Índice General

[1] Versión 2010

Tema 5

Corriente Eléctrica y Fuerza Electromotriz [1]

5.1 Conducción, velocidad de arrastre y movilidad de los portadores

Definición de conductor:

- Sustancia en la cual los portadores de carga se mueven con libertad. Ej: metales, aleaciones, gases ionizados, electrolitos y semiconductores.

El proceso físico de la conducción eléctrica (caso de un metal):

- **Conductor sin campo eléctrico aplicado:**
  - Los electrones se mueven, debido a la agitación térmica, con velocidades instantáneas bastante altas ($\sim 10^6\,\mathrm{m\,/\,s}$).
  - El movimiento es aleatorio $\Rightarrow$ la velocidad promedio de los electrones es nula.

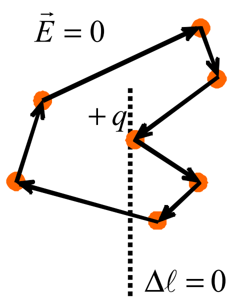

Figura 5.1: Movimiento de un portador de carga libre en el interior de un metal en ausencia de un campo externo.

- **Conductor con campo eléctrico aplicado:**
  - Los electrones se ven sometidos a una fuerza ($\vec{F} = -e\vec{E}$) $\Rightarrow$ adquieren una aceleración adicional en dirección opuesta al campo aplicado.
  - A este fenómeno se contrapone la pérdida de energía debida a los choques con otros electrones y con los átomos de la red cristalina del metal.
  - **Resultado neto del proceso:** el electrón adquiere una pequeña velocidad constante en dirección opuesta al campo eléctrico aplicado.
  - Esta velocidad, denominada **velocidad de arrastre o de deriva**, es proporcional al campo aplicado

$$\boxed{\vec{v} = \mu_p \vec{E}} \tag{5.1}$$

  - La constante de proporcionalidad μ_p se denomina **movilidad** de los portadores de carga.

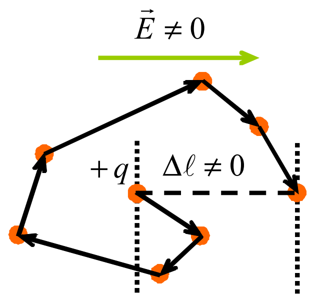

Figura 5.2: Movimiento de un portador de carga libre en el interior de un metal en presencia de un campo externo.

5.2 Intensidad de corriente y densidad de corriente

Intensidad de corriente eléctrica:

- **Definición:** la intensidad de corriente eléctrica I, o simplemente **corriente eléctrica**, se define como el flujo de carga eléctrica que atraviesa una superficie S por unidad de tiempo:

$$\boxed{I = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_S} \tag{5.2}$$

- **Corriente a través de una superficie elemental:**

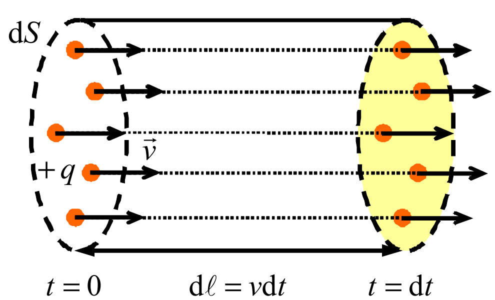

Figura 5.3: Esquema para el cálculo de la intensidad de corriente que atraviesa una superficie elemental dS.

  – Consideramos una región del espacio dentro de un conductor.

  – Todos los portadores de carga libre son iguales y transportan una carga positiva q

  – Existen n portadores de carga por unidad de volumen (n se denomina **densidad numérica de portadores**).

  – Se aplica un campo eléctrico $\vec{E} \Rightarrow$ los portadores se mueven (en promedio) a lo largo de las líneas de campo con una velocidad de arrastre $\vec{v}$.

  – Según su definición, la corriente que atraviesa dS es

$$\mathrm{d}I = \left.\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{d}S}$$

  – Cálculo de la carga dQ que pasa a través de dS en un intervalo de tiempo dt:

    * En este intervalo temporal cada portador se desplaza un camino $\mathrm{d}\ell = v\mathrm{d}t$ $\Rightarrow$ sólo pasarán a través de dS los portadores contenidos dentro del volumen elemental $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\ell\mathrm{d}S$. La carga total contenida dentro de este volumen es

$$\mathrm{d}Q = nq\mathrm{d}\tau$$

  – Entonces la corriente que atraviesa la superficie dS será

$$\mathrm{d}I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{nq\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = nq\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}S = nqv\mathrm{d}S \tag{5.3}$$

  o altrernativamente

$$\mathrm{d}I = \rho_\tau v\mathrm{d}S$$

- **Dirección de la corriente:** por convenio, se considera que la dirección de I es la correspondiente al flujo de cargas positivas $\Longrightarrow$ los electrones se mueven en dirección opuesta a la dirección de la corriente.

- **Unidades de la corriente:** en el SI es el Amperio (A), que debe su nombre al físico francés Andre Marie Ampère (1775-1836).

  – A partir de (5.2) se deduce

$$\boxed{1 \text{ Amperio} = \frac{1 \text{ Coulombio}}{1 \text{ segundo}}}$$

- En el SI la corriente se considera una magnitud fundamental; mientras que la carga se considera una magnitud no fundamental, derivada de la corriente y del tiempo.

Ejemplo 1 *Calcular la velocidad de arrastre de los electrones en un alambre de cobre de radio* $a = 0.0814$ cm *por el que circula una corriente* $I = 1\,\mathrm{A}$*. Suponer que existe un electrón libre por átomo. La densidad del cobre es* $\rho_m = 8.93\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{cm}^3$ *y su peso molecular* $M = 63.5\,\mathrm{g}\,/\mathrm{mol}$*. Número de Avogadro,* $N_A = 6.023 \times 10^{23}$ *átomos/*mol.

Solución:

Suponiendo que $\vec{v} \parallel \mathrm{d}\vec{S}$, a partir de (5.3) podemos poner $I = nqvS$, de donde

$$v = \frac{I}{nqS}.$$

Si hay un electrón libre por átomo, la densidad de electrones, n, será igual a la densidad de átomos. Por tanto

$$\begin{aligned} n &= \frac{\rho_m N_A}{M} = \frac{8.93 \times (6.023 \times 10^{23})}{63.5} \\ &= 8.\,47 \times 10^{22} \text{átomos}/\,\mathrm{cm}^3\,. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $q = e$ y $S = \pi a^2$, la velocidad de arrastre resulta

$$\begin{aligned} v &= \frac{I}{ne\pi a^2} \\ &= \frac{1}{(8.47 \times 10^{28}) \times (1.6 \times 10^{-19})} \\ &\quad \times \frac{1}{\pi \times (0.0814 \times 10^{-2})^2} \end{aligned}$$

y operando

$$\boxed{v = 3.\,54 \times 10^{-5} \quad [\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}].}$$

Ejemplo 2 *Por un hilo conductor circula una corriente* $I = 2{+}6t{+}8t^2$ A*. Calcular la carga que pasa por la sección del hilo entre los instantes* $t_1 = 5\,\mathrm{s}$ *y* $t_2 = 10\,\mathrm{s}$*. Determinar el valor de la corriente estacionaria,* I_0*, que transporta la misma carga en el mismo intervalo de tiempo.*

Solución:

La carga que atraviesa una sección del hilo por unidad de tiempo es

$$\mathrm{d}Q = I\mathrm{d}t.$$

La carga buscada será:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} I\mathrm{d}t = \int_5^{10} (2 + 6t + 8t^2)\mathrm{d}t \\ &= \left(2t + 3t^2 + \frac{8}{3}t^3\right)_5^{10} \end{aligned}$$

de donde

$$\boxed{Q = 2568.\,33 \quad [\mathrm{C}].}$$

Si la corriente es estacionaria podemos poner

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I_0\mathrm{d}t = I_0 \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t = I_0(t_2 - t_1),$$

entonces

$$I_0 = \frac{Q}{t_2 - t_1} = \frac{2568.33}{5}$$

y operando

$$\boxed{I_0 = 513.\,67 \quad [\mathrm{A}].}$$

Densidad volúmica de corriente:

- El concepto de corriente representa una cantidad —carga por unidad de tiempo— referida a una superficie.
- Muchas veces, resulta más conveniente referir esta cantidad a un punto del espacio.
- Con tal fin, consideraremos una superficie elemental $\mathrm{d}\vec{S}$ a través de la cual existe un flujo de carga (corriente) $\mathrm{d}I$.

- Se define la **densidad volúmica de corriente**, que denotaremos por $\vec{J}$, como la corriente por unidad de superficie:

$$\vec{J} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\,\mathrm{d}\hat{S}$$

donde se supone que $\vec{J}$ tiene la misma dirección que $\mathrm{d}\vec{S}$.

- Partiendo de (5.3), podemos poner $\vec{J} = nq\vec{v}$. Teniendo en cuenta, ahora, que $nq = \rho_\tau$, resulta

$$\boxed{\vec{J} = \rho_\tau \vec{v}} \tag{5.4}$$

- La densidad de corriente es una magnitud puntual; representa el flujo de carga que pasa por un punto en la unidad de tiempo.

- Si existen distintos tipos de portadores, podemos generalizar (5.4) mediante

$$\boxed{\vec{J} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i = \sum_i \rho_{\tau i}\vec{v}_i}$$

- La corriente que fluye a través de una superficie elemental $\mathrm{d}\vec{S}$ será simplemente,

$$\mathrm{d}I = \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

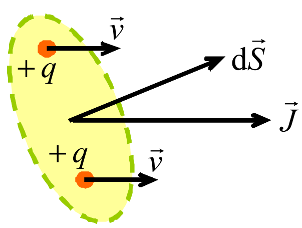

Figura 5.4: Corriente a través de una superficie elemental. Caso en el que $\vec{J}$ y $\mathrm{d}\vec{S}$ no son paralelos.

- Entonces , la corriente I que atraviesa una superficie arbitraria $\vec{S}$ valdrá

$$\boxed{I = \iint_S \mathrm{d}I = \iint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

que representa el flujo del vector $\vec{J}$ a través de una superficie $\vec{S}$.

Corrientes filiformes:

- En ocasiones resulta útil considerar que la corriente viaja a lo largo de líneas geométricas.
- Este tipo de corrientes, conocidas como **corrientes filiformes**.
- Surgen de idealizar situaciones tales como corrientes en hilos conductores delgados o haces de electrones de pequeña sección.

Elementos de corriente:

- **Corrientes filiformes:** el concepto de **elemento de corriente** se define como el producto de la corriente por el elemento de línea:

$$\boxed{\text{elemento de corriente} = I\mathrm{d}\vec{\ell}}$$

- **Corrientes volúmicas:** si tomamos un elemento de volumen cilíndrico de sección $\mathrm{d}S$ y longitud $\mathrm{d}\ell$, la corriente puede expresarse como $I = J\mathrm{d}S \Rightarrow$ el elemento de corriente resulta $I\mathrm{d}\ell = J\mathrm{d}S\mathrm{d}\ell = J\mathrm{d}\tau$. Como $\vec{J}$ y $\mathrm{d}\vec{\ell}$ son paralelos, podemos poner

$$\boxed{\text{elemento de corriente} = \vec{J}\mathrm{d}\tau}$$

- **Partículas cargadas:** suponiendo que la partícula tiene una carga total q, ocupa un volumen $\mathrm{d}\tau$ y su densidad de carga es ρ_τ, podemos poner: $\vec{J}\mathrm{d}\tau = \rho_\tau\vec{v}\mathrm{d}\tau = q\vec{v}$, luego

$$\boxed{\text{elemento de corriente} = q\vec{v}}$$

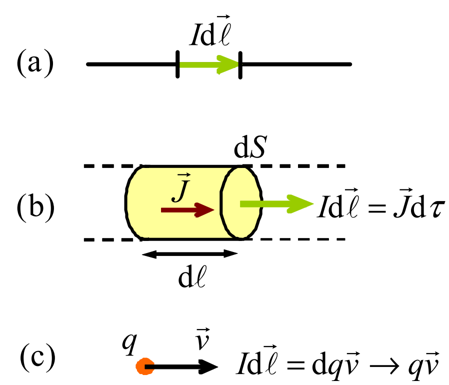

Figura 5.5: Elementos de corriente. (a) corriente filiforme; (b) corriente volúmica; (c) carga puntual.

5.3 Ecuación de continuidad de la carga y primera ley de Kirchhoff

Principio de conservación de la carga:

- La carga es una magnitud que se conserva, ni se crea ni se destruye.
- Para expresar este principio en forma matemática consideraremos un volumen τ limitado por una superficie $\vec{S}$.
- Si dentro de τ no hay fuentes ni sumideros de carga, se verifica

$$\boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}} \tag{5.5}$$

  expresión conocida como **ecuación de continuidad** de la carga en forma integral.

- **Principio de conservación de la carga dentro del volumen τ:** el flujo de corriente a través de la superficie $\vec{S}$ es igual a la disminución de carga dentro de τ.

Corrientes estacionarias:

- Si nos restringimos al caso particular de que no haya variación de la carga con el tiempo, $dQ/dt = 0$, la ec. (5.5) se reduce a

$$\boxed{\oint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = 0} \tag{5.6}$$

  las corrientes que verifican esta expresión se denominan **corrientes estacionarias**.

- Las corrientes estacionarias son espacialmente homogéneas, no permitiendo el aumento ni la disminución de carga con el tiempo en ningún punto del volumen τ.

Primera ley de Kirchhoff:

- La ecuación (5.6) es una generalización de la **primera ley de Kirchhoff o ley de nudos**
- Para probarlo basta considerar un nudo de circuito como el mostrado en la figura **??**, donde se han dibujado n ramas de corriente entrante y m ramas de corriente saliente.
- Aplicando (5.6) a esta estructura resulta

$$\sum_{i=1}^{m} I_i^{\text{sal.}} - \sum_{i=1}^{n} I_i^{\text{ent.}} = 0$$

  donde hemos supuesto que todas las cantidades $I_i^{\text{ent.}}$ e $I_i^{\text{sal.}}$ son positivas.

- Si tomamos como negativas la corrientes entrantes, la ec. anterior resulta

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+m} I_i = 0}$$

  que es la forma matemática de la primera ley de Kirchhoff: la suma algebraica de las corrientes que entran (o salen) de un nudo debe ser nula.

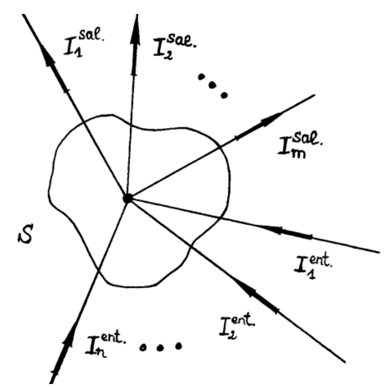

Figura 5.6: Nudo con m ramas de corriente saliente y n ramas de corriente entrante.

5.4 Ley de Ohm, conductividad y resistencia

Ley de Ohm puntual y conductividad:

- De acuerdo con (5.4) y (5.1), podemos escribir

$$\vec{J} = \rho_\tau \vec{v} = \rho_\tau \mu_p \vec{E},$$

  que introduciendo la nueva cantidad $\sigma_c = \rho_\tau \mu_p$, resulta

$$\boxed{\vec{J} = \sigma_c \vec{E}} \tag{5.7}$$

- Esta ec. se conoce como **ley de Ohm puntual**.
- La magnitud σ_c que aparece en (5.7) se conoce como **conductividad eléctrica**.
- Su unidad recibe el nombre de Siemen/metro (S/m) y es el inverso del ohmio-metro ($1\,\mathrm{S}/\mathrm{m} = 1(\Omega \cdot \mathrm{m})^{-1}$).
- La conductividad es una propiedad de cada tipo de material. Aquellos materiales que verifican (5.7), siendo σ_c una constante dependiente únicamente de la posición, se conocen como medios lineales u óhmicos.
- El valor de σ_c da una idea de la facilidad que presenta un material al movimiento de cargas en su interior.
- Normalmente, los metales como el cobre, plata, oro, etc., presentan conductividades muy altas, sin embargo, otras sustancias típicamente aislantes como el caucho tienen conductividades muy bajas.

Resistividad:

- Despejando en (5.7), se obtiene

$$\boxed{\vec{E} = \rho_c \vec{J}}$$

- La cantidad ρ_c se llama **resistividad**. La relación entre ρ_c y σ_c es

$$\boxed{\rho_c = 1/\sigma_c}$$

- La unidad de medida de la resistividad en el SI es el ohmio-metro ($\Omega \cdot \mathrm{m}$).

Forma circuital de la ley de Ohm y resistencia:

- Para aplicar (5.7) en el ámbito de la teoría de circuitos es necesario expresar los campos $\vec{E}$ y $\vec{J}$ en función de magnitudes típicamente circuitales como ΔV e I.
- **Aplicación a un cilindro homogéneo:** consideramos un medio conductor homogéneo ($\sigma_c = \mathrm{cte}$) con forma cilíndrica de sección S y longitud ℓ.

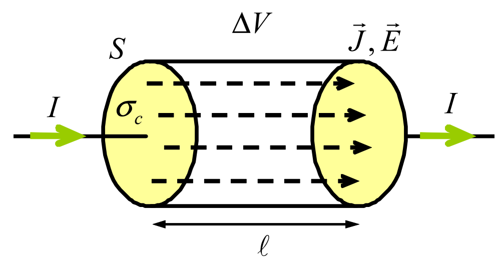

Figura 5.7:

- El campo $\vec{E}$ se relaciona con la diferencia de potencial entre sus bases, ΔV, mediante:

$$\Delta V = V(0) - V(\ell) = -\int_{\ell}^{0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = E\ell$$

- La densidad de corriente, $\vec{J}$, y la corriente que atraviesa la sección del cilindro, I, verifican:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \sigma_c \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma_c E S$$

- A partir de las dos últimas expresiones, eliminando E, podemos poner

$$\boxed{\Delta V = RI} \qquad (5.8)$$

donde la constante

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma_c}\frac{\ell}{S} = \rho_c \frac{\ell}{S}}$$

se denomina **resistencia**, siendo su unidad el **Ohmio** (Ω).

- La ec. (5.8) se conoce como **forma circuital de la ley de Ohm**; es la forma de la ley de Ohm que se utiliza habitualmente en la teoría de circuitos.

5.5 Consumo de potencia en los conductores. Ley de Joule

El efecto Joule:

- El establecimiento de una corriente eléctrica en el interior de un conductor se debe a la fuerza ejercida por un campo eléctrico sobre los portadores libres de carga.

- A esta fuerza eléctrica se le opone una fuerza de rozamiento debida a los choques entre portadores y de éstos con otros átomos.

- Los choques conllevan una pérdida y consiguiente conversión en calor de la energía de los portadores. Este fenómeno de conversión de energía eléctrica en calor se denomina **efecto Joule**.

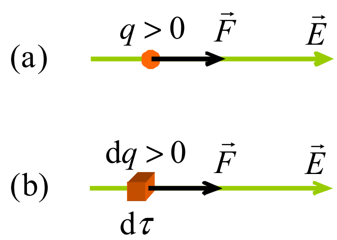

Figura 5.8: (a) Acción del campo eléctrico sobre una carga puntual positiva. (b) Acción del campo eléctrico sobre un elemento de carga positivo.

Ley de Joule en forma puntual:

- Expresaremos el efecto Joule en forma de una ley matemática que nos permita su cuantificación.

- Para ello consideraremos, en primer lugar, el trabajo realizado por el campo $\vec{E}$ sobre una carga q:
$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

- Si en vez de una carga puntual, consideramos un elemento de carga, el trabajo resulta
$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

- La potencia suministrada por el campo al elemento de carga será:
$$\mathrm{d}P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}q\vec{E} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}q\vec{E} \cdot \vec{v} = \rho_\tau \, \vec{E} \cdot \vec{v} \, \mathrm{d}\tau$$
donde $\vec{v} = \mathrm{d}\vec{\ell}/\mathrm{d}t$ es la velocidad de arrastre y $\mathrm{d}q = \rho_\tau \mathrm{d}\tau$.

- Teniendo en cuenta que $\rho_\tau \vec{v} = \vec{J}$, podemos expresar la ec. anterior como
$$\boxed{\mathrm{d}P = \left(\vec{J} \cdot \vec{E}\right) \mathrm{d}\tau} \qquad (5.9)$$
que se conoce como **ley de Joule en forma puntual**.

- El término $\vec{J} \cdot \vec{E}$, puede expresarse, también, como
$$\boxed{\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma_c E^2 = \rho_c J^2}$$

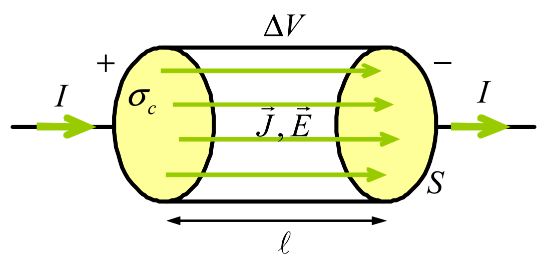

Figura 5.9:

Forma circuital de la ley de Joule:

- Consideramos un conductor cilíndrico de sección S y longitud ℓ.

- El cálculo de la potencia consumida en este conductor podrá obtenerse sin más que integrar (5.9) a todo su volumen:
$$\begin{aligned} P &= \int \mathrm{d}P = \iiint_\tau \left(\vec{J} \cdot \vec{E}\right) \mathrm{d}\tau \\ &= \int_\ell E \,\mathrm{d}\ell \iint_S J \,\mathrm{d}S \end{aligned}$$
de donde se obtiene la ec. buscada:
$$P = \Delta V I$$

- Empleando la relación $R = \Delta V/I$ podemos poner, también
$$\boxed{P = \Delta V I = R I^2 = \frac{\Delta V^2}{R}}$$

Ejemplo 3 *Se dispone de una pieza de Nichrom ($\rho_c = 103 \times 10^{-6}$ $\Omega\,$cm) con forma de paralepípedo. El área de las bases es $S = 2\,\text{cm}^2$ y la longitud $\ell = 5\,\text{cm}$. Sabiendo que la caída de potencial entre las bases es $\Delta V = 10\,\text{V}$, calcular la potencia y la energía disipada en $\Delta t = 2\,\text{h}$.*

Solución:

Calcularemos la potencia disipada mediante la expresión $P = \Delta V^2/R$. Deberemos, por tanto, determinar la resistencia que presenta la pieza conductora entre sus bases

$$R = \frac{\rho_c \ell}{S} = \frac{(103 \times 10^{-6}) \times 5}{2} = 2.58 \times 10^{-4}\ [\Omega],$$

La potencia disipada vale

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{10^2}{2.58 \times 10^{-4}}$$

esto es

$$\boxed{P = 3.88 \times 10^5 \quad [\text{W}]}$$

La energía disipada en una hora será

$$W = P\Delta t = (3.88 \times 10^5) \times (2 \times 60 \times 60)$$

y operando

$$\boxed{W_d = 2.79 \times 10^9 \quad [\text{J}].}$$

5.6 Fuerza electromotriz y segunda ley de Kirchhoff

Fuerza electromotriz:

- El campo electrostático es conservativo, por tanto
$$\oint_\ell \vec{E}^{\text{electros.}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = 0$$
lo cual indica que el trabajo total realizado por el campo electrostático sobre un portador de carga a lo largo de una corriente cerrada es nulo.
- Por otra parte, el proceso de conducción de una corriente en el interior de un medio conductor conlleva un consumo de energía (efecto Joule).
- En consecuencia, es necesario que sobre los portadores de carga actúen otras fuerzas de origen no electrostático (no conservativas), como fuerzas químicas (baterias) o fuerzas mecánicas (dinamos); en general, nos referiremos a estas fuerzas mediante los términos **fuerzas electromotrices o externas**.
- Dentro de un circuito, las fuerzas electromotrices actúan sólo en regiones localizadas que llamamos fuentes.
- Consideremos una fuente (ej. una pila) unida a un conductor formando un circuito cerrado como el mostrado en la figura 5.10.
- En el conductor existirá un campo electrostático, mientras que en la fuente, además de un campo electrostático, tendremos un campo no conservativo, $\vec{E}^{\text{fem}}$. El campo eléctrico total será
$$\vec{E} = \vec{E}^{\text{electros.}} + \vec{E}^{\text{fem}} \tag{5.10}$$
donde $\vec{E}^{\text{fem}} = 0$ fuera de la fuente.
- Tanto a lo largo del conductor como dentro de la fuente, $\vec{E}^{\text{electros.}}$ va dirigido desde el terminal positivo hacia el terminal negativo. Este campo hace que circule la corriente en el conductor, sin embargo, se opone a la misma dentro de la fuente.
- Es el campo $\vec{E}^{\text{fem}}$ el que mantiene la corriente dentro de la fuente, transvasando portadores de carga (electrones) desde el terminal negativo hasta el terminal positivo.
- Definimos la fuerza electromotriz en un circuito cerrado C como el trabajo realizado sobre la unidad de carga cuando recorre el circuito completo, esto es,
$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \frac{1}{q}\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{5.11}$$
que, considerando (5.10), puede expresarse como
$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}^{\text{electros.}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} + \oint_C \vec{E}^{\text{fem}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

como $\vec{E}^{\text{electros.}}$ es conservativo:

$$\boxed{\mathcal{E} = \oint_C \vec{E}^{\text{fem}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_-^+ \vec{E}^{\text{fem}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}$$

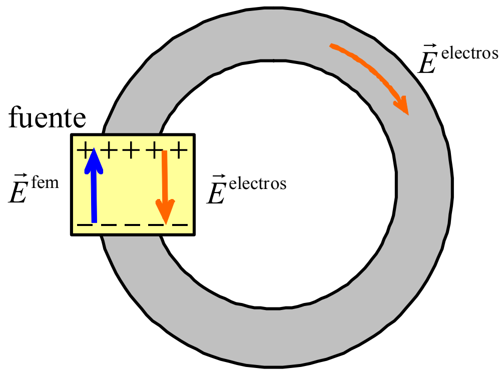

Figura 5.10: Esquema de un circuito formado por una fuente y un conductor externo.

Segunda ley de Kirchhoff:

- Calculemos la circulación de $\vec{E}$ a lo largo del circuito de la figura (5.10).
- Para realizar este cálculo utilizaremos (5.7), escribiendo

$$\underbrace{\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}}_{=\mathcal{E}} = \oint_C \frac{1}{\sigma_c} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$$

- Según (5.11), el primer miembro de esta expresión es la fuerza electromotriz de la fuente $\mathcal{E}$.
- Para calcular el segundo miembro, dividiremos la circulación en dos integrales: una a lo largo de la fuente y otra a lo largo del conductor externo:

$$\mathcal{E} = \int_{\text{f}} \frac{J_{\text{f}}}{\sigma_{c_{\text{f}}}} \mathrm{d}\ell + \int_{\text{c.e.}.} \frac{J_{\text{c.e.}}}{\sigma_{c_{\text{c.e.}}}} \mathrm{d}\ell$$

- Multiplicando y dividiendo la primera integral por el área transversal de la fuente S_{f} y la segunda por el área del conductor externo $S_{\text{c.e.}}$

$$\mathcal{E} = \int_{\text{f}} J_{\text{f}} S_{\text{f}} \frac{1}{\sigma_{c_{\text{f}}} S_{\text{f}}} \mathrm{d}\ell + \int_{\text{c.e.}} J_{\text{c.e.}} S_{\text{c.e.}} \frac{1}{\sigma_{c_{\text{c.e.}}} S_{\text{c.e.}}} \mathrm{d}\ell$$

y teniendo en cuenta, ahora, que

$$J_{\text{f}} S_{\text{f}} = J_{\text{c.e.}} S_{\text{c.e.}} = I$$

siendo I la corriente que circula por el circuito, podemos poner

$$\mathcal{E} = I R_{\text{f}} + I R_{\text{c.e.}} \tag{5.12}$$

donde

$$R_{\text{f}} = \int_{\text{f}} \frac{1}{\sigma_{c_{\text{f}}} S_{\text{f}}} \mathrm{d}\ell, \qquad R_{\text{c.e.}} = \int_{\text{c.e.}} \frac{1}{\sigma_{c_{\text{c.e.}}} S_{\text{c.e.}}} \mathrm{d}\ell$$

son, respectivamente, la resistencia interna del generador y la resistencia del conductor externo.

- La ec. (5.12) representa la **segunda ley de Kirchhoff** de la teoría de circuital, aplicada al circuito de la figura (5.10).
- La segunda ley de Kirchhoff o ley mallas establece que en un circuito cerrado, la suma de los productos de las intensidades de corriente por las resistencias es igual a la suma de las fuerzas electromotrices:

$$\boxed{\sum_i I_i R_i = \sum_j \mathcal{E}_j}$$