x^2+y^2=9$.

SOLUCION: I= 27 / 2

31. Calcular el volumen limitado por los planos z =0 , z =x+y , x=0 , y=a ,y=2a y el cilindro parabólico $y^2= a\,x$.

SOLUCION: $\dfrac{137a^3}{20}$

32. Calcular $\iint_D \dfrac{x^5\, y-2\,x}{1+y^2}\,dx\,dy$ donde D es el dominio limitado por el cuadrilátero de vértices (0, 0), (2 ,0), (2 ,1) y (0,1).

SOLUCION: $I=\dfrac{16}{3}\ L\,2-\pi$

33. Calcular $I=\iint_D x^2\ y^2\ \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\,dy$ donde D es el dominio definido por $x\geq 0$, $y\geq 0$, $x^2+y^2\leq 1$.

SOLUCION: $I=\dfrac{\pi}{210}$

34. Calcular $I=\iint_D \left(x^2+y^2\right)dx\,dy$ donde D es el segmento parabólico de ecuación $x\leq a$, $y^2\leq 2p\ x$.

SOLUCION: $I=4\,a^2\ \sqrt{2\,p\,a}\left(\dfrac{a}{7}+\dfrac{2\,p}{15}\right)$

35. Calcular $I=\iint_D x^2\ y^2\ \sqrt{1-x^2-y^2}\ dx\,dy$ donde D es el área del triángulo limitado por las rectas $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.

SOLUCION: $I=\dfrac{140\ L\ 2-128}{225}$

36. Hallar el volumen comprendido entre la superficie $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ y los planos $x\geq 0$, $y\geq 0$ $x\geq 0$.

SOLUCION: $\dfrac{1}{90}$

37. Calcular la integral $I=\iiint \dfrac{dxdydz}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$ extendida al dominio $x^2+y^2+z^2=1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ $x\geq 0$.

SOLUCION: $\frac{\pi^2}{8}$

38. Calcular $\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z)^3}$ extendida al volumen V limitado por los planos $x\geq 0$, $y\geq 0$ $x\geq 0$, $x+y+z\leq 1$

SOLUCION: $I=\frac{1}{2}\left[L\,2-\frac{5}{8}\right]$

39. Calcular $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, extendida al octante positivo de la esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2=1$

SOLUCION: $\frac{\pi}{16}$

40. Calcular el centro de gravedad de la sección comprendida entre la semielipse de semiejes a y b y el semicírculo de radio b .

SOLUCION: $\frac{4(a+b)}{3\pi}$