CAPITULO 5. ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN N≥2

5.1. Introducción

Una ecuación diferencial de segundo orden es una expresión matemática en la que se relaciona una función con sus derivadas primera y segunda. Es decir, una expresión del tipo $F\ (x, y, y', y'') = 0$

La ecuación anterior se dice escrita en forma normal cuando tenemos: $y'' = f(x, y, y')$

5.2. Reducción de orden

Este método consiste en reducir el problema de resolver una ecuación diferencial de segundo orden a un problema de resolver una o más ecuaciones diferenciales de primer orden. Casos a considerar

5.2.1. Ecuaciones que no contienen la variable y. Sea la ecuación $f(x, y', y'')$=0. Haciendo $y' = p$, se deduce $p' = y''$. Por tanto la ecuación diferencial dada se transforma en la ecuación diferencial de primer orden

$$f(x,p,p') = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene p, de donde finalmente, se tiene

$$y = \int p(x)dx \Rightarrow y = \Phi(x,C_1,C_2)$$

5.2.2. Ecuaciones que no contiene la variable x. Sea la ecuación $f(\ y\ , y', y'')$=0. Haciendo $p = y'$, se tiene

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

La ecuación dada se transforma en

$$f\left(y,p,p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene p, de donde posteriormente se obtiene

$$y = \Phi(x, C_1, C_2)$$

5.3. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

La ecuación lineal general de segundo orden puede escribirse en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

En la cual P(x) , Q(x) , R(x) son funciones conocidas

Teorema 1.De existencia y unicidad para el problema del valor inicial Sean P, Q, R funciones continuas en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. Sean y_0, y_0' dos números reales cualesquiera. El problema del valor inicial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)\ ,\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$$

tiene solución única definida en I

5.4. Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden

La ecuación lineal general de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

es homogénea , si R(x) = 0 , $\forall\ x \in I$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Teorema 2. Sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación lineal homogénea en un intervalo I. Entonces se verifica

1. $y_1 + y_2$ es una solución en I

2. Para cualquier constante c, cy_1 es una solución en I

Las relaciones (1) y (2) se pueden combinar de la forma siguiente. Si y_1, y_2 son dos soluciones de la ecuación anterior $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es una solución para dos constantes cualesquiera

Definición 1. Las soluciones y_1, y_2 son linealmente dependientes en un intervalo I si existen dos números reales no todos nulos tales que

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

Si la relación anterior solamente se verifica si $c_1 = c_2 = 0$ entonces y_1, y_2 son linealmente independientes. Las soluciones y_1, y_2 forman un sistema fundamental de soluciones si son linealmente independientes

Teorema 3. Estudio del wronskiano para la independencia lineal

Sea la ecuación homogénea de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, y sean y_1, y_2 soluciones de la ecuación diferencial dada en el intervalo I . Se demuestra que si el Wronskiano de $[y_1, y_2]$ que viene dado por el determinante

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

es distinto de cero , entonces y_1, y_2 son linealmente independientes

Teorema 4. Sean y_1, y_2 soluciones independientes de: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ en un intervalo I. Se demuestra que toda solución de la ecuación diferencial es de la forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, siendo c_1, c_2 constantes. La combinación lineal: $c_1 y_1 + c_2 y_2$ es la solución general de la ecuación diferencial si y_1, y_2 son linealmente independientes . Esta solución contiene todas las posibles soluciones de la ecuación diferencial

5.4.1. Obtención de una segunda solución a partir de una solucion conocida. Sea la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

Supongamos que se conoce una solución y_1 de la ecuación diferencial. Se trata de buscar una segunda solución linealmente independiente de la forma

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$$

Calculemos y_2', y_2'' y sustituyamos en la ecuación diferencial, se tiene entonces

$$y_1 u'' + (2y_1' + Py_1)u' + (y_1'' + Py_1' + Qy_1)u = 0$$

Como $y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$. La nueva ecuación diferencial será

$$u'' y_1 + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

Haciendo $p = u'$, la ecuación diferencial dada se transforma en

$$p' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + P\right)p = 0$$

Ecuación lineal de donde obtenemos p. A continuación se calcula u en función de p, con lo cual $y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$ es una solución de la ecuación diferencial original, siendo y_1 , y_2 linealmente independientes ya que u(x) no es constante. Por tanto y_1, y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación original. La solución general es de la forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$

5.5. Ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes

Esta ecuación es de la forma

$$y'' + a\,y' + b\,y = q(x)$$

Supongamos q (x) = 0. Esta ecuación tiene siempre soluciones del tipo exponencial de la forma $y = e^{rx}$. La sustitución de esta solución en la ecuación diferencial nos da

$$(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$$

Como $e^{rx} \neq 0$, $\forall x$, se tiene que $r^2 + a\,r + b = 0$. Esta ecuación se llama ecuación característica de la ecuación diferencial. Las raíces dan valores de r para los cuales e^{rx} es una solución de la ecuación. Estas raíces son

$$r = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Las raíces pueden ser: Dos raíces reales distintas. Una raíz real doble. Raíces complejas conjugadas

1. La ecuación característica tiene dos raíces reales distintas. Sean r_1 y r_2 estas raíces, por tanto $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$ son soluciones de la ecuación diferencial. Estas soluciones son linealmente independientes en cualquier intervalo por ser el wronskiano ≠0 , luego y_1 ,y_2 forman un conjunto fundamental de soluciones, por tanto la solución general de la ecuación homogénea es

$$y = c_1 e^{r x_1} + c_2 e^{r_2 x}$$

2. La ecuación característica tiene dos raíces reales iguales. En este caso: a^2-4 b=0. Una solución de esta ecuación diferencial es: $y = e^{-\frac{a}{2}x}$ Para obtener una segunda solución buscamos soluciones de la forma : $y_2(x) = u(x)\, e^{\frac{-a\,x}{2}}$. La solución general de la ecuación diferencial será

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{a}{2}x}$$

3. La ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas. En este caso: a^2 - 4 b< 0 . Sean

$$m = -\frac{a}{2},\ n = \frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \ .$$

Las raíces son: r_1= m +i n, r_2= m – i n . La solución general de esta ecuación diferencial será:

$$y = e^{m\,x}(C_1 \cos n\,x + C_2 \operatorname{sen} n\,x)$$

5. 6. Ecuación diferencial de Euler

Esta ecuación es de la forma

$$x^2\, y'' + a\, x\, y' + b\, y = 0 \quad , x > 0$$

Para resolver esta ecuación se hace el cambio t = L x , con lo cual la ecuación diferencial dada se transforma en la ecuación de coeficientes constantes

$$y'' + (a-1)y' + b\, y = 0$$

5.7. Ecuaciones de segundo orden no homogéneas

Sea la ecuación diferencial lineal

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (1)$$

Teorema 5. Sean y_1, y_2 un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea y sea y_p una solución cualesquiera de la ecuación (1). Entonces toda solución de la ecuación (1) es de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p$$

Por tanto el teorema nos dice que conocemos todas las soluciones de la ecuación dada, si podemos hallar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea junto con una solución particular cualesquiera de la ecuación no homogénea

La ecuación $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$, es la ecuación homogénea asociada de la ecuación (1)

La solución $c_1\ y_1+c_2\ y_2$ la denotamos por y_h. La solución $y_h + y_p$ es la solución general de la ecuación diferencial

5.8. Principio de superposición

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Siendo R(x) la suma de un numero finito de funciones

$$R(x)= f_1(x)+f_2(x) +\ldots\ldots.+f_n(x)$$

y supongamos que podemos hallar una solución particular y_j de cada uno de los problemas

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_j\ (x)$$

Se demuestra que la suma de estas soluciones particulares es una solución particular de

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

Es decir $y_p = y_1 + y_2 + \cdots ... + y_n$ es una solución de la ecuación diferencial: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

5.9. Método de variación de los parámetros

Sea la ecuación diferencial

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x) \qquad (2)$$

P(x), Q(x) , R(x) son funciones continuas en un intervalo I . Supongamos que podemos hallar dos soluciones linealmente independientes y_1 , y_2 de la ecuación homogénea, el método de variación de los parámetros intenta obtener una solución particular de la ecuación dada en la forma

$$y_p = u(x)\, y_1(x) + v(x)\, y_2(x)$$

Se necesitan dos ecuaciones para calcular u(x) y v(x). Para ello vamos a operar en la ecuación (2) de la siguiente forma

$$y_p' = uy_1' + vy_2' + u'y_1 + v'y_2$$

Por otra parte de u y v exigimos que deben satisfacer la ecuación

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \qquad (3)$$

Ahora bien $y_p'' = u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2''$. Por tanto la ecuación

$$y_p'' + P(x)y_p' + Q(x)y_p = R(x)$$

se transforma en

$$u'y_1' + v'y_2' + uy_1'' + vy_2'' + P(uy_1' + vy_2') + Q(uy_1 + vy_2) = R(x)$$

Esta ecuación se puede escribir como

$$u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v(y_2'' + Py_2' + Qy_2) + u'y_1' + v'y_2' = R(x)$$

Como y_1, y_2 son soluciones de la ecuación homogénea, los términos entre paréntesis son cero, con lo cual se tiene

$$u'y_1' + v'y_2' = R(x) \tag{4}$$

De las ecuaciones (3 y 4) se tiene

$$\begin{aligned} y_1 u' + y_2 v' &= 0 \\ y_1' u' + y_2' v' &= R \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes es distinto de cero por ser el wronskiano $[y_1,y_2] \neq 0$, al ser y_1,y_2 linealmente independientes . Por tanto

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ R & y_2' \end{vmatrix}}{W} = -\frac{y_2 R}{W} \qquad v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & R \end{vmatrix}}{W} = \frac{y_1 R}{W}$$

Posteriormente se calculan u y v. Finalmente se obtiene $y_p = u(x)\, y_1(x) + v(x)\, y_2(x)$

5.10. Ecuaciones diferenciales de orden n

Definiciones. Se define el problema del valor inicial de la ecuación diferencial lineal de orden n de la forma

$$y^n + a_1(x) y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n\, y = f(x)$$

$$y(x_0) = y_0 , y'(x_0) = y_0' , \ldots\ldots\ldots y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1}$$

Siendo $a_1(x) \ldots a_n(x)$ funciones continuas en un intervalo abierto I. Este problema tiene solución única en I

5.11. Ecuación lineal homogénea de orden n

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de orden n

$$y^n + a_1(x) y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n\, y = f(x)$$

Sean $y_{1\ldots}\ldots y_n$ soluciones de la ecuación homogénea. Entonces se verifica

1. $y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots y_n$ es una solución de la homogénea

2. $c\, y_i$ es una solución para cualquier numero c

Prueba del Wronskiano. Sean $y_1, \ldots\ldots\ldots y_n$ soluciones de la ecuación diferencial

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}(\mathrm{x})\, y' + a_n\, y = 0$$

en un intervalo abierto I . Entonces se verifica

1. $W(x) = 0\ \forall x \in I$ o bien $W(x) \neq 0\ \forall x \in I$

2 .$y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ son linealmente independientes en I si y solo si $W(x_0) \neq 0$ para algún x_0 en I

Teorema 6. Sean $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ soluciones linealmente independientes de

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}(\mathrm{x})\, y' + a_n\, y = 0$$

en un intervalo abierto I .Entonces $c_1y_1 + \ldots\ldots + c_n y_n$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea.

5.12. Ecuación lineal no homogénea de orden n

Sea la ecuación lineal no homogénea

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}(\mathrm{x})\, y' + a_n\, y = f(x)$$

y sea y_p cualquier solución de

$$y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1}(\mathrm{x})\, y' + a_n\, y = f(x)$$

Sean $y_1, \ldots\ldots\ldots y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea. Cualquier solución de la ecuación no homogénea se puede escribir en la forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots\ldots\ldots + c_n y_n + y_p$$

Por tanto se tiene $y = y_h + y_p$

5.13. Ecuación homogénea con coeficientes constantes

Sea la ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1} \; y' + a_n y = 0$$

Supongamos que $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación diferencial, al sustituir en dicha ecuación se tiene

$$e^{rx} (r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots\ldots + a_{n-1} r + a_n) = 0$$

La ecuación característica adopta la forma $r^n + a_1 r^{n-1} + a_{n-1} r + a_n = 0$. Esta ecuación tiene n - raíces, para cada raíz r de esta ecuación, e^{rx} es una solución de esta ecuación.

5.14. Método de los coeficientes indeterminados

Sea la ecuación diferencial no homogénea de coeficientes constantes:

$$y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots \ldots + a_{n-1} \; y' + a_n y = f(x) \qquad (5)$$

La solución general de esta ecuación diferencial es $y_h + y_p$. Por tanto necesitamos obtener una solución particular y_p de la ecuación (5). Para aplicar el método de los coeficientes indeterminados la función f(x) ha de ser una suma algebraica de funciones tipo

$$f_i(x) = e^{ax} [P_n \cos bx + Q_m(x) \operatorname{sen} bx]$$

Donde $a, b \in R$ y $P_n(x)$, $Q_m(x)$ son polinomios de grado n y m respectivamente . Por tanto, para cada una de las funciones $f_i(x)$ se busca una solución particular tal y como se indica en la tabla siguiente en función de la forma de $f_i(x)$

Forma de $f_i(x)$	**Raíces del polinomio Característico.**	**Forma de la solución Particular siendo: k= Max [m, n]**
$P_n(x)$	El 0 no es una raíz del Polinomio característico.	$P_n^*(x)$

$P_n(x)$	El 0 es una raíz del polinomio Característico de multiplicidad s	$x^s P_n^*(x)$
$P_n(x)\, e^{ax}$ (a real)	El número a no es una raíz del Polinomio característico.	$e^{ax} P_n^*(x)$
$P_n(x)\, e^{ax}$ (a real)	El número a es raíz del polinomio Característico de multiplicidad s	$x^s e^{ax} P_n^*(x)$
$P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\operatorname{sen} bx$	Los números $\pm ib$ no son Raíces del polinomio característico	$P_n^*(x)\cos bx + Q_m^*(x)\operatorname{sen} bx$
$e^{ax}\begin{pmatrix} P_n(x)\cos bx + \\ Q_m(x)\operatorname{sen} bx \end{pmatrix}$	$\pm ib$ son raíces del polinomio Característico de multiplicidad s	$e^{ax}\begin{pmatrix} P_n^*(x)\cos bx + \\ Q_m^*(x)\operatorname{sen} bx \end{pmatrix}$
$e^{ax}\begin{pmatrix} P_n(x)\cos bx + \\ Q_m(x)\operatorname{sen} bx \end{pmatrix}$	$a \pm ib$ Son raíces del polinomio Característico de multiplicidad s	$x^s e^{ax}\begin{pmatrix} P_n^*\cos bx + \\ Q_m^*\operatorname{sen} bx \end{pmatrix}$

Donde

$$P_n^* = A_0 + A_1(x) + \dots\dots\dots + A_k x^k$$
$$Q_n^* = B_0 + B_1(x) + \dots\dots\dots + B_k x^k$$

Son polinomios de coeficientes a determinar cuyo grado k, es el máximo entre los valores m y n.

Observación: Este método no es aplicable a una ecuación del tipo: y’’-y = Tang x

Ejercicios resueltos

1. Integrar la ecuación diferencial: $y'' = (y')^3 - Ly$

Ecuación diferencial en la que falta la x: Cambio: $y'' = p \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y'$

La ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{dp}{dy} = p^2\, Ly \Rightarrow \int \frac{dp}{p^2} = \int Ly\, dy$$

$$\frac{-1}{p} = y\, Ly - y + C_1 \Rightarrow \frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = y\, Ly - y + C_1$$

$$\int - dx = \int \left(y\, Ly - y + C_1\right) dy$$

$$x = C_1 y + C_2 + \frac{3}{4} y^2 - \frac{1}{2} y^2\, Ly$$

2. Integrar la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$

a) Ensayando una solución particular

b) Hallando la integral general de la incompleta y aplicando el método de variación de los parámetros

Solución de la homogénea

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = 2, r = 1$$

$$y_H = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^x$$

Para hallar integral general, ensayamos una solución particular de la completa

$$y_p = e^x \left(a \cos x + b \operatorname{sen} x\right)$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se tiene

$$y_P = e^x \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \operatorname{sen} x\right)$$

Solución general de la ecuación diferencial

$$y = C_1\, e^{2x} + C_2\, e^x + \frac{e^x}{2}\left(\cos x - \operatorname{sen} x\right)$$

b) Método de variación de los parámetros

$$y = C_1\, e^x + C_2\, e^{2x}$$

$$\begin{aligned} e^x\, C_1' + e^x\, C_2' &= 0 \\ e^x\, C_1' + 2C_2'\, e^x &= e^x \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^x \\ e^x \operatorname{sen} x & 2e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^x \\ e^x & 2e^x \end{vmatrix}} = -\operatorname{sen} x \qquad , \quad C_2' = e^{-x} \operatorname{sen} x$$

$$C_1 = \cos x + K_1$$

$$C_2 = -e^{-x}\left(\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{2}\right) + K_2$$

$$y = (\cos x + K_1)e^x + \left(-e^{-x}\,\frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + K_2\right)e^{2x} \Rightarrow$$

$$y = (\cos x + K_1)e^x + \left(-e^{-x}\,\frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)}{2} + K_2\right)e^{2x} \Rightarrow$$

$$y = K_1\, e^x + K_2\, e^{2x} + \frac{1}{2} e^x (\cos x - \operatorname{sen} x)$$

3. Integrar la ecuación diferencial $y'' - \dfrac{y'}{x} + 4x^2\, y = 4x^2 \operatorname{sen} x^2$

Conociendo dos soluciones de la incompleta $y_1 = \operatorname{sen} x^2 \;, y_2 = \cos x^2$

Integral de la incompleta o homogénea

$$y = C_1 \operatorname{sen} x^2 + C_2 \cos x^2$$

Apliquemos el método de variación de los parámetros

$$\left.\begin{aligned} C_1' \operatorname{sen} x^2 + C_2' \cos x^2 &= 0 \\ 2x\cos x^2\, C_1' - 2x C_2' \operatorname{sen} x^2 &= 4x^2 \operatorname{sen} x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} C_1' &= 2x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2 \\ C_2' &= -2x \operatorname{sen}^2 x^2 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x^2}{2} + K_1$$
$$C_2 = \frac{-x^2}{2} + \frac{\operatorname{sen} x^2 \cos x^2}{2} + K_2$$

Integral general

$$y = \frac{\operatorname{sen}^3 x^2}{2} + K_1 \operatorname{sen} x^2 - \frac{x^2}{2} \cos x^2 + K_2 \cos x^2 + \frac{\operatorname{sen} x^2 \cos^2 x^2}{2}$$

4. Integrar la ecuación diferencial $y''+y'= x\cos x$

a) A través del método general

b) Conociendo una solución particular de la incompleta $y_1 = e^{-x}$

a) Solución de la homogénea

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x}$$

Solución particular de la completa, ensayo una solución del tipo

$$y_p = (ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x$$

Solución general de la ecuación diferencial

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} x + \left(\frac{-1}{2}x + 1\right)\cos x$$

b) $y(x)= u(x)\, e^{-x}$

Sustituyendo en la ecuación diferencial y, y’, y’’ se obtiene

$$u''-u'=e^x x\cos x$$

Haciendo u’=p , se obtiene la ecuación diferencial lineal

$$p'-p = e^x x\cos x$$

Cuya solución es

$$p = e^x (x\operatorname{sen} x + \cos x + K_1)$$

De donde se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = e^x x \operatorname{sen} x + e^x \cos x + K_1 e^x$$

De donde se obtiene

$$y = K_1 + K_2 e^{-x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + 2\cos x + x \operatorname{sen} x - x\cos x)$$

5. Sea la ecuación diferencial de coeficientes variables $(x-1)y'' - x y' + y = (x-.1)^2 e^{2x}$

Se conocen dos soluciones particulares de la ecuación incompleta $y_1 = x, y_2 = e^x$

Aplicar el método de variación de las constantes para obtener la integral general de la completa

Solución: $y = C_1 x + C_2 e^x$

$$\begin{aligned} C_1' x + C_2' e^x &= 0 \\ C_1' \quad + C_2' e^x &= (x-1)e^{2x} \end{aligned}$$

Sistema en C_1', C_2', que resolvemos por Cramer $C_1' = -e^{2x}$, $C_2' = x e^x$

Integrando obtenemos C_1, C_2

$$\begin{aligned} C_1 &= \int -e^{2x} dx = -\frac{e^{2x}}{2} + K_1 \\ C_2 &= \int x e^x dx = e^x(x-1) + K_2 \end{aligned}$$

Solución general $y = \left(\frac{-e^{2x}}{2} + K_1\right)x + \left(e^x(x-1) + K_2\right)e^x$

$$y = K_1 x + K_2 e^x + \frac{1}{2}e^{2x} x - e^{2x}$$

6. Integrar la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = 4x^2$

y hallar una solución particular que pase por el origen , tal que la tangente en el tenga pendiente $y_0' = 1$

Solución de la homogénea $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Solución particular de la completa, para ello ensayamos una solución del tipo $y_p = ax^2 + bx + c$

Solución general de la completa:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + 2x^2 + 6x + 7$$

Calculemos ahora una solución particular con las condiciones dadas

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 = C_1 + C_2 + 7 \\ y'(0) = 1 = C_2 + 2C_1 + 6 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1 = 2 \ , \ C_2 = -9$$

Solución particular: $y(x) = 2\, e^{2x} - 9e^{x} + 2x^2 + 6x + 7$

7. Integrar la ecuación diferencial $y'' + y = x e^{x}$

Solución de la homogénea $y_H = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

Para calcular una integral particular de la completa, ensayamos una solución del tipo $y_{p1} = (ax + b)e^{x}$

Solución general de la ecuación diferencial

$$y_G = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)e^{x}$$

8. Integrar la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = e^{-x} \operatorname{sen} x - 4e^{x}$

Solución de la homogénea

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^{x}$$

Solución particular de $y'' - 2y' + y = e^{-x} \operatorname{sen} x$

Ensayo una solución del tipo $y_{p1} = e^{-x} a \operatorname{sen} x + e^{-x} b \cos x$

De donde se obtiene $y_{p1} = \dfrac{e^{-x}}{25}(4\cos x + 3 \operatorname{sen} x)$

Solución particular de $y'' - 2y' + y = -4e^{x}$

Ensayo una solución del tipo: $y_{p2} = Kx^2 e^x$

De donde obtenemos $y_{p2} = -2x^2 e^x$

Integral general $y = e^x (C_1 x + C_2) - \frac{e^x}{25}(4\cos x + 3\,\mathrm{sen}\, x) - 2x^2 e^x$

9. Integrar la ecuación diferencial de coeficientes variables $x^2 y'' - 2y = x^3 e^x$ obteniendo previamente una solución particular de la incompleta de la forma $y = x^m$. Calculemos a continuación una solución particular tal que para y(1) = 0 e y'(1)=1

Solución:

Veamos primeramente la solución de la homogénea

Sustituyendo y, y', y'' en la ecuación homogénea

$$x^2\left[m(m-1)x^{m-2}\right] - 2x^m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

$$y_h = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$$

Método de variación de los parámetros para calcular la solución particular de la completa

$$\left.\begin{aligned} C_1' x^2 + C_2' \frac{1}{x} &= 0 \\ 2C_1' x - C_2' \frac{1}{x^2} &= e^x x \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_1' = \frac{e^x}{3} \;\; ; \;\; C_2' = \frac{-x^3 e^x}{3} \Rightarrow$$

$$C_1 = \frac{e^x}{3} + K_1 \;\; ; \;\; C_2 = \frac{e^x}{3}\left(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6\right) + K_2$$

$$y = \left(\frac{e^x}{3} + K_1\right)x^2 + \left(\frac{e^x}{3}\left(-x^3 + 3x^2 - 6x + 6\right) + K_2\right)\frac{1}{x}$$

Solución general

$$y = K_1 x^2 + \frac{K_2}{x} + e^x\left(x + \frac{2}{x} - 2\right)$$

Integral particular

$$\begin{cases} y(1) = 0 = K_1 + K_2 + e(1+2-2) \\ y'_1(1) = 1 = 2K_1 - K_2 + e - e \end{cases}$$

Integral particular

$$y = \frac{1-e}{3}x^2 - \frac{(1+2e)}{3x} + e^x\left(x + \frac{2}{x} - 2\right)$$

10. Integrar la ecuación diferencial $y''+y' = x\cos x$

Solución de la homogénea $y = C_1 + C_2\, e^{-x}$

Solución particular de la completa

$$y_p = (ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{-1}{2}, d = 1$$

Solución general

$$y = C_1 + C_2\, e^{-x} + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x - x\cos x + 2\cos x)$$

11. Integrar la ecuación diferencial $(1+x)^3\, y''' + (1+x)^2\, y'' + (1+x)y' - 8y = \frac{x}{(1+x)^2}$

La ecuación diferencial es de Euler. Hacemos el cambio L(1+x)=t $\Longrightarrow$ (1+x)=e ^{t} , de donde se obtiene

$$(1+x)\, y' = y'(t)\, ;$$

$$(1+x)^2\, y'' = y''(t) - y'(t)$$

$$(1+x)^2\, y''' = y'''(t) - b_2\, y''(t) + b_1\, y'(t)$$

$$b_2 = r(r-1)....(r-n+1)$$

Ecuación característica $r(r-1)(r-2)+r(r-1)+3r-8=0$

$$r^3-2r^2+4r-8=0$$

Que se corresponde con la ecuación diferencial homogénea

$$y'''(t)-2y''(t)+4y'(t)-8y=0$$

La ecuación diferencial completa será

$$y'''(t)-2y''(t)+4y'(t)-8y=\frac{e^t-1}{e^{2t}}$$

Solución de la homogénea

$$y(t)=C_1 e^{2t}+C_2\cos 2t+C_3\,\mathrm{sen}\,2t$$

Solución particular $y_1=K_1 e^{-t}\Rightarrow K_1=-\frac{1}{15}$

Solución particular $y_2=K_1 e^{-2t}\Rightarrow K_1=\frac{1}{32}$

Solución general

$$y(t)=C_1 e^{2t}+C_2\cos 2t+C_3\,\mathrm{sen}\,2t - \frac{1}{15}e^{-t}+\frac{1}{32}e^{-2t}$$

Deshaciendo el cambio t = L (1+x)

$$y(x)=C_1 e^{2\,L(1+x)}+C_2\cos 2L(1+x)+C_3\,\mathrm{sen}\,2L(1+x) - \frac{1}{15}e^{-L(1+x)}+\frac{1}{32}e^{-2L(1+x)}$$

$$y(x)=C_1\,(1+x)^2+C_2\cos\,L(1+x)^2+C_3\,\mathrm{sen}\,L(1+x)^3 - \frac{1}{15(1+x)}+\frac{1}{32(1+x)^2}$$

12. Resolver la ecuación diferencial $y''-9y=10x\,\mathrm{sen}\,2x$

Solución de la homogénea

$$y=C_1 e^{3x}+C_2 e^{-3x}$$

Solución particular de la completa

$$y_p = (ax+b)\operatorname{sen}2x + (cx+d)\cos 2x \Rightarrow a = \frac{-10}{13}, b = 0, c = 0, d = \frac{-40}{169}$$

Solución general

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - \frac{10}{13} x \operatorname{sen}2x - \frac{40}{169}\cos 2x$$

13. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}$

Solución de la homogénea

$$y_h = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$$

Solución particular de la completa

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{3x}$$

Ensayando esta solución se tiene

$$y_p = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x}$$

Solución general de la completa

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x}$$

14. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = \cos 2x \operatorname{sen} x$

Solución de la homogénea

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$$

Solución particular de la completa, para ello se pone el producto cos 2 x sen x de la forma siguiente:

$$\cos 2x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen} x)$$

Por tanto, $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

Para $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x$ ensayamos soluciones del tipo: A sen 3 x+ B cos 3 x, obteniéndose la solución

$$y_{p1} = \frac{-5}{338}\operatorname{sen} 3x + \frac{6}{169}\cos 3x$$

Para $-\frac{1}{2}\operatorname{sen} x$ ensayamos soluciones del tipo: A sen x + B cos x , obteniéndose la solución

$$y_{p2} = -\frac{3}{50}\operatorname{sen} x - \frac{2}{25}\cos x$$

Solución general:

$$y = (C_1 x + C_2)e^{2x} - \frac{5}{338}\operatorname{sen} 3x + \frac{6}{169}\cos 3x - \frac{3}{50}\operatorname{sen} x - \frac{2}{25}\cos x$$

15. Resolver la ecuación diferencial $y'' - 3y' + 2y = \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x$

Solución de la homogénea

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Solución particular de la completa, para ello se pone el producto cos 2 x sen x de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

Por tanto, $y_p = y_{p1} + y_{p2}$

Para $\frac{1}{2}\cos x$ ensayamos soluciones del tipo: a cos x + b sen x

Para $-\frac{1}{2}\cos 3x$ ensayamos soluciones del tipo: a cos 3 x + b sen 3 x

Solución general

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{3}{20}\operatorname{sen} x + \frac{1}{20}\cos x + \frac{9}{260}\operatorname{sen} 3x + \frac{7}{260}\cos 3x$$

16. Resolver la ecuación diferencial $y''-4y'+13y = \operatorname{sen} x - e^{3x} + 5$

Solución de la homogénea

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$$

Solución particular de la completa, para ello se pone el producto cos 2 x sen x de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$$

Solución particular, $y_p = y_{p1} + y_{p2} + y_{p3}$

Para y_{p1} ensayamos soluciones del tipo $y_{p1} = a \operatorname{sen} 3x + b \cos 3x$

Para y_{p2} ensayamos soluciones del tipo $y_{p2} = k e^{3x}$

Para y_{p3} ensayamos soluciones del tipo $y_{p3} = k$

Solución general de la ecuación diferencial

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x) + \frac{3}{40} \operatorname{sen} x + \frac{1}{40} \cos x - \frac{1}{10} e^{3x} + \frac{5}{13}$$