La naturaleza no se ve desconcertada por las dificultades del análisis

Agustín Fresnel

CAPITULO 3.TEORIA VECTORIAL DE CAMPOS

Los teoremas básicos que en este capítulo estudiaremos tuvieron su origen en la física. El teorema de Gauss (1777 - 1855) o teorema de la divergencia surgió en relación con la electrostática. Debemos dar crédito conjunto por este teorema al matemático ruso Ostrogradsky (1801-1861). El teorema de Stokes (1819-1903) fue sugerido por primera vez en una carta a Stokes por el físico Lord Kelvin en 1850 y fue usado por Stokes en el examen para el premio Smith en 1854 .

3.1. Introducción

Sea la aplicación f: $V^n \longrightarrow V^m$ entre dos espacios vectoriales euclídeos de dimensiones respectivas n y m. Cuando V^m es el conjunto de los números reales, que como sabemos tiene estructura de espacio vectorial de dimensión 1, se tienen las funciones escalares de variable vectorial (campos escalares). Así por ejemplo , en la transmisión del calor a través de un cuerpo en régimen estacionario , la temperatura puede variar de unos puntos a otros del cuerpo, pero en un punto determinado será siempre la misma, luego la temperatura es una función de punto.

Cuando n >1 , m >1 se tienen las funciones vectoriales de variable vectorial (campos vectoriales). Son regiones del espacio en las que se manifiestan magnitudes físicas de índole vectorial. La magnitud física que define el campo y que generalmente llamamos vector, tendrá significaciones físicas diversas. Así en los campos gravitatorios será una fuerza, en los magnéticos o eléctricos será la inducción o la intensidad. Estos campos poseen un significado intrínseco, es decir son independientes del sistema de coordenadas que se emplee propiedad que les hace ser de gran interés en la física - matemática .

3.2. Campos escalares

Definición 1 Sean $V^m = R$ el conjunto de los números reales y $\mathbf{V}^n = A \subset R^3$. Se llama campo escalar a la aplicación

$$f : A \subset R^3 \longrightarrow R$$

$$P \longrightarrow f(P)$$

que a cada punto $P(x,y,z) \in A$ le asigna un número real $f(P)$. El valor f(P) representará por ejemplo: la presión en un punto de una masa fluida en equilibrio, etc. Supondremos continuas y diferenciables en A las funciones que definen los campos escalares.

Cuando los campos escalares no dependen del tiempo se llaman campos estacionarios.

Consideremos el lugar geométrico de los puntos de A en los cuales el valor f(P) sea el mismo, por ejemplo K. Las coordenadas de todos estos puntos satisfacen la relación $f(x, y, z)=K$

Luego todos estos puntos están en una superficie llamada superficie de nivel, de ecuación la anterior. A cada valor de K corresponde una superficie de nivel . Todas las superficies de nivel constituyen el haz de superficies de nivel. En los campos escalares planos, en lugar de superficies de nivel, hablaremos de líneas de nivel de ecuación: $f(x ,y)= K$.

3.3. Campos Vectoriales

Definición 2 Sean $\mathbf{V}^m = R^3$ y $\mathbf{V}^n = A \subset R^3$. Se llama campo vectorial a la aplicación

$$\mathbf{f} : \mathbf{A} \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

$$P \longrightarrow \mathbf{f}(P)$$

que hace corresponder a cada punto $P(x,y,z) \in A$ un vector $\mathbf{f}(P) \in R^3$. Designando por **r** el vector de posición del punto P , con respecto a un sistema ortonormado (**i** , **j** , **k**) , se tendrá

$$\mathbf{f}(x,y,z)= f_1(x,y,z)\,\mathbf{i} + f_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + f_3(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

Supondremos que las funciones f_1, f_2, f_3 son continuas y diferenciables en A , con derivadas parciales continuas.

Se llaman líneas de campo a aquellas líneas que son tangentes en cada punto P al vector campo **f**(P) . Luego estas líneas tienen la dirección del vector campo, con lo cual se determinan por el sistema diferencial

$$\boxed{\overline{dr} \wedge \bar{f} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3}}$$

que constituye un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden , el cual una vez resuelto proporciona una familia de curvas dependientes de dos constantes arbitrarias .

Si el campo vectorial es un campo cinético, las líneas de campo se llaman líneas de flujo. En los campos estacionarios , es decir aquellos que no dependen del tiempo, se llaman líneas de corriente. Si se trata de un campo de fuerzas, las líneas vectoriales se llaman líneas de fuerza del campo.

Ejercicios de aplicación

1. Dado el campo $\bar{F} = \dfrac{y}{x^2+y^2}\,\bar{i} - \dfrac{x}{x^2+y^2}\,\bar{j}$, calcular las líneas de campo.

Las líneas de campo están definidas por la ecuación $\dfrac{dx}{y} = -\dfrac{dy}{x}$

Integrando la ecuación diferencial, la ecuación del haz de líneas en el plano es: $x^2+y^2=C$

2. Un campo de vectores está definido por la función potencial $V = \dfrac{x\,y}{z}$ .Calcular las líneas de campo.

El campo de vectores procede de una función potencial:

$$\bar{F} = -\,\text{grad } V = -\frac{y}{z}\,\bar{i} - \frac{x}{z}\,\bar{j} + \frac{x\,y}{z^2}\,\bar{k}$$

Cálculo de las líneas de campo: $\dfrac{dx}{-\dfrac{y}{z}} = \dfrac{dy}{-\dfrac{x}{z}} = \dfrac{dz}{\dfrac{x\,y}{z^2}}$

Integrando se obtienen las líneas de campo como intersección de los cilindros $x^2 - y^2 = C_1$, $y^2+z^2=C_2$

3.4. Gradiente de un campo escalar

Definición 3 Se llama gradiente del campo escalar f(x ,y, z) en el punto P , suponiendo que se satisfacen las condiciones de derivación parcial , al vector

$$\boxed{\nabla \bar{f} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P \bar{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P \bar{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P \bar{k}}$$

Sabemos que el vector unitario **n**, normal a la superficie f(x,y, z) en un punto P es

$$\bar{n} = \frac{\nabla \bar{f}}{\left| \nabla \bar{f} \right|} \qquad (1)$$

De la expresión (1) se deduce que los vectores **n** y $\nabla \bar{f}$ tienen el mismo sentido y dirección. Luego **n** es el vector unitario del gradiente.

La derivada de $f(x, y, z)$ en el punto P y en la dirección **n** viene dada por

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \bar{n} \,.\, \nabla \bar{f} = \left| \nabla \bar{f} \right| \qquad (2)$$

Multiplicando miembro a miembro (1) y (2) se obtiene

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial n}\, \bar{n} = \nabla \bar{f}}$$

Esta forma de obtener el gradiente de un campo escalar es independiente del sistema de coordenadas empleado. Luego el gradiente de un campo escalar f(x,y,z) en un punto P es el vector normal en P a la superficie de nivel que pasa por este punto. De modo que f aumenta en el sentido del vector gradiente, siendo su módulo igual a la derivada de P en la dirección del gradiente de P .

El campo vectorial $\nabla \bar{f}$ es el campo de gradientes de f , al que inversamente , se denomina potencial escalar de aquél .

3. Dado el campo escalar $U = L(x^2 + y^2 + z^2)$, calcular el vector gradiente

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} \;,\; \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2} \;,\; \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\boxed{\nabla U = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}\,\bar{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}\,\bar{j} + \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}\,\bar{k}}$$

3.5. Nabla y Laplaciano

Definición 4 Se define el operador nabla como

$$\boxed{\nabla = \bar{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial}{\partial z}}$$

Propiedades El operador nabla es un operador lineal.

Demostración .En efecto, en virtud de las propiedades lineales de la derivación parcial se verifica

$$\begin{aligned} \nabla\left(f+g\right) &= \nabla f + \nabla g \\ \nabla\left(a\,f\right) &= a\,\nabla f \end{aligned}$$

Siendo f y g y funciones de (x , y , x) y $a \in K$ (cuerpo de los números reales).

Por otra parte, aplicando este operador al campo escalar f(x, y, z) , se obtiene el gradiente de este campo escalar

$$\nabla \bar{f} = \left(\bar{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right) f = \bar{i}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \bar{j}\,\frac{\partial f}{\partial y} + \bar{k}\,\frac{\partial f}{\partial z}$$

Definición 5 Si se multiplica escalarmente el operador nabla por sí mismo, se obtiene el operador Laplaciano Δ

$$\boxed{\Delta = \nabla.\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Se llama ecuación de Laplace a la ecuación: $\nabla^2 f=0$, que resulta de igualar a cero el Laplaciano de f(x,y,z) . Esta ecuación es de gran importancia en la Física - matemática. A las funciones que verifican la ecuación de Laplace se las llama funciones armónicas.

3.6. Divergencia y rotacional de un campo

Definición 6 Dado el campo vectorial $\bar{f} = f_1\,\bar{i} + f_2\,\bar{j} + f_3\,\bar{k}$, se llama divergencia de este campo en el punto P al escalar

$$\boxed{\operatorname{div}\bar{f} = \nabla.\bar{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}$$

Luego la divergencia en un punto P de un campo vectorial es igual al producto escalar simbólico $\nabla.\bar{f}$ del vector nabla por el vector que define el campo , estando este producto particularizado para las coordenadas de P .

Definición 7 Dado el campo vectorial $\bar{f} = f_1\,\bar{i} + f_2\,\bar{j} + f_3\,\bar{k}$, se llama rotacional del campo vectorial **f** en el punto P y se designa por Rot **f** al vector

$$\nabla \times \bar{f} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)\bar{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)\bar{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)\bar{k}$$

Cuando el rotacional vale cero en cualquier punto, el campo se llama irrotacional. Cuando la divergencia es nula en cualquier punto, el campo se llama solenoidal. Si el campo es a la vez irrotacional y solenoidal, se llama armónico.

4 .Dado el campo vectorial **F**= $(2x^2 + y^2 + z^2)$ **i** + $(x^2 + 2y^2 + z^2)$**j**+$(x^2 + y^2 + 2z^2)$ **k** , calcular la divergencia y el rotacional de **F** .

Divergencia de **F** : 4 x **i** + 4 y **j** + 4 z **k**

Rotacional

$$\nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2x^2 + y^2 + z^2) & (x^2 + 2y^2 + z^2) & (x^2 + y^2 + 2z^2) \end{vmatrix} = (2y - 2z)\,\mathbf{i} + (2z - 2x)\,\mathbf{j} + (2x - 2y)\mathbf{k}$$

3.7. Integrales curvilíneas

Definición 8 Sea P(x, y) una función definida en cada punto (x, y) de una curva suave C de longitud finita, de ecuaciones paramétricas

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t) \quad ,\ a \le t \le b \qquad (3)$$

y de extremos A [x(a) , y(a)] , B[x(b),y(b)]

□□ Dividamos el intervalo [a, b] □en (n+1) intervalos parciales de amplitudes $\Delta t_p = t_{p+1} - t_p$ (p=0 , 1,2….n) , mediante los n valores intermedios t_p= (p =1,2…n)

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < t_n < t_{n+1} = b$$

Elijamos en cada intervalo parcial $[t_p , t_{p+1}]$, de modo arbitrario, un valor ψ_p de su interior o de sus extremos. Sean (x_p , y_p) las coordenadas del punto de la curva C correspondiente al valor $t = t_p$ y sean (μ_p , η_p) las relativas al valor intermedio $t= \psi_p$. Formemos la suma

$$\sum_{p=0}^{n} \left[\left(x_{p+1} - x_p\right) P\left(\mu_p , \eta_p\right)\right] \qquad (4)$$

Si al tender $n\longrightarrow\infty$ de modo que la mayor de las amplitudes $\Delta t_p \longrightarrow 0$ la suma (4) tiende hacia un límite finito, este límite se llama integral curvilínea de P d x sobre la curva C . Lo representaremos

$$\int_C P(x, y)dx \qquad (5)$$

El teorema que sigue prueba la existencia de la integral curvilínea (5) y proporciona el método para calcular su valor.

Teorema Si C es una curva suave de longitud finita siendo P (t) una función continua en C se verifica

$$\boxed{\int_{AB} P(x , y)dx = \int_a^b P(t)\, x'(t)dt}$$

Caso de tres dimensiones. Si C es una curva suave de longitud finita siendo P(t) continua en C , se verifica

$$\int_{AB} P (x, y, z)dx = \int_a^b P(t)\, x'(t)\, dt \qquad (6)$$

Las letras AB indican el orden de integración sobre C

Observaciones

1. Poner BA en lugar de AB equivale a permutar los limites a y b y de integración.

$$\int_{AB} = - \int_{BA}$$

2. Cuando la curva C es cerrada, la integral curvilínea se escribe en la forma

$$\oint_C P\, dx + Q\, dy$$

Se recorre C al integrar en sentido directo o antihorario.

3. Una integral definida se puede considerar como una integral curvilínea extendida a un segmento del eje OX

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{AB} f(x)\,dx$$

3.8. Circulación de un vector. Trabajo de una fuerza

Sea el campo vectorial **F** (x, y, z) =P(x , y, z) **i**+Q(x, y , z) **j** +R(x,y , z) **k** y **r** el vector de posición de un punto cualquiera P , respecto de un sistema de referencia ortonormado (**i** , **j** , **k**) . Sabemos que

$$\mathbf{r}= x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k} \Longrightarrow d\,r= d\,x\,\mathbf{i} + d\,y\,\mathbf{j} + d\,z\,\mathbf{k}$$

con lo cual se verifica : **F** .d **r** = P d x + Q dy + R d z

Consideremos la integral curvilínea

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

a lo largo de la curva AB de ecuaciones x= x(t) , y = y(t) , z= z(t) , $a \le t \le b$ (3)

Dicha integral se puede escribir en la forma

$$\int_{AB} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

Esta integral recibe el nombre de circulación del vector **F** a lo largo de AB

En particular, cuando **F** representa una fuerza se tiene:

$$T = \int_{AB} \overline{F}.\overline{dr} \qquad (7)$$

Esta fórmula expresa el trabajo total T realizado por la fuerza **F** a lo largo del camino AB . En general , el trabajo dado por esta integral curvilínea depende del punto inicial A , del punto final B y del camino seguido para ir desde A hasta B.

3.8.1. Calculo de integrales curvilíneas respecto a la longitud de arco

Sea P(x, y, z) una función continua sobre una curva suave C de ecuaciones paramétricas, entonces se tiene

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ z = z(t)\quad ,\ a \le t \le b \qquad (8)$$

$$\int_C P(x,y,z)ds = \int_a^b P[x(t),\ y(t),\ z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt$$

Ejercicios de Aplicación

5.Dado el campo vectorial **F**= (3 x^2 + 6 y) **i** – 14 y z **j** + 20 x z^2 k , calcular $\int_C \overline{F}\,.\,\overline{dr}$ desde el punto A(0 , 0 , 0) al punto B(1, 1, 1) a lo largo de la curva C de ecuaciones $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$

$$\int_C \left(3x^2 + 6\,y\right)dx - 14y\,z\,dy + 20\,x\,z^2\,dz = \int_0^1 \left(9\,t^2 - 28\,t^6 + 60\,t^9\right)dt = \boxed{5}$$

3.9. Intégrales independientes del camino de integración

Dado el campo vectorial: **F** (x, y, z) =P(x, y, z) **i**+Q(x, y, z) **j** +R(x, y, z) **k**, consideremos la integral curvilínea

$$\int_{AB} \overline{F}\,.\,\overline{dr} = \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

Cuando la expresión P d x + Q dy + R d z es igual a la diferencial total de una función U (x , y , z) , la integral curvilínea sobre la línea AB sólo depende de los extremos del camino de integración pero no de dicho camino. El valor de dicha integral será el mismo para todas las curvas que pasen por A y B. Luego podemos decir que:

La condición necesaria y suficiente (siempre que el dominio D sea simplemente conexo) para que la integral curvilínea anterior no dependa más que de los puntos inicial y final y no del camino de integración, es que la forma diferencial P d x+Q dy + R d z sea la diferencial exacta de una función U(x , y , z) .En estas condiciones se verifica

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U\left(x_2\,,y_2,z_2\right) - U\left(x_1,y_1\,,z_1\right)$$

cualquiera que sea la curva suave contenida en D que une los puntos A y B.

3.10. Existencia de la función potencial

Caso de dos variables

Dada la expresión P(x, y) d x +Q(x, y) dy en donde P y Q admiten derivadas parciales continuas, diremos que dicha expresión admite función potencial U (x, y) o, dicho de otra forma, es diferencial total exacta cuando se verifica

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}} \qquad (9)$$

Ahora, si se tiene en cuenta que

$$P\,dx + Q\,dy = dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \Rightarrow P = \frac{\partial U}{\partial x} \;\;,\;\; Q = \frac{\partial U}{\partial y}$$

de esta última relación y de la expresión (9) se verifica

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}}$$

La anterior igualdad es el teorema de Schwarz (igualdad de las derivadas cruzadas). Esta condición es necesaria para la existencia de función potencial. Cuando se cumple esta relación es posible obtener la función potencial.

Finalmente podemos concluir: la condición necesaria y suficiente para que exista función potencial es que se verifique el teorema de Schwarz.

Caso de tres variables

Dada la expresión: P(x,y,z) d x+Q(x,y,z) dy+R(x,y,z)d z en donde las funciones P ,Q , R admiten derivadas parciales continuas, diremos que dicha función admite función potencial U(x,y,z) o, dicho de otra forma, es diferencial total exacta, cuando se verifica

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \;\;,\;\; \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \;\;,\;\; \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}}$$

Al igual que en el caso de dos variables, esto implica que se verifica el teorema de Schwarz, o de otra forma que Rot **F**=0

Ejercicios de aplicación

6. Demostrar que la expresión $\dfrac{(x+2\,y)dx+y\,dy}{(x+y)^2}$ es una diferencial total exacta y obtener la función potencial.

Al ser Rot **F** =0 , la expresión que escribimos a continuación es una diferencial total exacta , lo cual implica que el campo **F** es conservativo

$$\overline{F}.\overline{dr}=\frac{(x+2\,y)}{(x+y)^2}dx+\frac{y}{(x+y)^2}dy=P\,dx+Q\,dy=d\,U\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial x}=P=\dfrac{(x+2\,y)}{(x+y)^2}\\[2mm]\dfrac{\partial U}{\partial y}=Q=\dfrac{y}{(x+y)^2}\end{cases}$$

Cálculo de la función potencial

$$\frac{\partial U}{\partial x}=P=\frac{(x+2\,y)}{(x+y)^2}\quad,\quad\frac{\partial U}{\partial y}=Q=\frac{y}{(x+y)^2}$$

$$U(x,y)=\int\frac{(x+2\,y)}{(x+y)^2}dx+\Phi(y)$$

$$U(x\,,y)=L|x+y|-\frac{y}{x+y}+\Phi(y)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}+\Phi'(y)\Rightarrow\Phi(\,y\,)=cte$$

La función potencial buscada es

$$\boxed{U(x\,,y)=L|x+y|-\frac{y}{x+y}+cte}$$

3.11.Área de una superficie

Sea S una superficie paramétrica suave dada por

r(u , v) = x(u, v) **i** +y(u, v) **j**+ z(u , v) **k**

Definida sobre una región abierta D del plano UV. Si a cada punto de S se corresponde con un punto del dominio D el área de la superficie se define como

$$A = \iint_S dS = \iint_D \left|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\right| du\,dv$$

Si la superficie viene dada por su ecuación explicita z=f(x, y) unas paramétricas de la superficie serán

$$\mathbf{r}(x, y) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z(x, y)\ \mathbf{k}$$

Definida sobre una región R del plano XY .La expresión del área cuando la superficie viene dada en forma explicita será

$$A = \iint_R \sqrt{1 + \left[f'_x\right]^2 + \left[f'_y\right]^2}\, dxdy$$

3.12. Integral de superficie

Vamos a suponer que una curva continua simple C limita una superficie S, siendo la ecuación de la superficie

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\ \mathbf{i} + y(u, v)\ \mathbf{j} + z(u, v)\ \mathbf{k}$$

Cuando u y v varían en un dominio D del plano OUV. Supondremos que S es una superficie con dos caras, así como que el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ varía de forma continua en S . De las dos caras de S, llamaremos cara positiva aquella que se ve desde la región del espacio hacia donde se dirige el vector normal $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$. Elegida la cara positiva de S queda determinado el sentido positivo sobre el borde diciendo que un observador de pie sobre la cara positiva describe C en sentido positivo cuando deja a su izquierda a la superficie S

Al vector $d\mathbf{s} = (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)\, du\, dv$ se le llama vector elemento de área de la superficie S.

Asignemos a cada punto P de la superficie S un vector **F** que será una función continua del vector de posición **r** = **0P** . Al símbolo

$$\boxed{\iint_S \bar{F}.\overline{ds} = \iint_D \bar{F}.\left(\bar{r}_u \times r_v\right) du\, dv} \qquad (10)$$

se le llama integral de superficie de **F** sobre la cara positiva de la superficie S. Luego es la integral doble sobre el dominio D del producto mixto (10) .

Vamos a definir ahora la integral de superficie de una función escalar g(x, y, z) la cual suponemos definida y continua sobre una superficie S

Si la superficie viene dada por z=f(x, y) y sea R su proyección sobre el plano XY. Supongamos que f(x, y) . $f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$ son continuas en R , entonces la integral de superficie de g(x,y,z) sobre S es

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_R g(x,y,z(x,y))\sqrt{1+[f_x]^2+[f_y]^2}\,dx\,dy$$

3.13. Flujo de un campo a través de una superficie

Sea el campo vectorial **F** que representa la velocidad en un punto M de un fluido que pasa a través de un elemento de área d A en torno al punto M de una superficie, cuyo vector normal unitario en el punto M es $\bar{n}$ (orientado hacia la cara positiva). El producto escalar

$$\boxed{\bar{F}.\overline{dA} = \bar{F}.\bar{n}\,dA}$$

mide el volumen de fluido que atraviesa la superficie elemental en la unidad de tiempo . Luego representa el flujo elemental del campo **F** a través del elemento de superficie d A en el sentido del vector $\bar{n}$. El flujo total de **F** a través de la cara positiva de la superficie S viene dado por

$$\boxed{\iint_S \bar{F}.\bar{n}\,dA = \iint_S \bar{F}.d\bar{A}}$$

3.14. Teorema de la divergencia o de Gauss –Ostrograsky

Sea una superficie cerrada S que limita un volumen V. Consideremos un campo vectorial **F** siendo las componentes de este campo vectorial P ,Q ,R así como las derivadas parciales funciones continuas en V. La integral de la divergencia del campo F extendida a V es igual al flujo total del mismo hacia el exterior a través de toda la superficie S.

$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dv = \oint\!\!\oint_S \bar{F}.\bar{n}\,d\sigma} \qquad (11)$$

$$\boxed{\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = \oint\!\!\oint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy} \qquad (12)$$

donde S representa la cara externa de la superficie cerrada que limita V.

Ejercicios de Aplicación

7. Calcular el valor de $\oint\!\!\oint$ x dy d z + y d z d x + z d x dy siendo S la superficie de la región limitada por el cilindro $x^2+y^2=9$ y los planos z=0, z=3

Aplicando el teorema de Gauss

$$\oiint_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \iiint_V (1+1+1)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_V \,dx\,dy\,dz = 81\pi$$

8. Calcular

$$\oiint_S \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Siendo S una superficie cerrada cualquiera que contiene en su interior el origen de coordenadas.

$$\operatorname{div}\bar{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

Por ser div **F**=0, la integral es independiente de la superficie. Como superficie cerrada vamos a elegir la esfera $x^2+y^2+z^2=1$. Luego se verifica

$$\oiint_S x\cos\alpha\,d\sigma + y\cos\beta\,d\sigma + z\cos\gamma\,d\sigma = \iiint_V (1+1+1)\,dv = 3\,\frac{4}{3}\,\pi = 4\pi$$

En esta última integral se ha podido aplicar el teorema de Gauss ya que no hay puntos singulares en el interior de la superficie.

3.15. Teorema de Stokes

Sea z= z(x ,y) una superficie de dos caras limitada por una curva cerrada simple suave C . Sea S una de las caras de la superficie y **n** el vector normal unitario a la cara S. Dado el campo vectorial **F** en donde las componentes de este campo tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a la superficie y a la curva C se verifica que el flujo del rotacional del campo a través de S en el sentido de n es igual a la circulación del mismo a lo largo del borde C en sentido directo respecto de la cara S .

$$\boxed{\iint_S \operatorname{rot}\bar{F}.\bar{n}\,d\sigma = \oint_C \bar{F}.\overline{dr}}$$

Fórmula de Green - Riemann en el plano a partir del Teorema de Stokes.

El Teorema de Green nos dice que si P (x, y) y Q(x , y) y así como las derivadas parciales P_y, Q_x, son continuas en un dominio plano D simplemente conexo limitado por una curva simple y cerrada C entonces se verifica:

$$\boxed{\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy}$$

Se ha tomado como sentido positivo el sentido contrario a las agujas del reloj.

Ejercicios de aplicación

9. Demostrar que si una región D del plano tiene como frontera la curva C siendo esta curva simple y cerrada, el área esta dada por $\frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$.

Sean las funciones $P = -y/2$ y $Q = x/2$. Apliquemos el teorema de Green

$$\oint_C \left(-\frac{y}{2}dx + \frac{x}{2}dy\right) = \iint_D \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) dx\, dy = A(D)$$

10. Hallar el flujo del rotacional del vector **F**= (y-2 x) **i** +y z^2 **j** $-y^2$ z **k** sobre la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$ (z >0), y comprobar el resultado por el teorema de Stokes.

Rot **F**= - 4 y z **i** –**k**

$$\iint_S \left(-4yz\,\bar{i} - \bar{k}\right)\bar{n}\, d\sigma \qquad \bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$$

$$\iint_S \left(-4yz\,\bar{i} - \bar{k}\right)\bar{n}\, d\sigma = \iint_S \left(-4yz\cos\alpha - \cos\gamma\right) d\sigma$$

$$\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y} = \frac{\cos\gamma}{z} \;\Rightarrow\; \cos\alpha = \frac{x\cos\gamma}{z}$$

$$\iint_S \left(-4yz\cos\alpha - \cos\gamma\right) d\sigma = \iint_S \left(-4yz\frac{x\cos\gamma}{z} - \cos\gamma\right) d\sigma = -\iint_D 4xy\,dx\,dy - \iint_D dx\,dy = -\pi \text{ (flujo entrante)}$$

D es el círculo $x^2 + y^2 = 1$

Aplicando el teorema de Stokes: las ecuaciones paramétricas de la curva C en el plano z = 0, que es donde se apoya la superficie serán: x =cos t , y=sen t , z=0

$$\oint_C (y-2x)dx + yz^2\,dy - y^2 z\,dz = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\,dt + 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t\cos t\,dt = -\pi$$

Ejercicios resueltos

1. Calcular la integral de superficie $\iint_S \frac{dx\,dy}{z}$ extendida sobre la cara exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2-a^2=0$

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} - \iint_D \frac{dx\,dy}{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

La primera integral está extendida sobre la cara superior y la segunda integral está extendida sobre la cara inferior

$$I = 2\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

La superficie se proyecta en el plano XY en el dominio $x^2+y^2=a^2$. Pasando a coordenadas polares e integrando se tiene

$$I = 2\iint \frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = 4\pi a$$

2. Sea el campo vectorial **F**= 4 x z **i** $-y^2$ **j** +y z **k**. Calcular el flujo del vector **F** a través de la superficie del cubo limitado por x =0, x =1, y =0, y =1 , z =0 , z=1 .

Apliquemos el teorema de Gauss: div F= 4 z-y

$$\Phi = \oiint_S \bar{F}.\overline{ds} = \iiint_V \operatorname{div}\bar{F}\,dv = \iiint_V (4z-y)dxdydz = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (4z-y)dz = \frac{3}{2}$$

3. Calcular $\oiint_S x z^2\,dy\,dz + \left(x^2\,y - z^3\right)dx\,dz + \left(2\,x\,y + y^2\,z\right)dx\,dy$ siendo S es la cara exterior de la superficie

$$\begin{cases} z = +\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Gauss

$$\bar{F} = x z^2\,\bar{i} + \left(x^2\,y - z^3\right)\bar{j} + \left(2\,x\,y + y^2\,z\right)\bar{k}$$

$$\oiint_S x\,z^2 dy\,dz + \left(x^2 y - z^3\right)dx\,dz + \left(2\,x\,y + y^2 z\right)dx dy = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dx dy dz$$

Cambio de variables: x= a $X^{1/2}$, y= a $Y^{1/2}$, z =a $Z^{1/2}$

El dominio se transforma en: X+Y+Z ≤1, Z≥0. La integral triple se puede poner

$$I = \iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz + \iiint_V y^2\,dx\,dy\,dz + \iiint_V z^2\,dx\,dy\,dz$$

Como estas tres integrales tienen el mismo valor, la expresión anterior adopta la forma

$$I = 3\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz = 12\iiint_V x^2\,dx\,dy\,dz$$

Extendida a X+Y+Z ≤1 , X≥0 , Y≥0 , Z≥0

$$\frac{J(X, Y, Z)}{J(x, y, z)} = \frac{1}{8} a^3\, X^{-\frac{1}{2}}\, Y^{-\frac{1}{2}}\, Z^{-\frac{1}{2}}\, dX\,dY\,dZ$$

$$I = \frac{12\,a^3}{8}\iiint_V a^2\, X^{\frac{1}{2}}\, Y^{-\frac{1}{2}}\, Z^{-\frac{1}{2}}\, dX\,dY\,dZ$$

Integral triple de Dirichlet: p =3 /2, q= 1/2, r = 1 / 2, s = 1

$$I = \frac{12\,a^3}{8}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} = \frac{2}{5}\pi\,a^5$$

Segundo método

$$I = \iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dx\,dy\,dz$$

Pasando a coordenadas esféricas

$$I = \iiint \rho^2\,\rho^2 \cos\varphi\,d\varphi\,d\rho\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi \int_0^a \rho^4\,d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{2}{5}\pi a^5$$

4. Calcular la integral curvilínea $\int_C x\,y\,dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ siendo C la curva $y^2 = x$ entre los puntos (1, -1) y (1, 1).

$$I=\int_C x\,y\,dx+\left(x^2-y^2\right)dy=\int_{-1}^{1} 2\,y^4\,dy+\left(y^4-y^2\right)dy=3\int_{-1}^{1} y^4dy-\int_{-1}^{1} y^2dy=\frac{8}{15}$$

Ejercicios propuestos

1. Hallar el flujo del vector **F**= 18 z **i** -12 **j** +3 y **k** a través del plano 2 x+ 3 y+6z=12 en la parte del espacio en que X Y Z son positivas.

SOLUCION: 24

2. Calcular el valor de: $\oiint_S x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy$ siendo S la superficie de la región limitada por el cilindro x2+y2=9 y los planos z=0 y z=3

a) Utilizando el teorema de Gauss.

b) Directamente.

SOLUCION: 81π

3. Calcular la integral de la expresión

$$\overline{F}\cdot\overline{dr}=z\left(\frac{1}{x^2y}-\frac{1}{x^2+z^2}\right)dx+\frac{z}{xy^2}\,dy+\left(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\right)dz$$

SOLUCION: $\frac{-z}{xy}-\operatorname{arctang}\frac{x}{z}+C$

4. Demostrar que el campo **F**=(2 x z^3+6y)**i**+(6x -2 y z)**j** +($3x^2$ z^2-y^2) **k** es conservativo.

b)Calcular $\int_C \overline{F}.\overline{dr}$, siendo C cualquier camino que une el punto A (1, -1, 1) con el B (2, 1, 1).

c) Interpretación física del resultado.

SOLUCION: b) 15

5. Calcular $\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ a lo largo de una circunferencia de radio R y centro el origen de coordenadas.

SOLUCION: 2π

6. Dado el campo vectorial **F**=(x+y)**i** +(2 x-z) **j** + (y+z)**k** , verificar el teorema de Stokes sobre el triángulo definido por la intersección del plano 3 x+2 y+z=6 con el triedro principal .

7. Las componentes de una fuerza **F** que actúa en el punto P(x, y, z) de un campo vienen expresadas por $P=-\frac{y+z}{x^2y}$, $Q=-\frac{z}{xy^2}$, $R=\frac{1}{xy}$.

Estudiar si el campo es conservativo, en caso afirmativo hallar la función potencial .

8. Dado el campo vectorial $\bar{F}=\frac{1}{3}(x+y)^3\,\bar{i}+y^2\,z\,\bar{j}+\left(\frac{1}{3}z^3+x\,z^2\right)\bar{k}$ calcular el flujo a través de la superficie esférica de centro (a, b, c) y radio R.

SOLUCION: $\frac{4}{5}\pi R^5+\frac{4}{3}\pi R^3(a+b+c)^2$

9. Calcular la integral de superficie $\iint_S z\,dx\,dy$ siendo S la superficie exterior de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$

SOLUCION: $\frac{4}{3}\pi R^3$

10. Calcular $\oint_C x^2\,y^3\,dx+dy+z\,dz$, donde C es la intersección de las superficies $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$.

SOLUCION: $\frac{-R^6\pi}{8}$

11. Calcular $\oiint_S \left(x^3\cos\alpha+y^3\cos\beta+z^3\cos\gamma\right)d\sigma$. S es la superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ ·

SOLUCION: $\frac{12\pi R^5}{5}$

12. Dado el campo vectorial **F**=(x^2+y-4) **i**+ 3x y **j** +(2 x z+z^2)**k** , calcular $\iint_S \operatorname{rot}\bar{F}\,.\,\overline{ds}$ siendo S la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=16$, $z\geq 0$

SOLUCION: 0

13. Dado el campo vectorial **F**= (2 y^2+3 z^2-x^2) **i** + (2 z^2+3 x^2-y^2) **j**+ (2 x^2+3 y^2-z^2) **k** calcular $\iint_S \operatorname{rot}\overline{F}\cdot\overline{ds}$ donde S es la parte de la superficie $x^2 + y^2 - 2ax + az=0$ que está por encima del plano z = 0.

SOLUCION: $6\pi a^3$

14. Dado el campo vectorial **F**= (3 x^2+y^2+z^2) **i**+(3 y^2+z^2+x^2)**j**+(3 z^2+x^2+y^2)**k** calcular la divergencia, el rotacional y puntos en que se anulan.

$$\int_{AB}(y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$$

Siendo A (3, 2, 1), B (5, 5, 2) y AB una curva cualquiera.

SOLUCION: 34

15. Calcular la integral curvilínea $\oint_C \sqrt{x+y}\,dx+\sqrt{x+y}\,dy$ a lo largo de la elipse x=a cos θ, y=b sen θ

SOLUCION: 0

16. Dado el campo vectorial **F**= -y z **i** + z x **j** +x y **k** calcular el trabajo a lo largo de una espira de hélice de ecuaciones x=r cos t , y =r sen t , z= k r t .

SOLUCION: $2\pi^2 r^3 k$

17. Calcular la integral a lo largo de la curva intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$ y el cilindro $x^2+y^2-a\,x=0$ comprendida en el octante positivo. El origen será el punto de abcisa nula.

SOLUCION: $\frac{2}{3}a^2$

18. Dado el campo vectorial **F**=(3 x+y)**i** – x **j** +(y-z) **k** .Calcular : $\iint_S \overline{F}\overline{ds}$ siendo S la cara plana del sólido limitado por el paraboloide $x^2+ y^2 = z$ y el plano z =9.

SOLUCION: -81π

19. Dado el campo vectorial F= (3 x^2-y) **i**+ (2 y z^2-x) **j**+2 y^2 x **k**

a) demostrar que este campo es irrotacional pero no solenoidal.

b) calcular la integral curvilínea $\int_C \overline{F}.\overline{dr}$ a lo largo de la curva x =x , y = x + x^2 , z = $x^2 + 2x^3$.

$$\text{SOLUCION}\begin{cases} \text{a) Rot } \overline{F}=0 \ \ ,\overline{F} \text{ es irrotacional , div } \overline{F} = 6x + 2z^2 + 2y^2 \\ \text{b) Función potencial : } U = x^3 - yx + y^2 z^3 + \text{cte} \ \ , I = 35 \end{cases}$$

20. Dado el campo vectorial **F**= 4 x **i** -2 y^2 **j** +z^2 **k**, calcular $\oiint_S \overline{F}.\overline{ds}$. S es la superficie limitada por: $x^2 + y^2 = 4$, z = 0 y z =3

SOLUCION: 84π

21. Sea S la región sólida limitada por los planos coordenados y el plano 2 x + 2 y + z = 6. Dado el campo vectorial **F**= x **i** + y^2 **j** +z **k**, calcular $\oiint_S \overline{F}.\overline{ds}$

SOLUCION $\frac{63}{2}$

22. Calcular $\oint_C xy^2\,dx + x^2 y\,dy$ a lo largo del círculo $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$

SOLUCION: 0

23. Calcular la integral curvilínea $\int_C (3x^2 + y)dx + (x - 4y)dy$ desde el punto (0, 0) al (1, 2)

SOLUCION: -5

24. Calcular $\int_C \frac{z}{x^2 + y^2} dz$ a lo largo de una espiral de hélice de ecuaciones x = R cos t, y = R sen t, z = Kt

SOLUCION: $\frac{2\pi^2 k^2}{R^2}$

25. Dado el campo vectorial **F**= x^2 **i**-2 x y **j**+ x y z^2 **k**, calcular $\iint_S \overline{F}.\overline{ds}$. S es la superficie

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ z = 0 \end{cases}$$

SOLUCION: 0

26. Dado el campo **F**= z^2 **i**+ y **j** + x z **k** calcular $\iint_S \text{Rot } \overline{F}.\overline{ds}$. S es la superficie: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

SOLUCION: I = 0

27. Dado el campo **F**=(x+3 y) **i** + (y-2 z) **j**+(x+a z) **k** determinar a para que el campo F sea solenoidal.

SOLUCION: -2

28. Dado el campo **F**=(x^2+y-4) **i** + 3 x y **j**+ (2 x z+z^2) **k,** calcular $\iint_S rot\,\overline{F}\,.\,\overline{n}\,ds$. S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ por encima de z = 0.

SOLUCION: -16π