

Índice General

6	El campo magnético ¹	2
6.1	Introducción	2
6.2	El campo magnético \vec{B}	3
6.3	Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético	6
6.3.1	Campo magnético uniforme: movimiento de ciclotrón.	6
6.3.2	Campo magnético no uniforme:	7
6.4	Fuerza de Lorentz	9
6.5	Aplicaciones del movimiento de partículas en campos	9
6.5.1	Selector de velocidades	9
6.5.2	Espectrómetro de masas	10
6.6	Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente	11
6.7	Momento de fuerza sobre una espira con corriente	13
6.7.1	Momento dipolar magnético	15

¹Versión 2010

Tema 6

El campo magnético ¹

6.1 Introducción

Desarrollo histórico del magnetismo: Aunque en Occidente la **brújula** (una aguja imantada que puede girar libremente) se comienza a usar hacia el año 1000, se supone que en China se conocía desde hace unos 3000 años. Los conocimientos occidentales sobre los imanes comienzan en la antigua Grecia (año 500 a. C.), donde, de acuerdo con la leyenda, un pastor llamado Magnes descubrió que la punta de hierro de su bastón se veía atraída por algunas rocas minerales; con posterioridad, a estas rocas se las llamó **magnetitas** (Fe_3O_4) y **fueron los primeros imanes conocidos.**



En 1269 **Pierre de Maricourt** (Peter Peregrinus) realizó varios **experimentos con** una esfera de **magnetita**, comprobó que si se situaba una brújula en su superficie, la aguja siempre se orientaba siguiendo unas líneas que terminaban en dos puntos a los que denominó **“polos”** y que estaban situados en dos puntos diametralmente opuestos de la esfera. Es en estos polos donde la fuerza magnética es más intensa.

Más adelante se demostró que todo imán tiene dos polos, llamados polo norte y polo sur, que presentan fenómenos de atracción y repulsión similares a los presentados por las cargas eléctricas: **polos distintos se atraen y polos iguales se repelen.**

En 1600 **Gilbert** amplió los experimentos a un conjunto de materiales que presentaban propiedades magnéticas en mayor o menor grado y **postuló que la Tierra era un gran imán permanente.**

Entorno al año 1750 **John Michell** realizó varios **experimentos cuantitativos** para medir la intensidad de la fuerza magnética mediante una balanza de torsión. Llegó a la conclusión de que, análogamente a la fuerza de Coulomb, **la fuerza magnética es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia** que separa los polos. Así mismo, descubrió que **no es posible obtener polos magnéticos separados:** cuando se divide un imán no se separan sus polos norte y sur, sino que siempre se crean dos nuevos imanes, cada uno de ellos con sus polos norte y sur. En Electrostática sí existen cargas positivas y negativas separadas.

La relación entre el magnetismo y la corriente eléctrica fue descubierta por **Oersted** en 1819 cuando en una experiencia demostró que **una corriente eléctrica era capaz de desviar la aguja de una brújula** cercana.

Poco después, **Ampère** (1820) propuso que si **una corriente tenía el mismo efecto que un imán**, también entre dos corrientes tenían que producirse los mismos fenómenos de atracción y repulsión que se producían entre dos imanes. Midió, usando una balanza de torsión, estas fuerzas y formuló la ley que lleva su nombre y que describe cuantitativamente las fuerzas que se ejercen corrientes eléctricas entre sí. Por último, postuló que los **efectos magnéticos de los imanes se debían a corrientes de tipo microscópico o molecular**, algo que fue confirmado más de 100 años después por la Mecánica Cuántica.

En esa misma década, **Faraday** y **Henry**, traba-

jando de forma independiente, **descubrieron una conexión adicional entre la electricidad y el magnetismo**: cuando movían un imán en las proximidades de un circuito (variaban el campo magnético que atravesaba el circuito) se inducía en el circuito una corriente eléctrica. Asimismo, cuando modificaban el valor de una corriente en un circuito se inducía una corriente en otro circuito cercano. Es decir, un campo magnético es capaz de producir un campo eléctrico.

En 1860 **Maxwell** mostró teóricamente el efecto complementario: **un campo eléctrico es capaz de producir un campo magnético y formuló las conocidas ecuaciones de Maxwell**. Estas ecuaciones predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan con la velocidad de la luz, resultado a partir del cual postuló que la luz era una onda electromagnética. Las ondas electromagnéticas fueron generadas y detectadas con posterioridad por Hertz. Las ecuaciones de Maxwell (son 4) unifican la electricidad y el magnetismo en una teoría única: a partir de ese momento la electrostática y la magnetostática no son más que casos particulares de estas ecuaciones: se producen cuando se consideran fenómenos que no varían con el tiempo.

En nuestros días, el magnetismo tiene una infinidad de aplicaciones: electroimanes, contactores, generadores de corriente eléctrica, motores, trenes como el Maglev, etc.

6.2 El campo magnético \vec{B}

Concepto de campo magnético:

En la región del espacio que rodea a un imán o una carga eléctrica en movimiento se crea un campo magnético. La presencia de dicho campo puede ponerse de manifiesto, por ejemplo, mediante una brújula que puede girar situándose de manera que el polo norte de la aguja apunte en la dirección del campo magnético. Así mismo, las líneas de campo magnético pueden visualizarse usando limaduras de hierro que al espolvorearlas sobre los imanes se alinean de manera tangente a las líneas de campo magnético, tal y como se muestra en la figura 6.1.

Cuando introducimos el concepto de campo eléctrico presentamos las interacciones eléctricas en dos pasos:

- 1) Una distribución de carga eléctrica en reposo

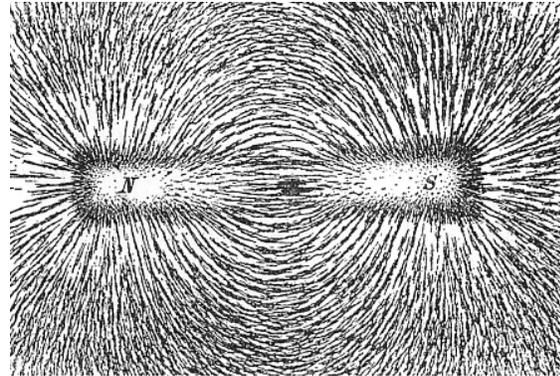


Figura 6.1: Las limaduras de hierro espolvoreadas sobre un imán dibujan las líneas de campo magnético al alinearse de manera tangente a las mismas.

produce un campo eléctrico \vec{E} en el espacio que la rodea.

- 2) El campo eléctrico ejerce una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ sobre una carga q que se encuentre en dicha región del espacio.

Ahora introduciremos el concepto de **inducción magnética o campo magnético \vec{B}** siguiendo un proceso análogo para la descripción de las interacciones magnéticas:

- 1) Una carga en movimiento o una corriente producen un campo magnético (además del campo eléctrico) en el espacio que la rodea.
- 2) El campo magnético ejerce una fuerza \vec{F} sobre cualquier corriente o carga en movimiento que esté presente en el campo.

En este tema nos centraremos en estudiar el segundo aspecto de la interacción, es decir, la fuerza que ejerce el campo magnético sobre una carga en movimiento. En el tema 7 estudiaremos el punto 1, esto es, cómo las cargas en movimiento o las corrientes producen campos magnéticos.

Como el campo eléctrico, el campo magnético es un campo vectorial cada punto del espacio tendrá un vector de campo \vec{B} asociado. Definiremos el campo magnético \vec{B} en un punto del espacio en términos de la fuerza ejercida sobre un objeto prueba. En este caso el objeto prueba será una partícula de carga puntual q que se desplaza con una velocidad \vec{v} .

Fuerza ejercida por \vec{B} sobre una carga puntual en movimiento:

Experimentalmente se demuestra que la fuerza magnética \vec{F} producida por un campo magnético \vec{B} sobre la carga q que se desplaza con un velocidad \vec{v} viene dada por

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (6.1)$$

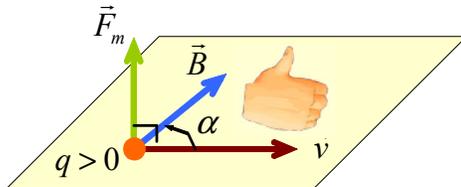


Figura 6.2: Fuerza magnética ejercida por el campo magnético \vec{B} sobre una carga $q > 0$ que se mueve con una velocidad \vec{v} .

La fuerza magnética sobre una carga puntual tiene las siguientes propiedades:

- **Magnitud:** depende de la carga q , de la velocidad v , de la magnitud del campo \vec{B} y del ángulo formado por \vec{v} y \vec{B} (ángulo α).

$$|\vec{F}| = q|\vec{v} \times \vec{B}| = q|\vec{v}||\vec{B}| \sin \alpha$$

- **Dirección:** viene dada por la dirección del producto vectorial $\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow$ es siempre perpendicular al plano formado por \vec{v} y \vec{B} .
- **Sentido:** el sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$ viene dado por la regla de la mano derecha, por tanto:
 - si $q > 0$ el sentido de \vec{F} es el mismo que el sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$
 - si $q < 0$ el sentido de \vec{F} es el opuesto al sentido de $\vec{v} \times \vec{B}$

Si \vec{v} y \vec{B} son paralelos ($\alpha = 0$) \Rightarrow la partícula cargada se mueve de forma paralela al campo \Rightarrow la fuerza magnética es nula.

La fuerza sobre una carga positiva tiene dirección opuesta a la fuerza sobre una carga negativa.

Diferencias y analogías entre la fuerza eléctrica y la fuerza magnética:

Es interesante observar las diferencias entre la ecuación (6.1) y la que nos describe la fuerza ejercida por un campo eléctrico \vec{E} sobre una carga puntual q :

- Mientras que la fuerza eléctrica siempre actúa en la dirección del campo eléctrico, la fuerza magnética siempre es perpendicular al campo magnético.
- La fuerza eléctrica siempre actuará sobre una partícula cargada mientras que la fuerza magnética sólo lo hará si la partícula cargada está en movimiento.
- Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas. Sin embargo las líneas de campo magnético forman lazos cerrados.
- La fuerza eléctrica realiza un trabajo al actuar sobre la partícula cargada pero la fuerza magnética no realiza trabajo. Esto se debe a que la expresión para el trabajo realizado en un desplazamiento elemental sería

$$\vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

y como la fuerza y la velocidad son perpendiculares, el producto escalar y por lo tanto el trabajo resulta ser nulo.

Esto implica que la fuerza magnética no es capaz de suministrar energía a la partícula cargada y por lo tanto no puede variar su energía cinética, es decir no puede modificar el módulo del vector velocidad. Sin embargo si es capaz de modificar la dirección del vector velocidad.

Unidades del campo magnético \vec{B} :

A partir de la expresión $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ podemos expresar la unidad de campo magnético en función de magnitudes fundamentales.

La unidad del campo magnético en el SI es el **tesla** (T) en honor a Nikola Tesla (1857-1943), ingeniero serbio-americano. De esta manera, una carga de 1 culombio que se mueve con una velocidad de 1m/s en el seno de un campo magnético de valor 1T experimenta una fuerza de 1N. Por lo tanto:

$$1\text{T} = \frac{\text{N}}{\text{C m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}}$$

En muchos casos, se suele emplear una unidad cgs que se denomina **gauss** (G) cuya relación con la tesla es $1\text{T} = 10^4\text{G}$.

Para hacernos una idea de la magnitud de un tesla, diremos que el campo magnético terrestre es del orden de 0.5 gauss mientras que en los laboratorios es relativamente simple llegar a obtener valores de 2.5T.

Ejemplo 1 Hallar la fuerza que se ejerce sobre un protón que se mueve con una velocidad $\vec{v} = 4 \times 10^6 \hat{x} \text{ m/s}$ en un campo magnético $\vec{B} = 2\hat{z} \text{ T}$.

Solución:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 1.6 \times 10^{-19} (4 \times 10^6 \hat{x}) \times (2\hat{z})$$

de donde

$$\boxed{\vec{F} = -1.28 \times 10^{-12} \hat{y} \text{ N}}$$

Ejemplo 2 Un protón se mueve con una velocidad de 10^6 m/s siguiendo el eje y . Entra en una región donde existe un campo magnético contenido en el plano xy , de valor 2T que forma un ángulo de 30° con el eje y . Hallar la fuerza magnética que se ejerce sobre el protón al entrar en la zona de campo magnético así como la aceleración. Repetir el ejercicio para el caso en el que se trate de un electrón. Datos: $m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $m_e = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

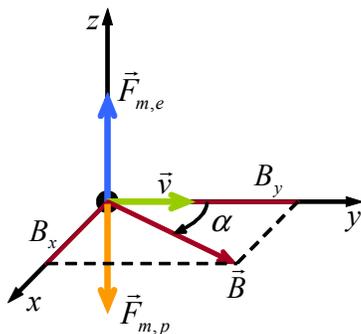


Figura 6.3: Fuerza magnética ejercida por el campo \vec{B} sobre un protón ($\vec{F}_{m,p}$) y un electrón ($\vec{F}_{m,e}$).

Solución:

En la figura se puede ver la representación gráfica de los vectores velocidad y campo magnético. Como $|\vec{B}| = 2$ entonces

$$\begin{aligned} B_y &= 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3} \\ B_x &= 2 \sin 30^\circ = 1 \end{aligned}$$

por lo que

$$\vec{B} = \hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}$$

a) Para el caso del protón:

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= q_p \vec{v} \times \vec{B} \\ &= (1.6 \times 10^{-19} \times 10^6 \hat{y}) \times (\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}) \\ &= -1.6 \times 10^{-13} \hat{z} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \frac{\vec{F}_p}{m_p} = \frac{-1.6 \times 10^{-13} \hat{z}}{1.67 \times 10^{-27}} \\ &= -0.958 \times 10^{14} \hat{z} \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

b) Para el caso del electrón:

$$\begin{aligned} \vec{F}_e &= q_e \vec{v} \times \vec{B} \\ &= (-1.6 \times 10^{-19} \times 10^6 \hat{y}) \times (\hat{x} + \sqrt{3}\hat{y}) \\ &= 1.6 \times 10^{-13} \hat{z} \text{ N} \end{aligned}$$

$$\vec{a}_e = \frac{\vec{F}_e}{m_e} = \frac{1.6 \times 10^{-13} \hat{z}}{9.109 \times 10^{-31}} = 0.176 \times 10^{18} \hat{z} \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 3 Al medir el campo magnético terrestre en un punto de la superficie se obtiene un valor de la magnitud de 0.6 G y una dirección para el vector que, estando contenida en el plano del meridiano, forma un ángulo con la horizontal de 70° . Un protón con carga $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ se mueve horizontalmente y con dirección norte, con $v = 10 \text{ Mm/s}$. Hallar la fuerza magnética que se ejerce sobre el protón. Ver figura.

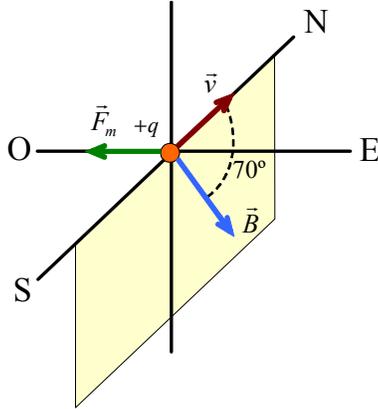


Figura 6.4:

Solución:

Asignamos x a la dirección “Sur” e y a la dirección Este, mientras que z será la vertical. Por tanto,

$$\vec{v} = v_x \hat{x} = -10^7 \hat{x} \text{ m/s}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{x} + B_z \hat{z} = B \cos 70^\circ \hat{x} - B \sin 70^\circ \hat{z} \text{ T}$$

Por lo tanto, la expresión de la fuerza magnética es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = q[v_x \hat{x} \times (B_x \hat{x} + B_z \hat{z})] = -qv_x B_z \hat{y}$$

sustituyendo valores numéricos resulta

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -1.6 \times 10^{-19} \times (-10^7) \times (-2 \sin 70^\circ) \hat{y} \\ &= -9.02 \times 10^{-17} \hat{y} \text{ N} \end{aligned}$$

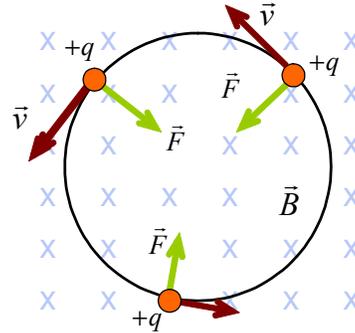
6.3 Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético

6.3.1 Campo magnético uniforme: movimiento de ciclotrón.

1. Caso \vec{v} perpendicular a \vec{B} :

Consideramos una partícula de carga $q > 0$ moviéndose con velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético uniforme \vec{B} de manera que, inicialmente, \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares (supondremos que la

dirección de \vec{B} es perpendicular al plano del papel tal y como se muestra en la figura 6.5)

Figura 6.5: Trayectoria circular de una partícula cargada ($q > 0$) que se mueve con un vector velocidad \vec{v} perpendicular al campo \vec{B} .

Los vectores \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares, de modo que la fuerza magnética \vec{F} tiene magnitud $F = qvB$ y dirección perpendicular a \vec{v} y \vec{B} . La partícula se desplaza bajo la influencia de una fuerza de magnitud constante que es siempre perpendicular a \vec{v} por lo que no puede cambiar la magnitud de la velocidad, sólo su dirección. En la figura 6.5 se puede ver como las direcciones tanto de \vec{v} como de \vec{F} varían continuamente. Sin embargo la magnitud de la velocidad es constante. Por lo tanto, la trayectoria que sigue la partícula es una circunferencia cuyo plano es perpendicular al campo magnético. Si la carga es positiva, el sentido de rotación será contrario a las agujas del reloj (figura 6.5). Si la carga es negativa girará en el sentido de las agujas del reloj.

Esta fuerza debe ser idéntica a la proporcionada por la aceleración centrípeta v^2/R por lo que, de acuerdo con la segunda ley de Newton

$$|\vec{F}| = |q|\vec{v} \times \vec{B}| = q|\vec{v}||\vec{B}| = \frac{mv^2}{R}$$

donde m es la masa de la partícula y R el radio de la trayectoria. Despejando el R obtenemos:

$$R = \frac{mv}{|q|B}$$

La frecuencia angular de giro es

$$\omega = \frac{v}{R} = B \frac{|q|}{m}$$

y el periodo de revolución:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}$$

De los resultados anteriores se deduce que ni ω ni T dependen de la velocidad de la partícula ni del radio. Sin embargo, ambas son función de la relación q/m .

A la frecuencia f se la conoce como **frecuencia de ciclotrón** por emplearse en un dispositivo acelerador de partículas llamado ciclotrón.

2. Caso \vec{v} NO perpendicular a \vec{B}

En el caso de que \vec{v} no sea perpendicular a \vec{B} , sino que forme un cierto ángulo con éste, siempre es posible descomponer el vector velocidad en dos componentes:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$$

Una de ellas, \vec{v}_{\parallel} , paralela a \vec{B} y por tanto no sería afectada por éste y la partícula no sufriría modificación de esa componente de la velocidad, por lo que tendería a seguir una trayectoria recta.

Otra sería perpendicular al campo, \vec{v}_{\perp} , y por tanto, debido a esta componente la partícula estaría sometida a una fuerza perpendicular a \vec{B} y a \vec{v} por lo que tendería a describir una circunferencia.

El movimiento total sería entonces una composición de ambos: una recta y una circunferencia perpendiculares entre sí, es decir, se describiría una hélice, tal y como se muestra en la figura 6.6

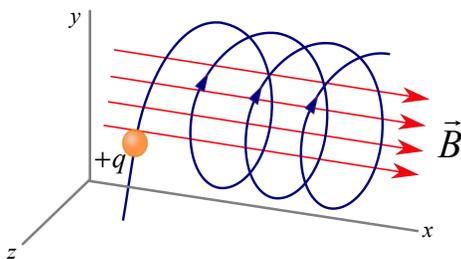


Figura 6.6: Trayectoria helicoidal de una partícula cargada que se mueve con un vector velocidad \vec{v} que tiene una componente paralela al campo \vec{B} .

6.3.2 Campo magnético no uniforme:

Cuando las partículas cargadas se mueven en campos magnéticos no uniformes se producen movimientos muy complejos:

- **Botellas magnéticas:** Es el caso de las partículas que se mueven en un campo magnético no uniforme que es más intenso en los extremos y más débil en la parte central como el producido por dos lazos de corriente separados una cierta distancia. Como se muestra en la figura 6.7, las partículas cargadas se mueven girando en espiral hasta alcanzar un extremo, donde invierten su trayectoria dando lugar en un movimiento periódico hacia adelante y atrás. Esta configuración se conoce como *botella magnética* debido a que las partículas cargadas pueden quedar atrapadas en ellas.

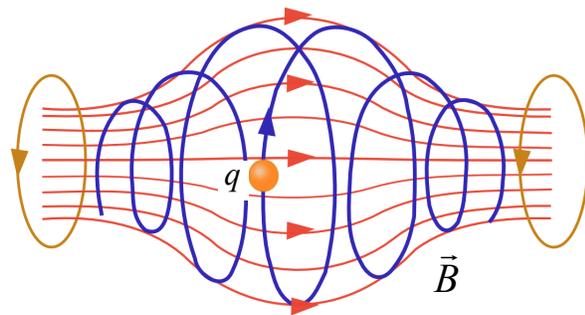


Figura 6.7: Botella magnética: las partículas cargadas se mueven girando en espiral en un campo magnético no uniforme en el que quedan atrapadas.

- **Bandas de radiación de van Allen:** el campo magnético no uniforme de la Tierra atrapa partículas cargadas procedentes, principalmente, del Sol. Estas partículas quedan confinadas en los denominados cinturones o bandas de radiación de van Allen, que son regiones a una altura de varios kilómetros de la superficie terrestre en las que protones y electrones

se mueven en espiral desde el polo norte al polo sur. Cerca de los polos las partículas pueden escapar de estas bandas hacia la atmósfera, produciendo las auroras boreales o auroras australes.

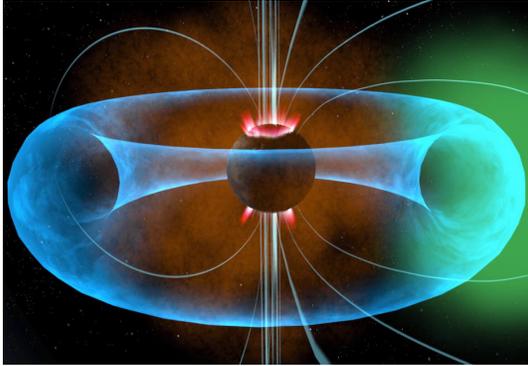


Figura 6.8: Cinturones o bandas de van Allen. Son áreas en forma de anillo de superficie toroidal en las que protones y electrones se mueven en espiral entre los polos magnéticos de la tierra.



Figura 6.9: Aurora boreal en Bear Lake (Alaska). 18 Febrero de 2005.

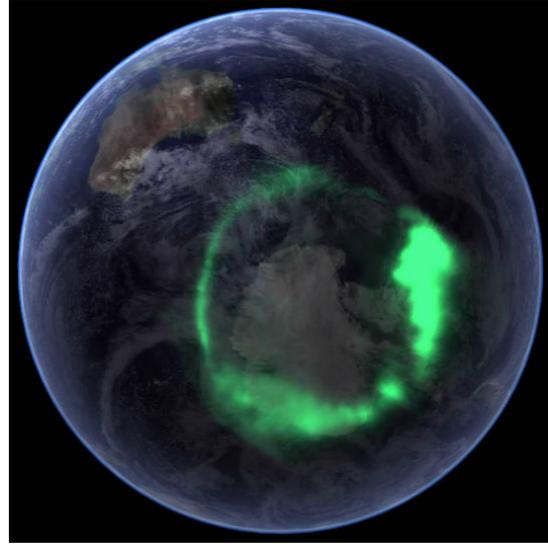


Figura 6.10: Aurora austral. Imagen capturada por un satélite de la NASA el 26 Abril 2006.

Ejemplo 4 *Un protón se mueve en una órbita circular de 14 cm de radio en un campo magnético uniforme de 0.35 T de manera que está dirigido perpendicularmente a la velocidad del protón. a) Hallar la velocidad del protón. b) Si en lugar del protón se moviera un electrón, con la velocidad anterior, ¿cuál sería el radio de su órbita circular?*

Solución:

a) Como

$$R = \frac{mv}{qB}$$

se deduce que

$$v = \frac{RqB}{m_p}$$

por tanto

$$\begin{aligned} v &= \frac{(14 \times 10^{-2} \text{m})(1.6 \times 10^{-19} \text{C})(0,35 \text{T})}{1,67 \times 10^{-27} \text{kg}} \\ &= 4,7 \times 10^6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) En este caso

$$R = \frac{m_e v}{qB} = 7,6 \times 10^{-5} \text{ m}$$

Ejemplo 5 Se diseña un experimento para medir la intensidad de un campo magnético. Primero los electrones se aceleran mediante una diferencia de potencial de 350 V. Posteriormente se introducen en la región en la que actúa el campo magnético a medir, desviándose el haz de electrones y formando una circunferencia de radio 7.5 cm. Si el campo magnético es perpendicular al haz, ¿cuál es su magnitud?. ¿Cuál es la frecuencia angular de giro de los electrones?

Solución:

El campo eléctrico creado por la d.d.p. acelera los electrones transfiriéndoles una energía cinética de manera que

$$\frac{1}{2}mv^2 = |e|V$$

de donde

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2|e|V}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.6 \times 10^{-19})(350)}{9.11 \times 10^{-31}}} \\ &= 1.11 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Como

$$R = \frac{mv}{qB}$$

se puede obtener B de la forma

$$\begin{aligned} B &= \frac{mv}{|e|R} = \frac{(9.11 \times 10^{-31})(1.11 \times 10^7)}{(1.6 \times 10^{-19})(0.075)} \\ &= 8.4 \times 10^{-4} \text{ T} \end{aligned}$$

A su vez, la frecuencia angular ω sería

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{1.11 \times 10^7}{0.075} = 1.5 \times 10^8 \text{ rad/s}$$

6.4 Fuerza de Lorentz

Cuando una partícula cargada se mueve con velocidad \vec{v} en presencia tanto de un campo eléctrico \vec{E} como de un campo magnético \vec{B} la fuerza total sobre la partícula cargada se obtiene por superposición de la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ y de la fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$. En ese caso la fuerza total se conoce como **Fuerza de Lorentz** y viene dada por:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

6.5 Aplicaciones del movimiento de partículas en campos

Veamos algunas aplicaciones de los principios vistos en este capítulo

6.5.1 Selector de velocidades

No todas las partículas cargadas producidas por un cátodo se desplazan con la misma velocidad, y sin embargo, a veces conviene disponer de partículas cargadas que se muevan a la misma velocidad como en el caso del espectrómetro de masas que veremos mas adelante.

Las partículas que viajan con una determinada velocidad pueden seleccionarse utilizando una disposición de un campo eléctrico y uno magnético perpendiculares conocida como *selector de velocidades* y que se muestra en la figura 6.11.

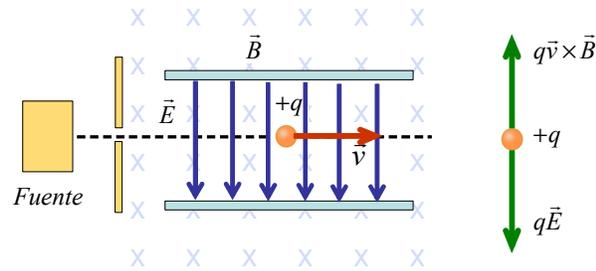


Figura 6.11: El selector de velocidades utiliza dos campos \vec{E} y \vec{B} perpendiculares. Sólo las partículas con una velocidad $v = E/B$ no se desvían

Un par de placas paralelas conductoras a las que se aplica una d.d.p. dan lugar a un campo eléctrico dirigido hacia abajo, mientras que un campo magnético se aplica perpendicularmente a la superficie del papel. Para una carga $q > 0$ con una velocidad \vec{v} la fuerza eléctrica $q\vec{E}$ estaría dirigida hacia abajo, mientras que la fuerza magnética $q\vec{v} \times \vec{B}$ lo estaría hacia arriba.

Si ambas fuerzas fueran iguales la partícula se movería horizontalmente, es decir si $qvB = qE$ se deduce que

$$v = \frac{E}{B}$$

Sólo las partículas con ese valor de v pueden pasar sin ser desviadas por los campos.

En las partículas con velocidad mayor que la indicada, la fuerza magnética predomina y la partícula se desvía hacia arriba, mientras que para las partículas con velocidad inferior a v , es la fuerza eléctrica la que predomina y la partícula se desvía hacia abajo.

Ejemplo 6 Un protón se mueve en la dirección x en una región donde hay un campo eléctrico $\vec{E} = 2 \times 10^5 \hat{z} \text{ N/C}$ y un campo magnético $\vec{B} = -3000 \hat{y} \text{ G}$. a) Hallar la velocidad del protón en el caso de que éste no se desvíe. b) En el caso de que el protón se moviera con una velocidad doble de la hallada en el caso "a", ¿en qué dirección se desviará?

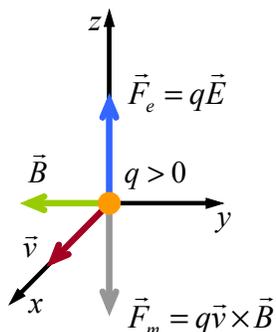


Figura 6.12:

Solución:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{2 \times 10^5}{3000 \times 10^{-4}} = 666,7 \text{ km/s}$$

Si se mueve con velocidad doble que la anterior, la fuerza magnética predominaría sobre la eléctrica con lo que se desviaría en dirección opuesta al campo eléctrico, es decir hacia las z negativas.

6.5.2 Espectrómetro de masas

Este dispositivo fue diseñado por F.W. Aston en 1919 como un medio para medir la masa de los distintos isótopos. Hace uso de la distinta relación

masa-carga de cada isótopo. Aunque existen diversas versiones veremos aquí la conocida como espectrómetro de masas de Bainbridge.

Un haz de iones pasa por un selector de velocidades con campos \vec{E} y \vec{B} cruzados que bloquea el paso de aquellas partículas cuya velocidad no sea $v = E/B$. A continuación, penetra en una región en la que existe un segundo campo magnético \vec{B}_0 perpendicular al plano del papel, tal y como se muestra en la figura 6.13.

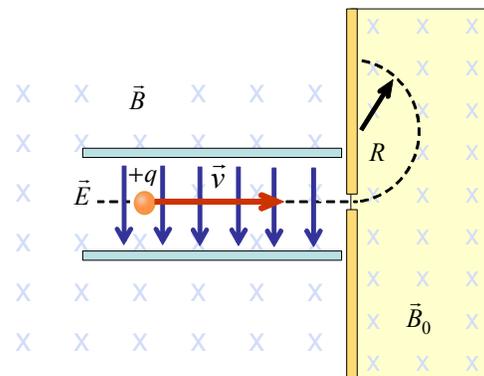


Figura 6.13: Espectrómetro de masas: el haz de iones pasa primero por un selector de velocidades y a continuación entra en una región con un campo \vec{B}_0

El ión experimentará una fuerza que provocará un cambio en su trayectoria que se convertirá en semicircular, con un radio que dependerá de la relación masa-carga.

Como

$$R = \frac{mv}{qB_0}$$

se deduce

$$\frac{m}{q} = \frac{RB_0}{v} = \frac{RB_0B}{E}$$

Como B_0 y v son conocidos, midiendo R se puede determinar m/q .

Como habitualmente se conoce por otros procedimientos la carga del ion, es posible determinar su masa y caracterizar así los distintos isótopos. Con un sistema parecido al descrito J.J.Thomson determinó la relación e/m .

Ejemplo 7 Un haz de iones Ni^{58} de carga $+e$ y masa $9,6 \times 10^{-26} \text{ Kg}$ se aceleran haciéndoles pasar primero a través de un selector de velocidades y después en un espectrómetro de masas. Los valores del campo eléctrico y del campo magnético en el selector de velocidades son $E = 12000 \text{ V/m}$ y $B = 0,12 \text{ T}$. El campo magnético del espectrómetro vale también $0,12 \text{ T}$. Hallar: a) La velocidad de los iones que atraviesan el selector. b) Los radios de curvatura de las órbitas de los iones para el caso de Ni^{58} y Ni^{60} ($m = 9,93 \times 10^{-26} \text{ Kg}$). c) La diferencia entre estos radios.

Solución:

La velocidad de los iones que atraviesan el selector es

$$v = \frac{E}{B} = \frac{12 \times 10^4}{0.12} = 10^5 \text{ m/s}$$

La expresión de los radios de curvatura sería

$$R = \frac{mv}{qB}$$

que para el Ni^{58}

$$R_1 = \frac{(9.6 \times 10^{-26})(10^5)}{(1.6 \times 10^{-19})(0.12)} = 0.5 \text{ m}$$

mientras que para el Ni^{60} es

$$R_2 = \frac{(9.93 \times 10^{-26})(10^5)}{(1.6 \times 10^{-19})(0.12)} = 0.517 \text{ m}$$

La diferencia de radios

$$R_2 - R_1 = 0,017 \text{ m} = 1.7 \text{ cm}$$

6.6 Fuerza magnética sobre un conductor que transporta corriente

En un hilo conductor que conduce una corriente eléctrica hay cargas en movimiento. Si un campo magnético ejerce una fuerza sobre una partícula cargada en movimiento, cuando un hilo que conduce una corriente esté bajo la acción de un campo magnético se ejercerá una fuerza magnética sobre

las cargas que se transmitirá al material del hilo de manera que sobre éste existirá una fuerza de tipo magnético que será la resultante de la suma de todas y cada una de las fuerzas magnéticas individuales que el campo magnético ejerce sobre cada carga.

Es posible hallar una expresión matemática que de cuenta de la magnitud y dirección de esta fuerza.

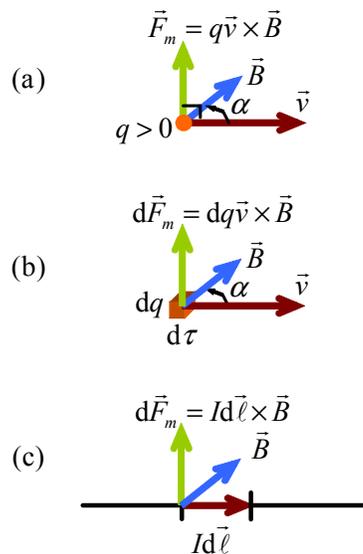


Figura 6.14: Fuerza magnética sobre una carga puntual (a), sobre un elemento de carga (b) y sobre un elemento de corriente filiforme (c).

La fuerza magnética ejercida por una inducción magnética \vec{B} sobre una carga puntual q con velocidad de deriva \vec{v} :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Si en vez de una carga puntual consideramos un elemento de carga dq , la fuerza magnética resultante es

$$d\vec{F}_m = dq\vec{v} \times \vec{B}$$

Teniendo en cuenta que $dq = I dt$, la fuerza sobre un elemento de corriente filiforme es

$$d\vec{F}_m = I dt\vec{v} \times \vec{B} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Si la corriente filiforme tiene una longitud finita definida desde un punto inicial A hasta un punto

final B, la fuerza magnética total sobre dicha corriente es

$$\vec{F}_m = \int_A^B d\vec{F}_m = \int_A^B (I d\vec{\ell} \times \vec{B})$$

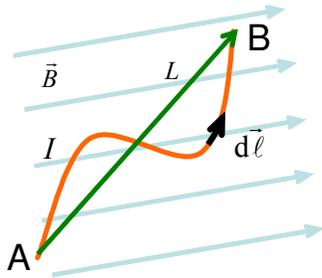


Figura 6.15: La fuerza magnética sobre un conductor curvo en un campo magnético uniforme es equivalente a la fuerza sobre un segmento recto de longitud L.

En el caso de que la inducción magnética sea uniforme, la expresión anterior se reduce a

$$\vec{F}_m = I \left(\int_A^B d\vec{\ell} \right) \times \vec{B}$$

donde el contenido entre paréntesis es la integral de una magnitud vectorial que se forma mediante la suma de todos los desplazamientos elementales desde A hasta B por lo que el resultado sería un vector \vec{L} que va desde A hasta B. Por lo tanto, como se muestra en la figura 6.15 la fuerza magnética sobre el conductor en un campo magnético uniforme es equivalente a la fuerza sobre un segmento recto de longitud L:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$$

Además, si la corriente forma un lazo cerrado

$$\vec{F}_m = I \underbrace{\left(\oint d\vec{\ell} \right)}_{=0} \times \vec{B} = 0$$

es decir, la fuerza magnética total sobre un lazo cerrado de corriente que se encuentra en el seno de un campo magnético uniforme es nula.

Ejemplo 8 Un alambre de 3 mm de longitud transporta una corriente de 3 A en la dirección x. Yace en un campo magnético de magnitud 0,02 T que está situado en el plano xy y forma un ángulo de 30° con el eje x. ¿Cuál es la fuerza magnética ejercida sobre el alambre?.

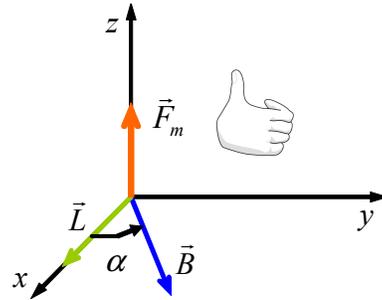


Figura 6.16:

Solución:

La fuerza magnética es

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = ILB \sin 30^\circ \hat{z} = 9 \times 10^{-5} \hat{z} \text{ N}$$

Ejemplo 9 Un alambre tiene la forma de un lazo semicircular de radio R y yace en el plano xy. Transporta una corriente I tal y como muestra la figura. Hay un campo magnético uniforme $\vec{B} = B \hat{z}$ perpendicular al plano del lazo. Hallar la fuerza que actúa sobre el lazo semicircular.

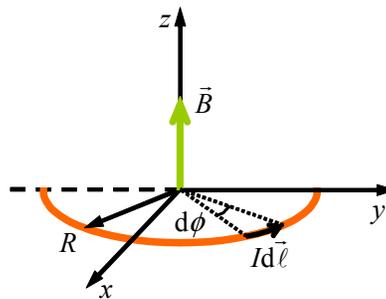


Figura 6.17:

Solución:

La fuerza sobre un elemento diferencial del lazo es

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \times \vec{B}$$

En este caso, el elemento de línea vale $d\vec{\ell} = R d\phi \hat{\phi}$, luego

$$d\vec{F} = (IR d\phi \hat{\phi}) \times (B \hat{z}) = IRB d\phi \hat{\rho}$$

La fuerza total sobre el lazo vale

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \int d\vec{F} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (IRB \hat{\rho}) d\phi \\ &= IRB \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \hat{\rho} d\phi \end{aligned}$$

El vector unitario $\hat{\rho}$ depende de la coordenada ϕ de integración y por tanto no puede sacarse de la integral. Para realizar esta integral hay que expresar $\hat{\rho}$ en el sistema cartesiano, esto es, $\hat{\rho} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$. Entonces, la fuerza resulta

$$\begin{aligned} \vec{F} &= IRB \left(\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \phi d\phi \hat{x} + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sin \phi d\phi \hat{y} \right) \\ &= IRB \left[(\sin \phi) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \hat{x} - (\cos \phi) \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \hat{y} \right] \\ &= 2IRB \hat{x} \quad \mathbf{N} \end{aligned}$$

Ejemplo 10 *Un hilo doblado en forma de semi-círculo de radio R forma un circuito cerrado que conduce una corriente I . El circuito se encuentra situado en el plano xy estando presente un campo magnético uniforme \vec{B} con dirección de las y positivas, tal y como muestra la figura. Hallar la fuerza magnética sobre la parte recta del hilo y sobre la parte curva.*

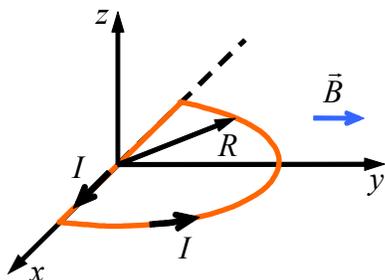


Figura 6.18:

Solución:

En la zona recta del hilo, la corriente tiene dirección x y el campo dirección y por lo que la fuerza sobre esa parte es

$$\vec{F}_1 = I\vec{L} \times \vec{B} = 2IRB \hat{z}$$

Para hallar la fuerza sobre la parte curva, plantearemos primero la diferencial de fuerza $d\vec{F}_2$ que se ejerce sobre un elemento $d\vec{\ell}$. Si el ángulo ϕ es el formado por \vec{B} y $d\vec{\ell}$, y viendo que la dirección de la fuerza debe ser perpendicular a \vec{B} y $d\vec{\ell}$ y dirigida hacia adentro, es decir hacia las z negativas, se obtiene

$$\begin{aligned} d\vec{F}_2 &= I d\vec{\ell} \times \vec{B} = (IR d\phi \hat{\phi}) \times (B \hat{y}) = \\ &= IRB d\phi (-\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}) \times \hat{y} \\ &= -IRB \sin \phi \hat{z} \end{aligned}$$

La fuerza total sobre la zona curva se obtendría integrando la expresión anterior tomando como variable de integración ϕ que variaría desde 0 hasta π

$$\vec{F}_2 = -IRB \left(\int_0^\pi \sin \phi d\phi \right) \hat{z} = -2IRB \hat{z}$$

y vemos como las dos fuerzas sumadas dan cero.

6.7 Momento de fuerza sobre una espira con corriente

Hemos visto en el apartado anterior que un campo magnético ejerce una fuerza sobre un hilo que transporta corriente. Consideremos una espira plana, rectangular, por la que pasa una corriente I de forma que la espira pueda girar en torno a un eje contenido en su plano. Dicha espira está inmersa en un campo magnético \vec{B} uniforme por lo que la fuerza total sobre la espira es cero, pero puede haber un momento de torsión que actúa sobre la espira. Este fenómeno es la base de funcionamiento de los motores eléctricos.

Las dimensiones de la espira son l y w de manera que el área del rectángulo formado es $S = lw$. La geometría del problema se muestra en la figura 6.19 con dos perspectivas distintas. En la primera

perspectiva el plano de la espira y el campo magnético son perpendiculares mientras que en la segunda perspectiva la normal al plano de la espira y el campo magnético forman un ángulo θ .

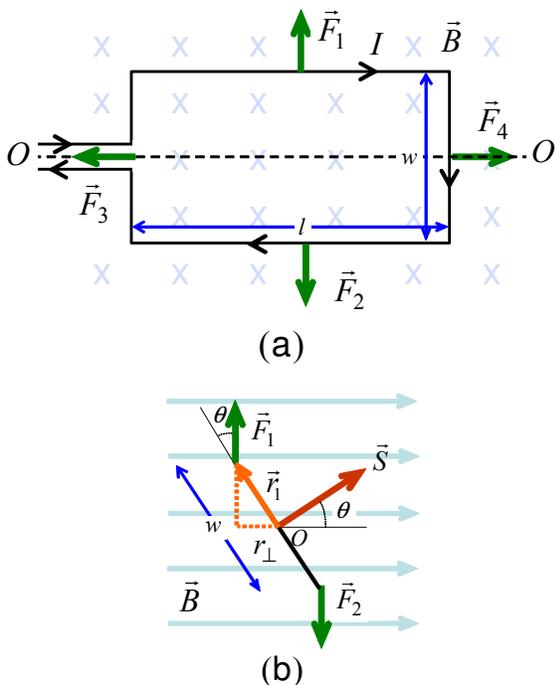


Figura 6.19: Fuerzas sobre una espira de corriente en un campo magnético uniforme \vec{B} . La fuerza resultante es cero. a) El momento de torsión es cero cuando \vec{B} y \vec{S} son paralelos (posición de equilibrio). b) La espira gira bajo la acción de un momento neto que vale $\tau_p = ISB \sin \theta$.

Analizaremos que sucede en cada uno de los casos. Conviene, para hacer estos análisis, usar el vector superficie \vec{S} de la espira cuyo módulo es S y la dirección perpendicular al plano de la espira y con sentido dado por el avance del tornillo cuando éste gira en el mismo sentido en el que lo hace la corriente que transporta la espira (regla de la mano derecha)

En el primer caso mostrado en la figura 6.19.a, \vec{S} y \vec{B} tienen la misma dirección y sentido. Las fuerzas sobre los lados superior \vec{F}_1 e inferior \vec{F}_2 son iguales en módulo y opuestas de manera que

$$F_1 = F_2 = IlB$$

siendo la suma de ambas fuerzas cero.

De la misma manera las fuerzas sobre los dos lados de longitud w , \vec{F}_3 y \vec{F}_4 son iguales en módulo, IwB y opuestas en dirección por lo que su resultante también es cero. Por tanto, la fuerza total sobre la espira es cero. Sin embargo, Las cuatro fuerzas están dirigidas hacia afuera de la espira, ejerciéndose cada una sobre un lado distinto por lo que el conjunto de fuerzas tiende a cambiar la forma de la espira deformándola; si ésta es suficientemente rígida no se deformaría.

Otro efecto que se puede observar es que las fuerzas mencionadas pueden producir un momento de fuerzas de manera que si la espira fuera libre de girar en torno a un eje, este momento produciría un giro de la espira. Así por ejemplo, tomemos un posible eje de giro que esté contenido en el plano de la espira y sea siempre perpendicular a \vec{B} como el eje OO' que se muestra en la figura.

Pensemos ahora en que partiendo de la posición marcada en la figura 6.19.a giramos la espira un ángulo θ de manera que el vector superficie \vec{S} y el campo magnético \vec{B} ya no son paralelos. La situación se describe gráficamente en la figura 6.19.b. Ahora las dos fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 tienden a hacer girar la espira en torno al eje OO' de manera que devuelvan la espira a la posición de equilibrio descrita en la 6.19.a. Por otra parte, las fuerzas \vec{F}_3 y \vec{F}_4 son paralelas al eje OO' de manera que no producen ningún momento por lo que su efecto continúa siendo únicamente el de tratar de deformar la espira.

A partir de la figura 6.19.b se puede determinar el momento producido por la fuerza \vec{F}_1 . La distancia perpendicular desde el eje hasta la línea de acción de la fuerza es

$$r_\perp = \frac{1}{2}w \sin \theta$$

y el momento ejercido por \vec{F}_1 :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= |\vec{r}_1 \times \vec{F}_1| = r_\perp F_1 = \frac{1}{2}w F_1 \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}w IlB \sin \theta \end{aligned}$$

Este momento tiende a hacer girar la espira en el sentido de las agujas del reloj. También la fuerza \vec{F}_2 tiene un momento respecto al mismo eje en el mismo sentido e igual módulo que el producido por \vec{F}_1 . Por lo tanto el momento total sería la suma de

ambos momentos iguales, es decir

$$\tau_p = wIlB \sin \theta = ISB \sin \theta$$

con $S = wl$.

Bajo la acción de este momento la espira girará en el sentido de las agujas del reloj, haciendo que la dirección de \vec{S} y \vec{B} se aproxime, es decir, disminuyendo el ángulo θ y por tanto la magnitud del momento que se hace cero cuando \vec{S} y \vec{B} sean paralelos, lo que nos lleva de nuevo a la posición 6.19.a, que es una posición de equilibrio.

La ecuación anterior se puede poner de forma vectorial de la manera siguiente:

$$\vec{\tau}_p = I\vec{S} \times \vec{B}$$

ecuación que se puede aplicar a cualquier posicionamiento de la espira respecto al campo magnético.

Cuando en vez de tener una sola espira se dispone de una bobina con N espiras este momento se ejercerá sobre las N espiras por lo que el momento total sería

$$\vec{\tau}_p = NI\vec{S} \times \vec{B}$$

donde recordemos que el sentido del vector \vec{S} viene determinado por la regla de la mano derecha como se muestra en la figura 6.22.

Este momento de fuerza que produce un movimiento de rotación de la bobina permite un gran número de aplicaciones prácticas siendo la base de funcionamiento de los motores eléctricos o de los dispositivos analógicos de medida de tensión, corriente o resistencia.

Ejemplo 11 Un lazo circular de radio 2 cm tiene 10 vueltas y transporta una corriente de 3 A. El eje del lazo forma un ángulo de 30° con un campo magnético de magnitud 8000 G. Hallar la magnitud del par sobre el lazo.

Solución:

$$|\vec{\tau}_p| = NI|\vec{S} \times \vec{B}| = NISB \sin \theta = 1.51 \times 10^{-2} \text{ Nm}$$

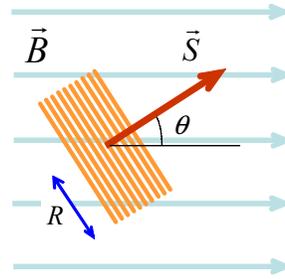


Figura 6.20: Geometría del problema.

Ejemplo 12 Un motor eléctrico sencillo tiene una bobina circular de 15 mm de radio y 100 vueltas por la que circula una corriente de 65 mA. El campo magnético en el que está inmersa es uniforme y de valor $B = 23 \text{ mT}$. En un determinado instante la bobina se encuentra orientada de manera que su vector \vec{S} forma un ángulo $\theta = 25^\circ$ con el campo como se observa en la figura. La bobina puede girar alrededor de un eje perpendicular a \vec{S} y a \vec{B} que pasa por su centro. a) Hallar el valor y la dirección del momento de fuerza sobre la bobina en ese instante. b) ¿Cómo será τ_p si se invierte la corriente?. c) ¿Para qué orientación de la bobina es τ_p máximo y para cual mínimo?

Solución:

a)

$$\tau_p = |NIS\vec{S} \times \vec{B}| = 4.5 \times 10^{-5} \text{ Nm}$$

La dirección del momento es la de $\vec{S} \times \vec{B}$ que es perpendicular al plano del papel y entrando.

b) La dirección del momento resulta ser la contraria.

c) El máximo valor del momento se alcanza cuando $\sin \theta = \pm 1$, es decir, cuando $\theta = \pm 90^\circ$. Para este ángulo el valor del momento es

$$\tau_p = NISB = 1.1 \times 10^{-4} \text{ Nm}$$

El valor mínimo se produce para $\theta = 0^\circ$, es decir, cuando \vec{S} y \vec{B} tienen la misma dirección.

6.7.1 Momento dipolar magnético

Definición de momento dipolar magnético:

Ya hemos visto que la fuerza neta sobre una espira

de corriente en un campo magnético uniforme es cero. Sin embargo existe un par que tiende a girarla. Así una bobina suspendida de un hilo vertical e inmersa en un campo magnético uniforme como la que se muestra en la figura 6.21.a tenderá a girar para alinearse con el campo. El mismo comportamiento se observa cuando en vez de una bobina se suspende del hilo un imán como muestra la figura 6.21.b.

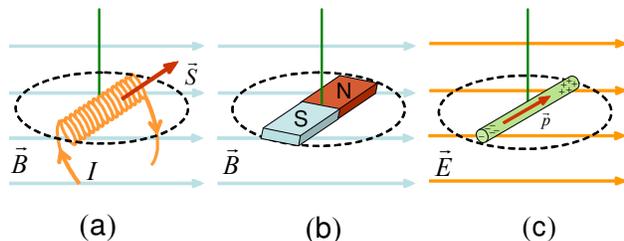


Figura 6.21: Alineamiento de una bobina (a) y de un imán (b) en un campo uniforme \vec{B} . Analogía con el alineamiento de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico uniforme \vec{E} (c).

El momento de torsión sobre una bobina de N vueltas, área \vec{S} y con una corriente I venía dado por:

$$\vec{\tau}_p = NI\vec{S} \times \vec{B}$$

Para disponer de una expresión del momento que sea aplicable a imanes es conveniente definir el llamado *momento dipolar magnético* \vec{m} como

$$\vec{m} = NI\vec{S}$$

de forma que el momento de torsión puede escribirse como

$$\vec{\tau}_p = \vec{m} \times \vec{B}$$

Las unidades de \vec{m} en el SI son $\text{A}\cdot\text{m}^2$. La dirección y el sentido de \vec{m} coinciden con la del vector \vec{S} y viene determinado por la regla de la mano derecha, cuando se giran los dedos en el sentido de la corriente el pulgar apunta en la dirección de los vectores \vec{m} y \vec{S} como se muestra en la figura 6.22.

Es interesante notar que dicha situación es análoga a la que se muestra en la 6.21.c, en la que tenemos un dipolo eléctrico situado en un campo eléctrico \vec{E} uniforme. En ese caso existirá un momento

de torsión que tenderá a girar el dipolo para alinearlo con el campo, siendo $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$, donde \vec{p} es el momento dipolar que se define como $\vec{p} = q\vec{l}$.

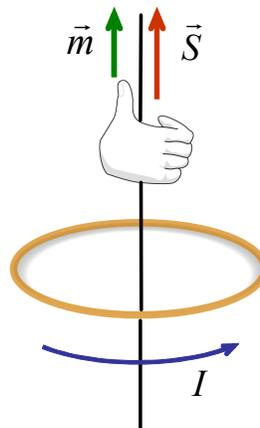


Figura 6.22: Regla de la mano derecha para determinar la dirección del momento magnético \vec{m} y el vector \vec{S} .