

# Índice general

<b>8. Inducción electromagnética</b> <sup>1</sup>	<b>2</b>
8.1. Introducción . . . . .	2
8.2. Ley de inducción de Faraday . . . . .	3
8.2.1. Descripción fenomenológica . . . . .	3
8.2.2. Formulación . . . . .	4
8.3. Fuerza electromotriz debida al movimiento . . . . .	6
8.4. Ley de Lenz . . . . .	9
8.5. Fuerzas electromotrices inducidas y campos eléctricos . . . . .	12
8.6. Aplicaciones . . . . .	13
8.6.1. Generadores . . . . .	13
8.6.2. Motores (revisión) . . . . .	14
8.6.3. Corrientes de Foucault o turbillonarias . . . . .	16
8.7. Inductancia . . . . .	17
8.7.1. Autoinducción . . . . .	17
8.7.2. Inductancia mutua . . . . .	19
8.8. Energía magnética . . . . .	21
8.8.1. Energía magnética en función del campo . . . . .	22
8.9. Corriente de desplazamiento . . . . .	23
8.10. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	25
8.10.1. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	26

---

<sup>1</sup>Versión 2010

## Tema 8

# Inducción electromagnética <sup>1</sup>

### 8.1. Introducción

Hemos estudiado en Electroestática los fenómenos producidos por cargas en reposo. Allí vimos como podíamos electrificar cuerpos mediante fricción o por inducción. Las cargas resultantes daban lugar a campos eléctricos conservativos (integrales de línea cerradas nulas). Este tipo de electricidad se podía también almacenar en los dispositivos conocidos como condensadores.

En 1800 Volta inventó la denominada batería o pila de Volta, capaz de producir electricidad en cantidades abundantes con lo que se pudieron estudiar los fenómenos producidos por corrientes eléctricas sostenidas. Así, se dedujo en el tema 5 que las corrientes eléctricas se debían a un campo eléctrico no conservativo producido en el interior de la batería o pila, teniendo su origen en una transformación de energía química en energía eléctrica.

En 1819 Oersted descubre que una corriente eléctrica continua (producida por una batería) era capaz de desviar la aguja de una brújula de manera similar a como lo hacía un imán. Este descubrimiento de Oersted muestra la relación existente entre la electricidad (corriente eléctrica) y el magnetismo (imán): la corriente eléctrica crea un campo magnético que ejerce una fuerza sobre la brújula (un imán). Desde ese momento se produce en la comunidad científica la pregunta siguiente: ¿Si la electricidad es capaz de producir fenómenos magnéticos, serán los fenómenos magnéticos capaces de producir electricidad?

La contestación a la pregunta tardó en llegar 12 años y fue afirmativa. En 1831 Michael Faraday descubrió lo que hoy se conoce como **inducción electromagnética**. Aunque en alguno de los ex-

perimentos anteriores realizados por diversos científicos estaba oculto este mismo descubrimiento, sólo Faraday fue capaz de darse cuenta de las implicaciones y de la descripción simplificada del fenómeno descubierto: "La variación con el tiempo del flujo magnético que atraviesa una bobina induce en ésta una corriente, lo que quiere decir que se ha inducido una fuerza electromotriz".

Básicamente hay dos formas de producir la variación temporal del flujo magnético:

- Variar el campo magnético  $\vec{B}$  con el tiempo en las proximidades de una espira y entonces variará el flujo que la atraviesa. Se obtiene así una corriente inducida en la espira debida a una fuerza electromotriz inducida (fem) conociéndose a este fenómeno como inducción electromagnética.
- Mantener  $\vec{B}$  constante en el tiempo pero variar el flujo moviendo la espira. La fem. inducida se debería al movimiento.

Veremos sin embargo que la expresión matemática de la f.e.m inducida es la misma en ambos casos, independientemente de cómo se produzca. Este descubrimiento crea el primer nexo entre el magnetismo (variación del flujo) y la electricidad (fem inducida) y es la base de nuestra civilización tecnológica. A partir de él es posible producir y usar la energía eléctrica de forma barata, sencilla y cómoda.

## 8.2. Ley de inducción de Faraday

### 8.2.1. Descripción fenomenológica

Faraday y Henry descubrieron de forma independiente que es posible inducir corrientes eléctricas en un circuito (o espira) mediante la variación del flujo magnético que atraviesa el circuito. Efectivamente, si el flujo magnético  $\Phi_m$  que atraviesa un circuito varía con el tiempo, se genera en el circuito una fuerza electromotriz que da lugar a una corriente eléctrica que recorrerá el circuito. La detección de la fuerza electromotriz (fem) inducida puede hacerse midiendo la intensidad que recorre el circuito.

Cuando trabajábamos con baterías la fem en los circuitos se encontraba concentrada en lugares concretos del circuito como eran las propias baterías. Sin embargo, la fem inducida por un flujo magnético variable se genera en todos y cada uno de los puntos del circuito, estando pues distribuida y no concentrada.

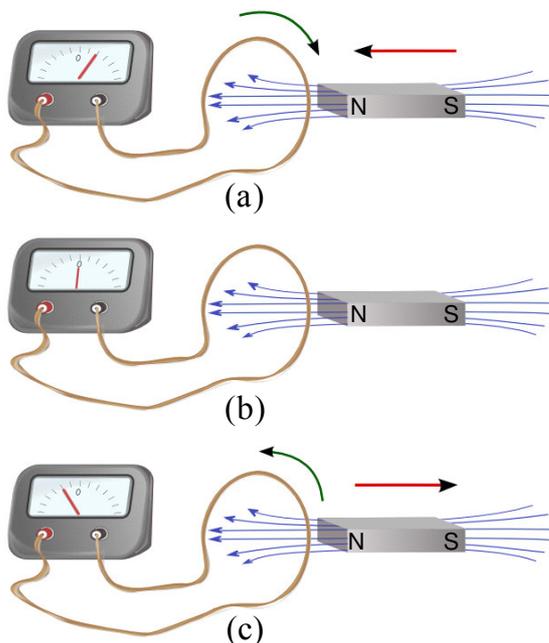


Figura 8.1: Al acercar o alejar el imán de la espira varía el flujo magnético y se produce una fem inducida con una determinada polaridad.

### Experimento 1:

1) Tomemos una sola espira conductora inmóvil situada en el campo magnético creado por un imán. La espira se encuentra conectada a un galvanómetro (o amperímetro) de modo que si circula corriente por ella, esta corriente será detectada en el galvanómetro.

2) Si ahora acercamos el imán a la espira la aguja del galvanómetro se desvía. Si a continuación alejamos el imán la aguja del galvanómetro se desvía en la dirección opuesta. Si mantenemos quieto el imán la aguja del galvanómetro no se mueve.

3) De lo anterior se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Al acercar a la espira el imán con su polo norte por delante, como se muestra en la figura 8.1.a, aumenta el campo magnético  $\vec{B}$  en la espira y por lo tanto aumenta el flujo magnético. Este aumento produce una fem inducida con una determinada polaridad.
- Al mantener fija la posición del imán el campo magnético  $\vec{B}$  no varía, figura 8.1.b, tampoco lo hace el flujo magnético y no se induce fem.
- Al alejar el imán del circuito, figura 8.1.c, disminuye el campo magnético  $\vec{B}$  en la espira y observamos que se induce una fem de polaridad opuesta a la anterior.

### Experimento 2:

Este experimento fue el realizado por Faraday en 1831.

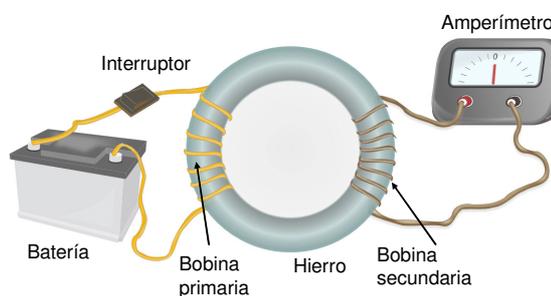


Figura 8.2: Experimento de Faraday: al abrir y cerrar el interruptor el amperímetro detecta corriente en el arrollamiento secundario.

1) Tomemos un toroide de hierro y le hacemos dos arrollamientos de hilo de cobre aislado, de manera que cada vuelta de cada arrollamiento no esté cortocircuitada con las otras vueltas del arrollamiento. El primero de los arrollamientos, llamado primario, se conecta a una batería a través de un interruptor. El segundo de los arrollamientos, llamado secundario, se conecta a un galvanómetro.

2) Si ahora cerramos el interruptor haciendo pasar una corriente por el primario la aguja del galvanómetro se desvía hacia un lado y a continuación vuelve a cero.

3) Si a continuación abrimos el interruptor, cortamos la corriente en el primario y vemos que la aguja del galvanómetro se desvía en dirección opuesta y después vuelve a cero.

De lo expuesto anteriormente se puede extraer la siguiente conclusión:

- Podemos producir una corriente eléctrica en el bobinado secundario variando el campo magnético que le atraviesa con lo que se varía el flujo magnético. La variación del campo magnético se produce al cerrar o abrir el interruptor pues la corriente que atraviesa el primario pasaría, al cerrarle, de cero a su valor máximo, y al abrirle, de su valor máximo a cero. El resultado sería que esta corriente creciente o decreciente crearía un campo magnético creciente o decreciente que, canalizado por el toroide, haría variar el flujo magnético en el secundario.

### 8.2.2. Formulación

De los experimentos anteriores podemos deducir que se induce una fem en un circuito cuando cambia el flujo magnético que le atraviesa, siendo la fuerza electromotriz inducida proporcional a la variación temporal del flujo. Podemos formular matemáticamente esta deducción como

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Mas adelante veremos a que se debe el signo menos.

En realidad los dos experimentos anteriores son sólo dos de las posibles formas de producir una fem inducida. Recurriendo a una descripción de tipo general, se puede inducir una fem de las siguientes formas:

- Variando con el tiempo la magnitud del campo magnético  $\vec{B}$ .
- Variando con el tiempo la superficie del circuito.
- Variando con el tiempo el ángulo entre  $\vec{B}$  y la superficie del circuito.
- Cualquier combinación de las anteriores.

Veamos, a continuación, algunos ejemplos.

---

**Ejemplo 1** *Un campo magnético uniforme forma un ángulo  $\alpha = 30^\circ$  con el eje de una bobina circular de  $N = 300$  vueltas y un radio de  $a = 4$  cm. El campo varía con el tiempo a razón de  $85$  T/s, permaneciendo fija su dirección. Determinar el módulo de la fem inducida en la bobina.*

**Solución:**

De acuerdo con la ley de Faraday, el módulo de la fem inducida se calcula como

$$|\mathcal{E}| = \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right|$$

Teniendo en cuenta que la bobina tiene  $N$  espiras, el flujo magnético que la atraviesa es

$$\Phi_m = N \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N\vec{B} \cdot \vec{S} = NBS \cos \alpha$$

Sustituyendo el flujo magnético en la expresión de la fem resulta

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}| &= \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \frac{d}{dt} (NBS \cos \alpha) \\ &= N\pi a^2 \cos \alpha \frac{dB}{dt} = 111 \text{ V} \end{aligned}$$


---

---

**Ejemplo 2** *Una espira tiene la forma de una semicircunferencia cerrada por el diámetro correspondiente. Se encuentra situada en un campo magnético uniforme de  $2$  Weber/m<sup>2</sup> de dirección perpendicular al plano de la espira. El radio de la espira es  $0,15$  m. Hallar la fem inducida*

en la espira cuando: a) Se desplaza con velocidad constante de 10 m/s en dirección perpendicular al diámetro y paralela al campo. b) Gira a razón de 10 vueltas por segundo alrededor de dicho diámetro.

**Solución:**

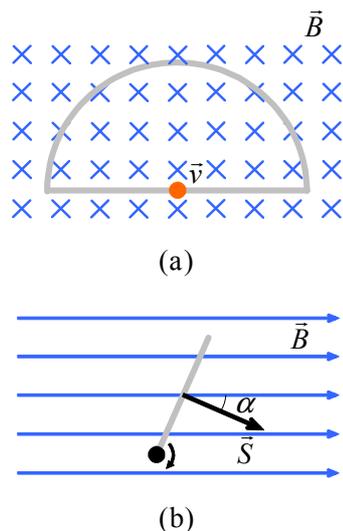


Figura 8.3: Espira semicircular moviéndose en el seno de un campo magnético estático. a) con velocidad cte y paralela al campo. b) girando en torno a su diámetro.

a) Como el campo magnético es uniforme y paralelo al eje de la espira

$$\Phi_m = \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS = \text{cte}$$

por tanto

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = 0$$

b) Ahora la bobina gira alrededor de su diámetro, por lo que el ángulo  $\alpha$  entre el vector campo magnético y el vector superficie de la espira varía con el tiempo. Entonces, el flujo magnético ahora vale

$$\Phi_m = \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos \alpha = BS \cos(\alpha_0 + \omega t)$$

donde  $\alpha_0$  es el ángulo formado por  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  en  $t = 0$ ,  $\omega$  es la velocidad angular de giro. La fem inducida

resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin(\alpha_0 + \omega t) \\ &= 2 \times \frac{\pi \times 0,15^2}{2} \times 20\pi \times \sin(\alpha_0 + 20\pi t) \\ &= 4,44 \sin(\alpha_0 + 20\pi t) \text{ V} \end{aligned}$$

Por tanto, se induce una fem alterna de frecuencia  $f = \omega/(2\pi) = 10$  Hz.

**Ejemplo 3** En el plano de una espira rectangular de lados  $a$  y  $b$ , paralelamente al lado de longitud  $b$  se encuentra un hilo conductor rectilíneo que transporta una corriente  $I$ . Calcular la fuerza electromotriz inducida en la espira cuando se desplaza con velocidad  $v$  respecto al hilo conductor.

**Solución:**

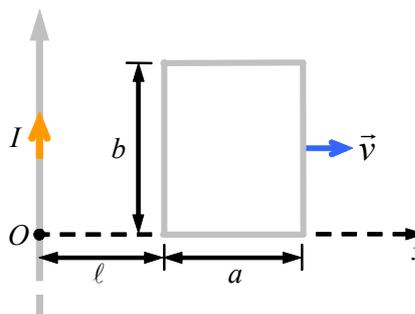


Figura 8.4: Geometría para el cálculo de la fem inducida en una espira que se desplaza con una velocidad  $v$  respecto de un hilo conductor.

El campo magnético creado por el hilo es perpendicular al plano en el que están contenidos tanto el hilo como la espira, siendo su magnitud

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

El flujo que atraviesa la espira es

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \iint_{S_{\text{espira}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{\text{espira}}} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dz dx \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \int_0^b dz \right) \left( \int_\ell^{\ell+a} \frac{dx}{x} \right) \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell} \text{ Wb} \end{aligned}$$

donde  $\ell$  es la distancia que en un instante  $t$  hay entre el hilo y el lado de la espira más próximo a él. Como la espira se desplaza con velocidad constante, si inicialmente la distancia entre hilo y bobina era de  $\ell_0$  entonces  $\ell = \ell_0 + vt$  y la fem inducida resulta

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \ln \frac{a + \ell_0 + vt}{\ell_0 + vt} \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I b}{2\pi} \frac{av}{(\ell_0 + vt)(\ell_0 + a + vt)} \quad \text{V}\end{aligned}$$

### 8.3. Fuerza electromotriz debida al movimiento

Hasta ahora hemos considerado casos en los que se produce una fem en un circuito cuando el campo magnético cambia con el tiempo. Describiremos ahora otro caso: la fem inducida en un conductor que se mueve a través de un campo magnético.

Consideremos en **primer lugar** el caso de un conductor recto de longitud  $\ell$  que se mueve con velocidad constante a través de un campo magnético uniforme dirigido hacia dentro del papel tal y como muestra la figura 8.5.

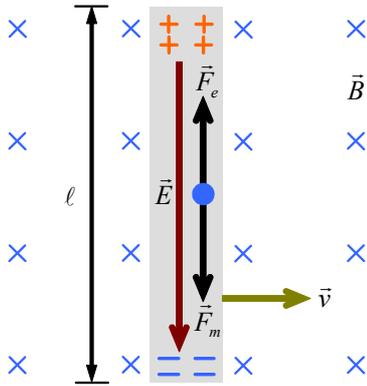


Figura 8.5: Barra conductora desplazándose a velocidad constante en el seno de un campo magnético uniforme e independiente del tiempo.

Supongamos que el conductor se mueve perpendicularmente al campo. Los electrones del conductor estarán sometidos a una fuerza dirigida a lo

largo del mismo que vendrá dada por  $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Bajo la influencia de esta fuerza los electrones se moverán al extremo inferior del conductor, acumulándose allí, mientras que dejan una carga positiva neta en el extremo superior del conductor. Como consecuencia de esta separación de carga aparece un campo eléctrico neto en el interior del conductor. Este campo da lugar a una fuerza eléctrica que se opone al movimiento y acumulación de electrones. La acumulación cesa cuando se alcanza el equilibrio, es decir, cuando las fuerzas magnética y eléctrica son iguales y opuestas, esto es  $qE = qvB$ , de donde

$$E = vB$$

Como  $\vec{E}$  es constante, aparecerá entre los extremos de la barra una diferencia de potencial

$$\mathcal{E} = -\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E\ell = vB\ell$$

con el extremo superior a potencial más alto que el inferior. Por tanto se mantiene una diferencia de potencial entre los extremos de la barra siempre que ésta esté en movimiento a través del campo. En el caso de invertir el movimiento también se invertirá la polaridad.

Consideremos en **segundo lugar** el caso en el que el conductor en movimiento forma parte de un lazo cerrado. Sea un circuito formado por una barra conductora de longitud  $\ell$  que se desliza a lo largo de dos raíles conductores paralelos cerrados en su extremo por una resistencia  $R$  tal y como se muestra en la figura 8.6.

Por simplicidad supondremos que la barra y los raíles tienen resistencia nula. Aplicamos un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme y constante perpendicularmente al plano del circuito. Cuando, bajo la influencia de una fuerza aplicada  $\vec{F}_{ap}$ , se empuja la barra hacia la derecha, las cargas libres de la barra experimentan una fuerza magnética a lo largo de la misma. Esta fuerza establece una corriente inducida pues ahora las cargas son libres de moverse en una trayectoria conductora cerrada. El valor de la corriente vendrá dado por la ley de Ohm

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vB\ell}{R}$$

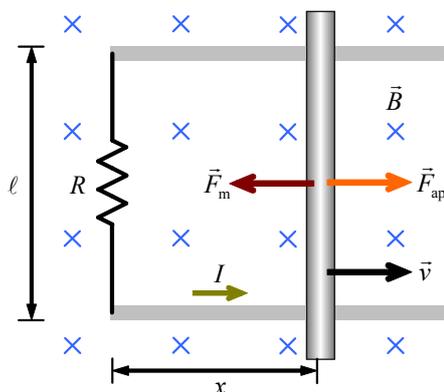


Figura 8.6: Barra conductora desplazándose a velocidad constante sobre unos railes conductores. Todo el conjunto se encuentra en el seno de un campo magnético uniforme e independiente del tiempo.

Esta misma expresión de la intensidad se podría haber obtenido aplicando la ley de Faraday. Como en cualquier instante el área del circuito es  $\ell x$  el flujo magnético que atraviesa el circuito es

$$\Phi_m = B\ell x$$

La fem inducida resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\ell x) = -B\ell \frac{dx}{dt} = -vB\ell$$

y la intensidad

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{vB\ell}{R}$$

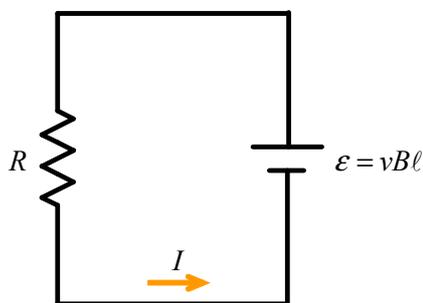


Figura 8.7: Circuito eléctrico equivalente.

En la figura 8.7 se muestra el circuito equivalente del caso comentado. Evidentemente, la coincidencia de resultados obtenida aplicando la ley de Faraday (donde se supone que es el flujo del campo magnético el que varía) y la obtenida como fuerza electromotriz debida al movimiento (donde es el circuito el que se mueve) no es casual. En realidad se trata de ver el mismo problema desde el punto de vista de dos observadores: un observador fijo vería moverse los electrones de la barra en presencia de un campo magnético mientras que un observador en movimiento vería un circuito en el que el flujo variaría.

Veamos que sucede al analizar el caso desde consideraciones energéticas. Como en el circuito no hay baterías ¿cuál es el origen de la intensidad inducida y de la energía eléctrica?. Existe una fuerza externa que mueve el conductor y eso hace que las cargas móviles se muevan; es la fuerza externa quien proporciona la energía:

$$P = F_{ap}v = (I\ell B)v = \frac{B^2\ell^2 v^2}{R} = \frac{\mathcal{E}^2}{R}$$

**Ejemplo 4** Un tren se mueve a una velocidad de 36 Km/h . El campo geomagnético local tiene una componente vertical de  $2 \times 10^{-5} T$ . Las ruedas y el eje metálico forman una conexión conductora entre los railes de la vía. Si éstos están separados 1,4 m ¿cuánto vale la fuerza electromotriz inducida entre las ruedas?.

**Solución:**

La fem inducida vale

$$\mathcal{E} = vB\ell = \frac{36}{3,6} \times 2 \times 10^{-5} \times 1,4 = 2,8 \times 10^{-4} \text{ V.}$$

**Ejemplo 5** Una barra conductora de longitud  $\ell$  rota con una velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un pivote situado en uno de sus extremos. Un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  está dirigido perpendicularmente al plano de rotación, como se muestra en la figura. Hallar la fuerza electromotriz inducida entre los extremos de la barra.

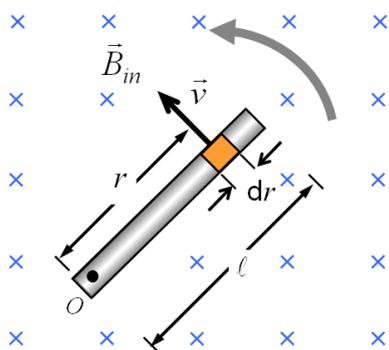


Figura 8.8: Geometría para el cálculo de la fem inducida entre los extremos de una barra conductora girando con velocidad angular  $\omega$  en un campo  $\vec{B}$ .

### Solución:

Sea un segmento de la barra de longitud  $dr$  cuya velocidad es  $\vec{v}$ . Como la fuerza electromotriz inducida en una barra en movimiento se vio que era

$$\mathcal{E} = -Blv$$

el módulo de la fuerza electromotriz elemental inducida en un conductor de longitud  $dr$  que se mueve perpendicularmente en un campo  $\vec{B}$  sería

$$d\mathcal{E} = Bvdr.$$

Al sumar las fuerzas electromotrices elementales en todos los elementos de la barra obtenemos

$$\mathcal{E} = \int Bv \, dr$$

Para integrar esta expresión es necesario tener en cuenta que la velocidad lineal y la velocidad angular  $\omega$  están relacionados por  $v = r\omega$ . Por lo tanto, como  $B$  y  $\omega$  son constantes

$$\mathcal{E} = B \int v \, dr = B\omega \int_0^\ell r \, dr = \frac{1}{2}B\omega\ell^2.$$

**Ejemplo 6** Una barra de masa  $m$  y longitud  $\ell$  se mueve sobre dos railes paralelos sin rozamiento en presencia de un campo magnético uniforme dirigido hacia adentro del papel. Si a la barra se le da una

velocidad inicial  $\vec{v}_i$  hacia la derecha y se suelta, determinar la velocidad de la barra como una función del tiempo.

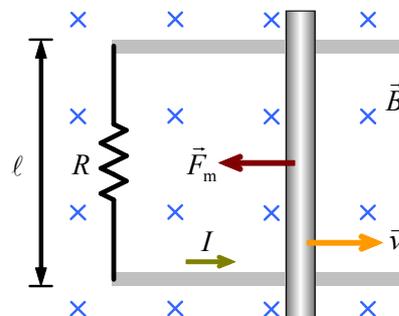


Figura 8.9: Barra conductora deslizando con velocidad inicial  $\vec{v}_i$  sobre dos railes conductores.

### Solución:

La corriente inducida circulará en sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que la fuerza magnética sobre la barra móvil es  $F_m = -I\ell B$  donde el signo negativo significa que la fuerza está dirigida hacia la izquierda y, por tanto, frena el movimiento de la barra. Aplicando la segunda ley de Newton a la barra tenemos

$$F_m = -I\ell B = m \frac{dv}{dt}$$

Según vimos en teoría, la corriente inducida vale  $I = B\ell v/R$ , por tanto

$$-\frac{(B\ell)^2}{R}v = m \frac{dv}{dt}$$

o bien

$$\frac{dv}{v} = -\frac{(B\ell)^2}{mR}dt.$$

Integrando esta ecuación y teniendo en cuenta que en  $t = 0$  la velocidad vale  $v = v_i$ , obtenemos

$$\int_{v_i}^v \frac{dv}{v} = -\frac{(B\ell)^2}{mR} \int_0^t dt$$

es decir

$$\ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\frac{t}{\tau}$$

donde hemos definido la constante  $\tau = mR/(B\ell)^2$ . A partir de esta expresión podemos poner

$$v = v_i e^{-t/\tau}$$

y la velocidad de la barra disminuye exponencialmente con el tiempo.

## 8.4. Ley de Lenz

El signo menos de la ley de Faraday tiene una relación directa con la fuerza electromotriz inducida. La dirección y sentido de esta fuerza electromotriz se pueden determinar haciendo uso de la **ley de Lenz** que dice: *"La fuerza electromotriz y la corriente inducidas tienen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce"*.

Con este enunciado no se especifica el tipo de variación que causa la fem y la corriente inducidas. Veamos unos ejemplos.

En la figura 8.10 se muestra un imán que se mueve acercándose a una espira que tiene una resistencia eléctrica  $R$ . El movimiento del imán hacia la derecha con su polo norte por delante aumenta el flujo entrante en la bobina y produce una fem y una intensidad que, de acuerdo con la ley de Lenz, tienen un sentido que debe tender a oponerse al mencionado aumento de flujo; es decir, la corriente inducida en la espira deberá producir un campo magnético que salga de la espira hacia el imán: la intensidad en la espira debe circular entonces en sentido antihorario. La espira se comporta en estas circunstancias como si fuera un imán con su polo norte apuntando al imán externo y por tanto repeliendo a este imán y dificultando su aproximación.

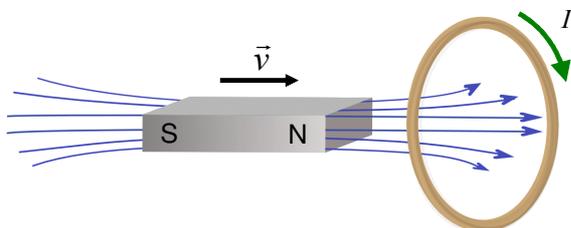


Figura 8.10: Ley de Lenz: un imán se acerca a una espira. La corriente inducida en la espira produce un campo magnético que repele al imán oponiéndose a su movimiento.

Si la corriente inducida en la espira tuviera sentido horario habría una fuerza magnética que aceleraría el imán cuando éste se aproximara a la espira. Esta aceleración produciría un incremento en la corriente inducida lo que volvería a aumentar la fuerza magnética sobre el imán y así sucesivamente. Este proceso es imposible pues estaríamos creando un proceso de aceleración creciente sin aportación energética ninguna lo que violaría el principio de conservación de la energía. La ley de Lenz es, por consiguiente, deducible a partir de consideraciones energéticas.

Podemos enunciar la ley de Lenz en términos del flujo de la forma siguiente: *"Cuando se produce una variación del flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera un flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación"*.

En la figura 8.11 es el imán quien está en reposo y la espira se mueve alejándose de él. En la figura se puede ver la corriente inducida así como el momento magnético producido por ésta. En este caso el imán atrae a la espira oponiéndose al movimiento de ésta, tal y como exige la ley de Lenz.

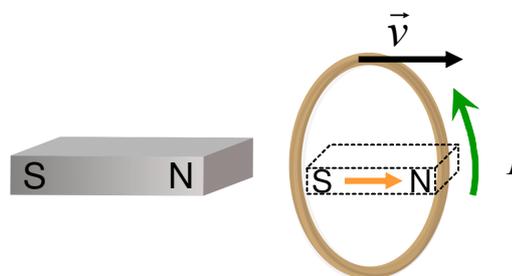


Figura 8.11: Ley de Lenz: una espira se aleja de un imán en reposo. La corriente inducida así como el momento magnético hace que el imán atraiga a la espira oponiéndose al movimiento

En la figura 8.12 cuando se hace variar la corriente del circuito 1 hay un cambio en el flujo que atraviesa el circuito 2. Inicialmente el interruptor S, situado en el circuito 1, está abierto y por lo tanto no hay corriente en este circuito (figura 8.12.a).

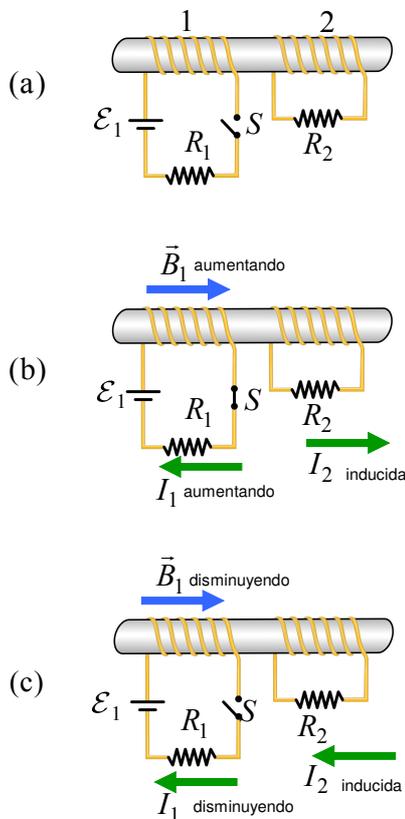


Figura 8.12: a) El interruptor  $S$  en el circuito 1 está abierto y no hay corriente. b) Se cierra el interruptor  $S$ , la corriente en el circuito 1 y el flujo en el 2 aumentan, induciéndose en el circuito 2 una corriente en el sentido indicado hasta que la corriente del circuito 1 alcance su valor estacionario. c) Se abre el interruptor, la corriente en el circuito 1 disminuirá apareciendo en el circuito 2 una corriente inducida de sentido opuesto a la anterior.

Cuando se cierra el interruptor  $S$ , figura 8.12.b, la corriente en el circuito 1 no alcanza su valor estacionario  $\mathcal{E}_1/R_1$  instantáneamente sino que emplea un tiempo breve en pasar de cero a su valor final. Durante este tiempo la corriente va aumentando y el flujo en el circuito 2 también, induciéndose en dicho circuito una corriente en el sentido indicado. Cuando la corriente del circuito 1 alcance su valor estacionario, el flujo en el circuito 2 dejará de crecer y no habrá corriente inducida en este circuito 2. Al abrir a continuación el interruptor, figura 8.12.c, en el circuito 1 la corriente disminuirá rápidamente

hacia cero con lo que aparecerá en el circuito 2 una corriente inducida de sentido opuesto a la anterior. Obsérvese que sólo aparece corriente inducida cuando *varía el flujo*. La fem inducida no depende de lo grande que sea el módulo del flujo sino de la velocidad de su variación.

Otro ejemplo se puede ver en la figura 8.13 donde se muestra un único circuito aislado. Cuando hay corriente en el circuito hay flujo magnético a través de la bobina debido a su propia corriente. Cuando la corriente varía, también variará el flujo en la bobina y existirá una fem inducida en el circuito. Esta fem inducida se opondrá a la variación de corriente y por ello se la denomina **fuerza contraelectromotriz**. Debido a esta fuerza contraelectromotriz la corriente no puede pasar instantáneamente desde un valor cero a otro finito o desde uno finito a cero. En este dispositivo se produce un flujo grande aunque la corriente sea pequeña. Henry observó que, cuando intentaba abrir el circuito, se producía una chispa, debida a la gran fuerza contraelectromotriz; esta fuerza contraelectromotriz da lugar a una gran diferencia de potencial en el interruptor cuando éste se abre, lo que produce la ruptura dieléctrica y la aparición de la chispa.

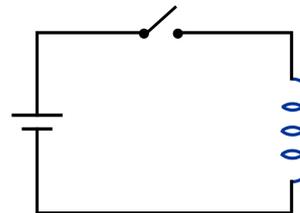


Figura 8.13: En una bobina, cuando la corriente varía, también variará el flujo y existirá una fem inducida que se opone a la variación de corriente y por ello se la denomina fuerza contraelectromotriz.

Otro ejemplo sería el de la barra moviéndose sobre unos raíles con un campo magnético uniforme tal y como muestra la figura 8.14.a.

Cuando la barra se mueve hacia la derecha el flujo magnético a través del circuito aumenta con el tiempo pues aumenta el área del circuito. Por la ley de Lenz la corriente inducida debe tener una dirección tal que el flujo que produzca se oponga al cambio del flujo exterior. Como éste está aumentando, la corriente inducida debe producir un flujo

hacia fuera de la página. Por lo tanto la corriente inducida debe circular en dirección contraria a las agujas del reloj.

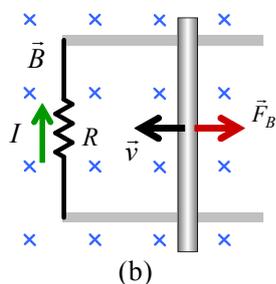
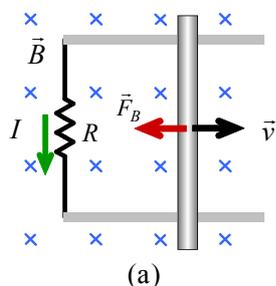


Figura 8.14: a) La barra se mueve hacia la derecha aumentando el flujo magnético en el circuito. Según la ley de Lenz, la corriente inducida circula en dirección contraria a las agujas del reloj. b) La barra se mueve hacia izquierda, la corriente inducida gira en sentido de las agujas del reloj para oponerse al cambio del flujo exterior.

En el caso de la figura 8.14.b en el que la barra se mueve en dirección opuesta a la anterior, es decir, hacia la izquierda, el razonamiento es similar pero la conclusión es justamente la opuesta: la corriente inducida gira en sentido de las agujas del reloj.

**Ejemplo 7** Una bobina rectangular de  $N$  vueltas de anchura  $a$  y longitud  $b$ , cada una, donde  $N = 80$ ,  $a = 20$  cm, y  $b = 30$  cm, está situada en un campo magnético  $B = 0,8$  T dirigido hacia dentro de la página como indica la figura. Sólo una parte de la bobina se encuentra en la región del campo magnético. La resistencia de la bobina  $R = 30$   $\Omega$ . Hallar el módulo, dirección y sentido de la corriente inducida al desplazarse la bobina con una velocidad de 2 m/s a) hacia la derecha. b) hacia arriba. c) hacia abajo.

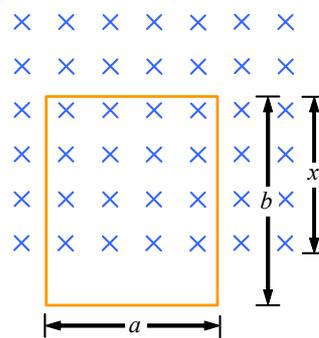


Figura 8.15: Geometría para el cálculo de la corriente inducida en un bobina.

**Solución:**

En general el flujo a través de la bobina sería

$$\Phi_m = N \vec{B} \cdot \hat{n}A = NBAx$$

con lo que la fem inducida y la corriente vendrían dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{d\Phi_m}{dt} \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R} \end{aligned}$$

a) Cuando la bobina se mueve hacia la derecha el flujo no cambia. La corriente por tanto es cero

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= 0 \\ I &= 0 \end{aligned}$$

b) Cuando la bobina se mueve hacia arriba  $x$  aumenta de modo que  $\frac{dx}{dt}$  es positiva

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(NBAx) = NBa \frac{dx}{dt}$$

y la corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{NBa \left(\frac{dx}{dt}\right)}{R} = 0,853 \text{ A.}$$

Como la bobina se mueve hacia arriba el flujo crece; la intensidad inducida debe producir un campo magnético cuyo flujo a través de la superficie debe compensar el aumento de flujo. Esto implica que el producto escalar con el vector unitario  $\hat{n}$  debe ser negativo. Este campo estaría dirigido hacia fuera de la página y la corriente debe tener sentido antihorario.

c) Cuando la bobina se mueve hacia abajo sucede justamente lo contrario que en el caso b por lo que la intensidad de la corriente inducida es la misma pero gira en sentido horario.

## 8.5. Fuerzas electromotrices inducidas y campos eléctricos

Hemos visto cómo un flujo magnético variable con el tiempo induce, en una espira conductora, una fem y una corriente. Para que en la espira circule una corriente debe existir en ella un campo eléctrico. Este campo eléctrico no tiene naturaleza electrostática, sino que es un campo eléctrico inducido por el flujo magnético variable.

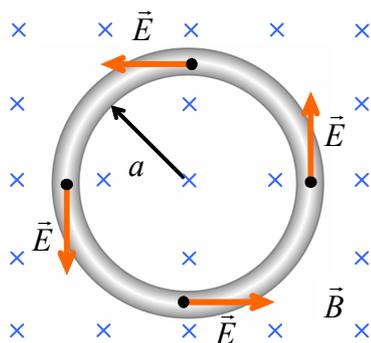


Figura 8.16: Lazo conductor de radio  $a$  situado en un campo magnético uniforme perpendicular al plano del lazo. Si el campo magnético varía con el tiempo se induce una corriente, lo que implica la existencia de un campo eléctrico inducido  $\vec{E}$  que debe ser tangente al lazo.

Consideremos un lazo conductor de radio  $a$  situado en un campo magnético uniforme perpendicular al plano del lazo como se ve en la figura 8.16. Si el campo magnético cambia con el tiempo se inducirá en el lazo una fem dada por la ley de Faraday  $\mathcal{E} = -d\Phi_m/dt$ . La corriente inducida implica la existencia de un campo eléctrico inducido  $\vec{E}$  que debe ser tangente al lazo. Por una parte, el trabajo realizado al mover una carga  $q$  alrededor del lazo

se puede calcular como  $W = q\mathcal{E}$ . Por otra parte, como la fuerza eléctrica sobre la carga vale  $q\vec{E}$ , el trabajo realizado por esta fuerza al mover la carga alrededor del lazo es  $W = qE(2\pi a)$  donde  $2\pi a$  es la longitud de la circunferencia del lazo. Las dos expresiones para el trabajo deben ser iguales, luego  $q\mathcal{E} = 2\pi a q E$ , de donde

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi a} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{d\Phi_m}{dt}$$

y como  $\Phi_m = BS = B\pi a^2$ , el campo eléctrico resulta

$$E = -\frac{a}{2} \frac{dB}{dt}$$

A partir de esta ecuación y conociendo la variación temporal del campo magnético es fácil hallar el campo eléctrico. El signo menos indica que este campo eléctrico se opone a la variación del campo magnético. Es muy importante observar que este campo eléctrico existe incluso en ausencia del conductor. La presencia del conductor pone de manifiesto la existencia de este campo eléctrico, ya que por el conductor circula una corriente. Sin embargo, el campo eléctrico existe sin el lazo conductor: su presencia se podría poner de manifiesto situando una carga libre, que se vería sometida a una fuerza eléctrica.

La fem inducida para cualquier trayectoria cerrada podía hallarse mediante la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de la trayectoria. Este hecho nos permite escribir la ley de Faraday de forma más general como

$$\mathcal{E} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

es decir,

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

Esta es la **tercera ecuación de Maxwell** puesta en forma integral. Vemos que el campo eléctrico que aparece en la ecuación anterior no es conservativo y además, variará en general en el tiempo. Por ello, este campo eléctrico no puede ser electrostático.

## 8.6. Aplicaciones

La ley de Faraday tiene un gran número de aplicaciones desde los generadores de corriente tanto continua como alterna, los motores eléctricos, los transformadores, instrumentos de medida, etc. Veamos el principio básico de funcionamiento de alguno de ellos.

### 8.6.1. Generadores

Supongamos una espira conductora plana situada en el seno de un campo magnético uniforme como muestra la figura 8.17.a, con el eje de la espira perpendicular al campo magnético. Aunque en este caso concreto la espira se considera plana puede tener cualquier forma. La espira gira en torno a su eje debido a un par mecánico aplicado externamente: este par puede provenir de un salto hidráulico, una turbina de vapor, etc.

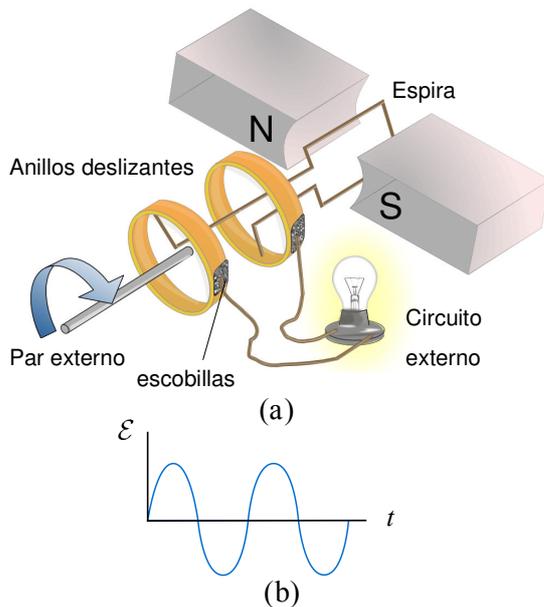


Figura 8.17: a) Diagrama de un generador de corriente alterna. b) Fem de salida.

En un instante dado el campo magnético  $\vec{B}$  formará un ángulo  $\theta$  con el vector área de la espira  $\vec{S}$ ,

por lo que el flujo a través de la espira sería

$$\Phi_m = \iint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta.$$

A medida que la espira realiza el giro, el ángulo  $\theta$  varía y el flujo cambia siguiendo la variación del ángulo  $\theta$ . Por consiguiente en la espira se inducirá una fem. Si mediante el par externo se mantiene constante la velocidad de giro de la espira, ésta realizará un movimiento circular uniforme con lo que el ángulo girado en el instante  $t$  sería

$$\theta = \omega t$$

donde se ha supuesto, sin perder generalidad, que en el instante inicial  $t = 0$  la espira forma un ángulo cero con el campo magnético. Por consiguiente, sustituyendo esta última ecuación en la del flujo magnético obtenemos

$$\Phi_m = BS \cos \theta = BS \cos \omega t.$$

La fuerza electromotriz inducida sería

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = BS\omega \sin \omega t.$$

En el caso de que la espira fuera una bobina con  $N$  espiras como la que se muestra en la figura 8.18, el flujo magnético sería  $N$  veces el debido a una única espira y lo mismo sucedería con la fuerza electromotriz inducida, es decir

$$\mathcal{E} = NBS\omega \sin \omega t.$$

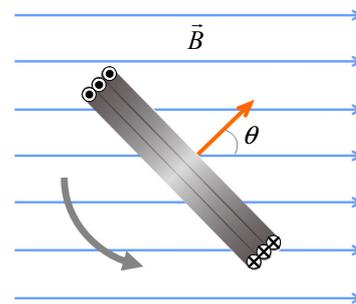


Figura 8.18: Una bobina con  $N$  espiras rota en presencia de un campo magnético. La fem inducida variará sinusoidalmente con el tiempo.

Vemos que la fuerza electromotriz oscila sinusoidalmente, tal y como muestra la figura 8.17.b.

Es pues un generador de corriente alterna que proporciona una fem y por lo tanto una corriente con frecuencia angular  $\omega$ , y con una frecuencia de  $f = \frac{2\pi}{\omega}$  idéntica a la frecuencia de giro de la bobina. Por consiguiente y con este tipo de dispositivo, para conseguir una corriente alterna con una frecuencia de 50 Hz es necesario que la bobina del generador gire también a 50 giros por segundo. Los valores máximos y mínimos alcanzados por la fuerza electromotriz serían

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{máx}} &= NBS\omega \\ \mathcal{E}_{\text{mín}} &= -NBS\omega.\end{aligned}$$

### Generadores de corriente continua

Podríamos usar otra forma de conexión de la espira o de la bobina al circuito externo. En vez de un anillo conductor completo donde cada borne de la bobina roza transmitiendo la tensión al circuito exterior podríamos usar semianillos constituyendo una pieza que se llama colector como se muestra en la figura 8.19.

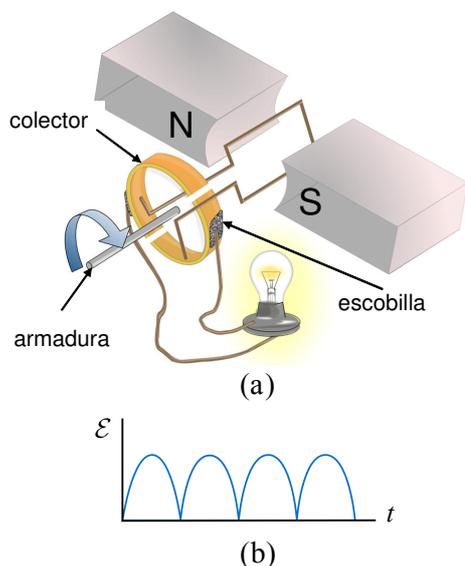


Figura 8.19: a) Diagrama de un generador de corriente continua. b) Fem de salida.

El principio de funcionamiento es simple: Supongamos que uno de los bornes, el positivo, es-

tá rozando uno de los anillos. En el proceso de giro la tensión positiva en ese borne irá disminuyendo hacia cero. Justo en el momento en que se alcanza la tensión nula en el borne y un instante antes de que el borne se vuelva negativo, deja de rozar en el semianillo positivo para continuar el giro rozando el semianillo negativo. Con ello el semianillo positivo siempre mantendrá esta polaridad, obteniéndose una tensión del tipo mostrado en la misma figura.

Es posible construir una máquina de este tipo en la que se dispongan varias bobinas, decaladas unas de otras un ángulo pequeño. Cada una de las bobinas producirá una fem inducida similar a la mostrada en la figura anterior pero defasadas entre sí exactamente el mismo ángulo que se encuentran defasadas las bobinas. La tensión total recogida en los bornes para este caso sería la suma de la proporcionada por cada bobina en cada instante con lo que se obtendría una tensión de continua afectada con un rizado que disminuye a medida que aumenta el número de bobinas empleadas. En la figura 8.20 se muestra la tensión de salida para el caso particular de 3 bobinas separadas  $120^\circ$ .

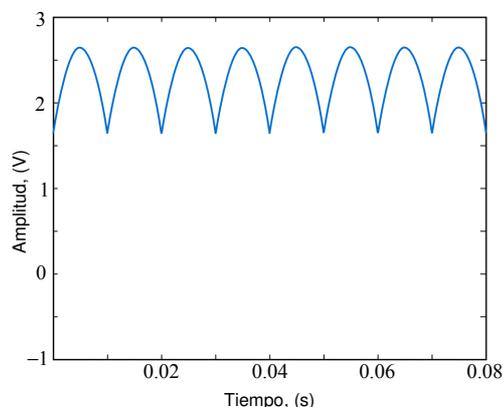


Figura 8.20: Tensión generada por tres bobinas desfasadas  $120^\circ$ . El rizado disminuye a medida que aumenta el número de bobinas empleadas.

### 8.6.2. Motores (revisión)

El primer prototipo de motor eléctrico apareció antes de la existencia de los generadores eléctricos que se acaban de describir. Fue propuesto por Davenport y la alimentación eléctrica se realizaba por un conjunto de baterías de Volta. Como conse-

cuencia su potencia era escasa y no pasó de ser una curiosidad científica. De este hecho se desprende que el principio básico en el que se basa el motor eléctrico no precisa la comprensión de la ley de Faraday, si bien es difícil comprender algunos aspectos del funcionamiento de los motores eléctricos sin hacer uso de la mencionada ley.

Con posterioridad, y realizándose una exhibición en Viena de diversos tipos de máquinas de generación eléctrica construidas por Gramma, un operario conectó por error un generador eléctrico en funcionamiento a uno parado: el resultado fue que este último comenzó a girar en sentido contrario a su funcionamiento como generador. El operario desconectó inmediatamente el sistema y se lo comunicó a Gramma quien inmediatamente apreció las consecuencias que se deducían del incidente.

El funcionamiento básico de un motor eléctrico se basa en la fuerza que se produce sobre un hilo conductor que transporta una corriente eléctrica  $I$  que, a su vez, está sometido a un campo magnético  $\vec{B}$ . En estas condiciones el hilo conductor está sometido a una fuerza que vendrá dada por la expresión

$$\vec{F} = \int_C I \vec{dl} \times \vec{B}.$$

En el caso de una espira rectangular como la mostrada en la figura 8.21 cuyo plano yace en el plano del papel mientras que el campo magnético es perpendicular a este plano y dirigido hacia adentro del papel, las fuerzas que se ejercen sobre cada lado de la espira serían, tal y como vimos en temas anteriores y se deduce de la expresión anterior

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = IwB \\ F_3 &= F_4 = IlB \end{aligned}$$

por lo que en estas circunstancias tendríamos fuerzas iguales y opuestas que no harían girar la espira sino que sólo tenderían a deformarla.

Si ahora se parte de una posición en la que a la espira se la ha hecho girar sobre el eje dibujado de manera que el plano de la espira sale del plano del papel, las fuerzas  $F_1$  y  $F_2$  seguirían siendo iguales y opuestas (tendiendo a deformar la espira) pero las fuerzas  $F_3$  y  $F_4$  crearían un par de fuerzas  $\vec{\tau}$  cuya magnitud dependería del ángulo girado por la espira  $\theta$ . El ángulo  $\theta$  sería el formado por el campo magnético  $\vec{B}$  y el vector superficie perpendicular al

plano de la espira. Este par cuyo valor

$$\vec{\tau} = I \vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

tendría un módulo

$$\tau = mB \sin \theta.$$

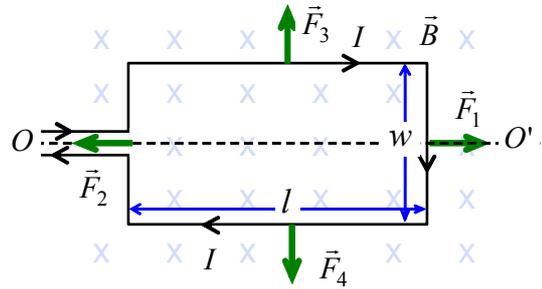


Figura 8.21: Fuerzas sobre los lados de una espira rectangular en presencia de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira.

El par haría girar la espira hasta conseguir anular el ángulo  $\theta$  en cuyo momento el par sería nulo y se alcanzaría una posición de equilibrio, que coincide con la la espira de nuevo contenida en el plano del papel.

El problema es convertir el efecto final de este par de fuerzas, que como hemos visto tiende al equilibrio, en un giro constante de la espira. Para ello necesitamos ver mejor las posiciones de equilibrio estable e inestable. Representando el ángulo de giro y los valores del par como se muestra en la figura 8.22 vemos que hay un punto estable ( $\theta = 0$ ) que coincide con una de las posiciones en las que la espira coincide con el plano del papel. Cualquier modificación de esta posición es correspondida por un par que tendería a girar la espira para volver a la posición de equilibrio, tal y como muestran las flechas. Hay también una posición inestable que se corresponde con el valor del ángulo  $\theta = \pi$  en la que cualquier perturbación que saque a la espira de esa posición la alejaría de ella y la espira finalizaría su movimiento en la posición de equilibrio  $\theta = 0$ .

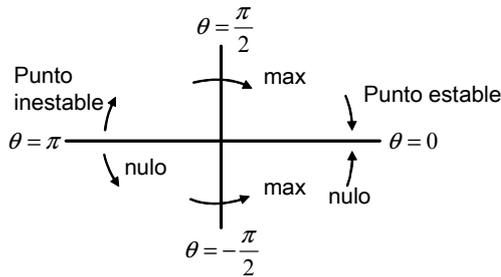


Figura 8.22: Angulos de giro y posiciones de equilibrio de la espira rectangular de la figura 8.21.

Consideremos ahora el caso en el que la corriente  $I$  entre en la espira con sentido opuesto al anterior. Como se muestra en la figura 8.23 ahora el punto estable es  $\theta = \pi$  mientras que el inestable sería  $\theta = 0$ .

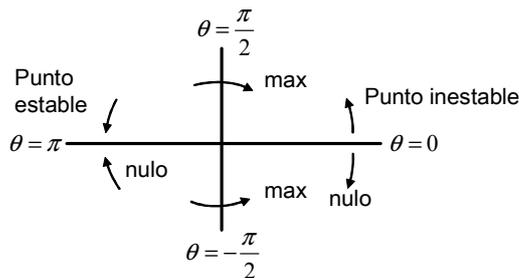


Figura 8.23: Angulos de giro y posiciones de equilibrio de la espira rectangular de la figura 8.21 cuando la corriente  $I$  recorre la espira en sentido contrario.

Utilizando los razonamientos anteriores es fácil comprender el funcionamiento de un motor. La espira gira bajo la acción del par de fuerzas hasta llegar a una posición de equilibrio estable, por ejemplo  $\theta = 0$ . Por inercia o por el empuje del par sobre otras espiras del motor, sobrepasa el punto estable. En el mismo instante en el que la espira está en  $\theta = 0$  se invierte el sentido de la corriente sobre ella (mediante un colector), con lo que el punto  $\theta = 0$  se convierte en inestable y la espira vuelve a experimentar un par de fuerzas que la mantiene girando hasta alcanzar el nuevo punto estable  $\theta = \pi$ . Este proceso se repite una y otra vez mediante el uso de un colector.

En la práctica el par motor se aumenta mediante un sistema de múltiples espiras que cubren casi todos los ángulos posibles.

### Arranque

Cuando bajo la acción de un par de fuerzas la espira del motor gira, se mueve en el seno de un campo magnético por lo que se inducirá en ella una fuerza electromotriz a la que ya previamente la hemos llamado fuerza contraelectromotriz, pues debido a la ley de Lenz debe oponerse a la causa que la produce. Así, si la espira se alimenta mediante una fuerza electromotriz  $\mathcal{E}$  la fem inducida por el giro  $\mathcal{E}'$  tendrá sentido opuesto. Si aplicamos la ley de Ohm y suponiendo que la espira tiene una resistencia  $R$

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}' = RI$$

En el arranque del motor, al no haber giro  $\mathcal{E}'$  es nula con lo que se podría producir valores muy altos de la intensidad que quemasen el motor, por lo que es preciso proporcionar sistemas de regulación adicionales.

### 8.6.3. Corrientes de Foucault o turbillonarias

Todos los ejemplos de corrientes inducidas que hemos estudiado han sido sobre hilos o barras. Sin embargo, las máquinas eléctricas usuales como motores, transformadores o generadores tienen en su interior núcleos de material ferromagnético que se comportan como no muy buenos conductores. Estos núcleos están sometidos, por el propio funcionamiento de las máquinas, a flujos magnéticos variables que dan lugar a unas corrientes denominadas corrientes de Foucault. El calor producido por estas corrientes al circular por el núcleo producen pérdidas de potencia que no son convenientes en las máquinas eléctricas.

Consideremos un bloque conductor situado entre las piezas polares de un electroimán como indica la figura 8.24. Si el campo magnético  $\vec{B}$  entre las piezas polares varía con el tiempo, el flujo que atraviesa un circuito cerrado como el limitado por la curva  $C$  será un flujo variable y como la curva está en un conductor se inducirá en ella una corriente. Esta afirmación teórica basada en la ley de Faraday se puede comprobar mediante un experimento.

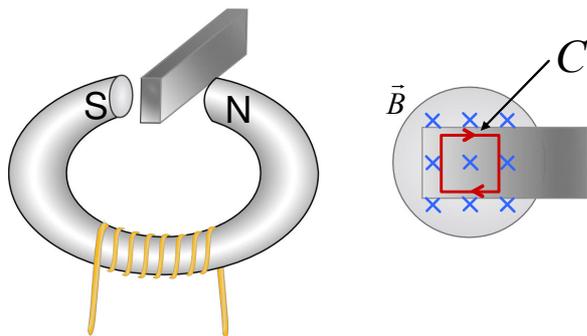


Figura 8.24: Barra conductora situado entre las piezas polares de un electroimán.

Supongamos que disponemos de una lámina de cobre situada entre los polos de un imán como muestra la figura 8.25. Una parte del área encerrada por la curva  $C$  está en el interior del campo magnético y otra parte no. Al tirar de la lámina hacia la derecha el flujo a través de  $C$  disminuye y se induce una fem en el sentido horario en  $C$ . Esta fem da lugar a una corriente dirigida hacia arriba en la zona situada entre las piezas polares (como se ve en la figura) y el campo  $\vec{B}$  ejercerá sobre ella una fuerza dirigida hacia la izquierda que se opone al movimiento de la lámina. La descripción del experimento se ha hecho en términos de fuerza. Energéticamente, es necesario proporcionar energía a la lámina para sacarla de entre las piezas polares y esa energía se disipa en la propia lámina en forma de calor producido por las pérdidas Joule de las corrientes inducidas.

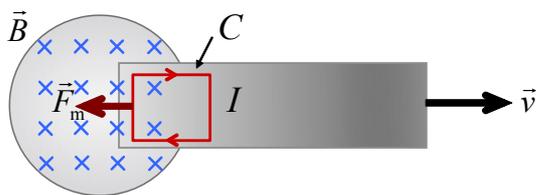


Figura 8.25: Al desplazar la lámina de cobre hacia la derecha se produce una fuerza hacia la izquierda sobre la corriente inducida.

El problema de las pérdidas por las corrientes de Foucault se puede reducir disminuyendo el valor de las corrientes inducidas mediante el aumento de la

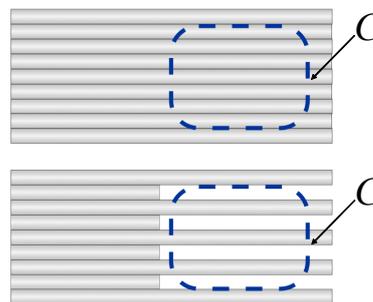


Figura 8.26: Reducción de las corrientes de Foucault.

resistencia eléctrica del camino que deberán seguir estas corrientes. Para ello el núcleo de las máquinas eléctricas no se construye de una única pieza sino en forma de láminas pegadas unas a otras; el pegamento actúa como aislante impidiendo el paso de la corriente inducida de una lámina a otra; por ello las corrientes inducidas quedan restringidas al interior de cada lámina. Otra forma de conseguir el mismo resultado es recortar la lámina como muestra la figura 8.26.

Existen dispositivos que usan las corrientes de Foucault de manera positiva: por ejemplo, balanzas mecánicas muy sensibles que oscilan repetidas veces antes de alcanzar el equilibrio se pueden frenar rápidamente mediante corrientes de Foucault. Otro ejemplo es el frenado magnético de vagones de Metro o ferrocarril, la resistencia de aparatos de gimnasia, etc.

## 8.7. Inductancia

### 8.7.1. Autoinducción

Cuando en un circuito aislado (espira, bobina, etc) circula una corriente, existe una relación entre dicha corriente y el flujo magnético que los atraviesa. Sea una bobina por la que circula una corriente  $I$ . La corriente produce un campo magnético  $\vec{B}$  que es distinto en cada punto del espacio, pero que en cada uno de esos puntos  $\vec{B}$  es proporcional a  $I$  (ley de Ampère o de Biot y Savat). El flujo magnético que atraviesa la bobina es por lo tanto, también proporcional a  $I$ . Podemos escribir

entonces

$$\Phi_m = LI$$

donde la constante de proporcionalidad  $L$  se denomina **autoinducción** de la bobina. La autoinducción de un circuito no depende de la corriente  $I$  que lo recorre, sólo depende de la forma y dimensiones del circuito, en este caso de la bobina.

La unidad del SI de la autoinducción es el **henrio** (H), que se define como

$$1 \text{ H} = 1 \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = 1 \frac{\text{Tm}^2}{\text{A}}.$$

Es posible calcular el valor de la autoinducción de cualquier bobina siguiendo un camino, en cierta forma similar al que se siguió en el cálculo de capacidades de los condensadores. Se supone en primer lugar que la bobina está recorrida por una intensidad  $I$ . Se halla a partir de la forma de la bobina y del valor de la intensidad, el valor del campo magnético  $\vec{B}$ ; conocido el valor del campo magnético se halla el flujo que atraviesa la bobina. Se divide el flujo calculado entre la intensidad (con lo que desaparece el valor de  $I$ ) y el resultado es el valor de la autoinducción. En la práctica y salvo casos concretos, hallar el valor de  $L$  es muy complejo.

Cuando la intensidad de la corriente del circuito varía con el tiempo, también lo hace el flujo magnético y por lo tanto en el circuito se induce una fem. Como  $L$  es constante

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = \frac{d}{dt}(LI) = L \frac{dI}{dt}$$

con lo que, de acuerdo con la ley de Faraday, resulta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

Existen muchos tipos de circuitos en los que se producen autoinducciones, aunque el más clásico de todos ellos es la bobina o solenoide.

---

**Ejemplo 8** Hallar la autoinducción de un solenoide muy largo de longitud total  $\ell = 10 \text{ cm}$ , área de cada espira  $S = 5 \text{ cm}^2$  y con  $N = 100$  vueltas.

**Solución:**

Como se considera que el solenoide es muy largo, tal y como vimos en temas anteriores, el campo

en su exterior es nulo, mientras que en el interior el campo es uniforme. En su momento hallamos el campo en el interior aplicando la ley de Ampère y obtuvimos

$$B = \mu_0 n I$$

donde  $n$  es el número de espiras por unidad de longitud,  $n = N/\ell$ .

El flujo total que atraviesa el solenoide vale

$$\Phi_m = NBS = \frac{\mu_0 N^2 IS}{\ell}$$

y la autoinducción

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

Se observa que la autoinducción sólo depende de factores geométricos. Sustituyendo los datos numéricos resulta

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^4 \times 5 \times 10^{-4}}{0,1} \\ &= 6,28 \times 10^{-5} \text{ H.} \end{aligned}$$


---

**Ejemplo 9** Hallar la autoinducción por unidad de longitud de un cable coaxial de radios interno  $a$  y externo  $b$ .

**Solución:**

Supondremos que por el conductor interno del cable coaxial circula una corriente  $I$ , mientras que la misma corriente pero en sentido opuesto circula por el conductor externo. Si los conductores del cable fueran perfectos ambas corrientes estarían en las superficies de ambos conductores, es decir, la del conductor interno en  $\rho = a$  y la del externo en  $\rho = b$ .

Dada la simetría del problema (ya se ha resuelto con anterioridad) el cálculo del campo magnético se realiza usando la ley de Ampère. Por simetría usaremos un sistema de coordenadas cilíndricas con el eje del conductor interno como eje  $z$ . En estas condiciones, el campo magnético tiene dirección  $\hat{\phi}$  y sólo depende de la coordenada  $\rho$ .

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Tomaremos como curva  $C$  circunferencias con centro en el eje  $z$ . Hay tres zonas distintas, la interior al conductor interno, la exterior al conductor externo (en ambas el campo es nulo) y la zona comprendida entre el conductor interno y el externo; en este último caso la intensidad encerrada es  $I$ . Entonces

$$B2\pi\rho = \mu_0 I$$

de donde

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{\phi}.$$

El siguiente paso consiste en calcular el flujo que atraviesa el propio coaxial. Para ello, consideramos como superficie de integración un rectángulo de altura  $\ell$  y anchura  $b - a$ . El flujo buscado es

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B(\rho) \hat{\phi} \cdot dS \hat{\phi} \\ &= \iint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} dz d\rho = \left( \int_0^\ell dz \right) \left( \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho \right) \\ &= \ell \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

y la autoinducción por unidad de longitud

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\Phi_m}{I\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Vemos que un cable coaxial presenta una autoinducción por unidad de longitud junto con, como ya vimos en Electrostática, una capacidad. Al usar cables coaxiales con corrientes alternas estos elementos ( $L$  y  $C$ ) que almacenan energía tiene cada vez mayor importancia limitando el uso de los cables a frecuencias altas.

**Ejemplo 10** En un solenoide con un valor de autoinducción de  $6,28 \times 10^{-5} H$  se induce una fem de  $20V$ . ¿Cómo varía la corriente?

**Solución:**

La fem inducida en una bobina viene dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Sustituyendo valores

$$20 = -6,28 \times 10^{-5} \frac{dI}{dt}$$

y despejando la derivada de la intensidad

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{20}{6,28 \times 10^{-5}}$$

e integrando

$$I(t) = -3,183 \times 10^5 t \text{ A/s.}$$

### 8.7.2. Inductancia mutua

Cuando dos o más circuitos están próximos entre sí, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos no depende sólo de la corriente que circula por él, sino también de la corriente que circula por el resto de los circuitos.

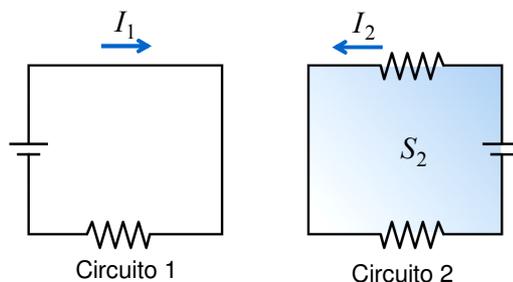


Figura 8.27: Inductancia mutua entre dos circuitos próximos.

Consideremos dos circuitos como los mostrados en la figura 8.27. Supongamos que por el circuito 1 circula una corriente  $I_1$ , que da lugar a una inducción magnética  $\vec{B}_1$ . Al encontrarse los dos circuitos próximos, habrá líneas de  $\vec{B}_1$  que atravesarán la superficie  $S_2$  del circuito 2, dando lugar a un flujo magnético a través del circuito 2, que denotaremos como  $\Phi_{m21}$ . Este flujo será proporcional a  $I_1$ , por tanto podemos escribir

$$\Phi_{m21} = M_{21} I_1$$

donde  $M_{21}$  es la **inductancia mutua** de los dos circuitos, que depende de la disposición geométrica de ambos circuitos. Por ejemplo, si están muy separados cabe esperar que la inducción mutua sea pequeña.

Si por el circuito 2 también circula una corriente  $I_2$ , entonces el flujo total que atraviesa  $S_2$  será

$$\Phi_{m2} = \Phi_{m21} + \Phi_{m22} = M_{21} I_1 + L_2 I_2.$$

De la misma manera que hemos analizado el flujo que atraviesa el circuito 2, podríamos haberlo hecho con el circuito 1. En ese caso hubiéramos obtenido que uno de los dos términos que contribuyen al flujo que atraviesa este circuito es

$$\Phi_{m12} = M_{12}I_2.$$

Se puede demostrar que

$$M_{12} = M_{21}.$$

En el caso de que las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  varíasen con el tiempo, la fuerza electromotriz inducida en los circuitos sería (por ejemplo en el circuito 1)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= -\frac{d\Phi_{m1}}{dt} = -\frac{d\Phi_{m11}}{dt} - \frac{d\Phi_{m12}}{dt} \\ &= -L_1\frac{dI_1}{dt} - M_{12}\frac{dI_2}{dt}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 11** Hallar la inductancia mutua para los dos solenoides concéntricos que se muestran en la figura, donde  $\ell$  es la longitud de ambos solenoides, el primero de los cuales tiene  $N_1$  espiras y radio  $a_1$  y el segundo tiene  $N_2$  espiras y radio  $a_2$ .

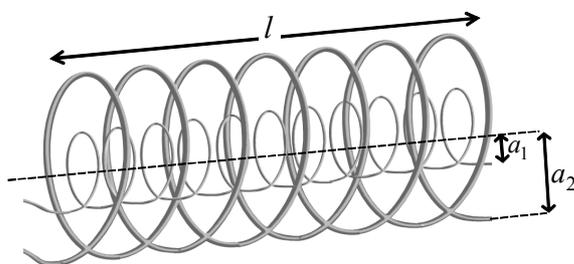


Figura 8.28: Geometría para el cálculo de la inductancia mutua de dos solenoides concéntricos.

**Solución:**

Calcularemos la inductancia  $M_{21}$  suponiendo que el solenoide interior transporta una corriente  $I_1$  y hallando el flujo magnético debido a esta corriente a través del solenoide exterior  $\Phi_{m21}$ .

El campo magnético  $\vec{B}_1$  debido a la corriente del solenoide interno es constante en el espacio interior a éste y su valor es

$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{\ell} I_1$$

para  $\rho < a_1$ .

Fuera del solenoide interno, el campo magnético  $B_1$  es despreciable. El flujo magnético debido a este campo que atraviesa la bobina 2 es

$$\begin{aligned} \Phi_{m21} &= N_2 \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S} \\ &= N_2 B_1 S_1 = \mu_0 \pi a_1^2 \frac{N_1 N_2}{\ell} I_1. \end{aligned}$$

Obsérvese que el área usada para el cálculo del flujo que atraviesa la bobina 2 no es el área de esa bobina  $\pi a_2^2$ , sino el área del solenoide interior  $\pi a_1^2$  ya que el campo magnético debido al solenoide 1 fuera de él es nulo. Por lo tanto, la inductancia mutua vale

$$M_{21} = \frac{\Phi_{m21}}{I_1} = \mu_0 \pi a_1^2 \frac{N_1 N_2}{\ell} \quad \text{H.}$$

**Ejemplo 12** Una espira rectangular de lados  $a \times b$  se sitúa junto a un hilo conductor, recto y muy largo, de forma que los dos lados de longitud  $b$  son paralelos al hilo, estando el más cercano a una distancia  $\ell$ . Hallar el coeficiente de inducción mutua.

**Solución:**

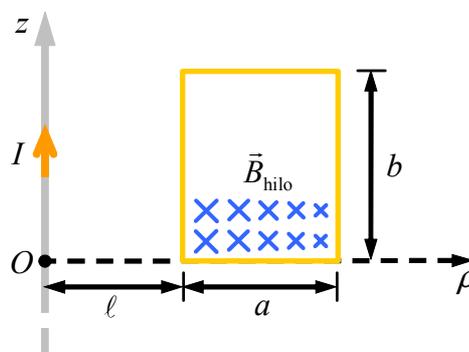


Figura 8.29: Configuración para el cálculo del coeficiente de inducción mutua entre un hilo muy largo y una espira rectangular.

Determinaremos el coeficiente de inducción mutua calculando el flujo que atraviesa la espira debido al campo magnético creado por el hilo, esto es, mediante la expresión

$$M = \frac{\Phi_{m,espira}}{I_{hilo}}.$$

Para ello, supondremos que el hilo transporta una corriente  $I_{\text{hilo}}$  tal como se muestra en la figura 8.29. Como ya sabemos, las inducción magnética creada por un hilo recto muy largo es (ver tema 7)

$$\vec{B}_{\text{hilo}} = \frac{\mu_0 I_{\text{hilo}}}{2\pi\rho} \hat{\phi}.$$

Ahora calcularemos el flujo magnético a través de la espira como

$$\Phi_{m,\text{espira}} = \iint_S \vec{B}_{\text{hilo}} \cdot d\vec{S}.$$

De acuerdo con la figura 8.29, el diferencial de superficie se puede expresar como  $d\vec{S} = bd\rho\hat{\phi}$ , con lo que el flujo resulta

$$\Phi_{m,\text{espira}} = \int_{\ell}^{\ell+a} \frac{\mu_0 I_{\text{hilo}}}{2\pi\rho} bd\rho = \frac{\mu_0 b}{2\pi} I_{\text{hilo}} \ln \frac{\ell+a}{\ell}$$

y por lo tanto la inducción mutua vale

$$M = \frac{\Phi_{m,\text{espira}}}{I_{\text{hilo}}} = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln \frac{\ell+a}{\ell} \quad \text{H.}$$

**Ejemplo 13** Una bobina de un circuito se encuentra próxima a otra bobina de un circuito diferente, de forma que la inductancia mutua del conjunto es 340 mH. Durante un intervalo de tiempo de 15 ms la corriente de la bobina 1 varía linealmente de 23 a 57 mA mientras que la corriente de la bobina 2 varía linealmente de 36 a 16 mA en el mismo tiempo. Calcular la fem que induce en cada bobina la corriente variable de la otra bobina..

**Solución:**

Durante los 15 ms la corriente de cada bobina varía a un ritmo constante de

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= \frac{57 - 23}{15} = 2,3 \quad \text{A/s} \\ \frac{di_2}{dt} &= \frac{16 - 36}{15} = -1,3 \quad \text{A/s.} \end{aligned}$$

Los valores de las fem inducidas son

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{21} &= -M \frac{di_1}{dt} \\ &= -340 \times 10^{-3} \times 2,3 = -0,77 \quad \text{V} \\ \mathcal{E}_{12} &= -M \frac{di_2}{dt} \\ &= -340 \times 10^{-3} \times (-1,3) = 0,45 \quad \text{V.} \end{aligned}$$

## 8.8. Energía magnética

Al igual que sucede en Electrostatica para establecer una distribución de cargas, cuando queremos establecer un conjunto de corrientes que circulen por un cierto número de espiras, es necesario aportar energía. Esta energía se aporta mediante la aplicación de fuerzas electromotrices a cada uno de los circuitos. Como consecuencia, las corrientes generadas producen campos magnéticos que almacenan energía magnética. Por tanto, de la misma manera que un condensador almacena energía eléctrica, una autoinducción almacena energía magnética.

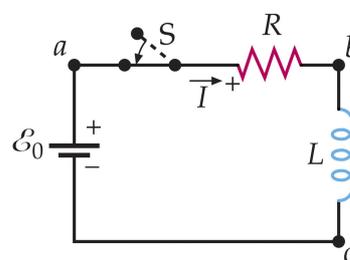


Figura 8.30: Circuito equivalente de una bobina conectada a una batería. La resistencia modela las pérdidas en los conductores no perfectos.

Consideremos el circuito formado por una bobina o un solenoide conectado a una batería a través de un interruptor. Inicialmente el interruptor se encuentra abierto. Podemos dibujar el circuito equivalente que se muestra en la figura 8.30 teniendo en cuenta que los conductores que forman la bobina no son perfectos por lo que se producirán pérdidas por efecto Joule que se deben tener en cuenta mediante una resistencia. Además, cuando cerremos el interruptor, la corriente en el circuito variará desde un valor inicial nulo hasta alcanzar un estado estacionario. Esta variación de la corriente,  $i(t)$ , hará que el campo magnético producido en la bobina también varíe con lo que se producirá una fem inducida cuyo valor será  $-Ldi/dt$ . Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff al circuito tenemos

$$\mathcal{E}_0 = iR + L \frac{di}{dt}.$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación an-

terior por la intensidad de corriente resulta

$$\mathcal{E}_0 i = i^2 R + Li \frac{di}{dt}.$$

Esta ecuación tiene la siguiente interpretación: el término  $\mathcal{E}_0 i$  es la potencia suministrada por la batería, tal y como vimos en temas anteriores; el término  $i^2 R$  es la energía por unidad de tiempo que se disipa en la resistencia, es decir, la potencia disipada en la resistencia; por último, el término  $Li di/dt$  debe representar la energía por unidad de tiempo que se almacena en la autoinducción. Entonces, si  $U_m$  es la energía en la autoinducción, se debe cumplir

$$\frac{dU_m}{dt} = Li \frac{di}{dt}$$

o también

$$dU_m = Lidi.$$

Integrando esta ecuación desde  $t = 0$ , cuando la corriente es nula, hasta  $t = t_f$  cuando la corriente ha llegado a su valor final  $i_f$  (teóricamente sería un tiempo infinito), obtenemos

$$\int dU_m = U_m = \int_0^{i_f} Lidi = \frac{1}{2} Li_f^2.$$

Por consiguiente, la energía almacenada en una autoinducción que transporta una corriente  $I$  vale

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2.$$

Esta expresión es análoga a la que describe la energía eléctrica almacenada en un condensador. Además, como  $\Phi_m = LI$ , podemos expresar la energía magnética de las siguientes formas alternativas

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \Phi_m I = \frac{1}{2} \frac{\Phi_m^2}{L}.$$

### 8.8.1. Energía magnética en función del campo

En el proceso de establecimiento de una corriente en la autoinducción, se crea un campo magnético en el espacio interior a la bobina. Podemos suponer que la energía almacenada en la autoinducción es energía almacenada en el campo magnético. Hallaremos la expresión de la energía en función

del campo para el caso particular de un solenoide de área de espira  $S$ , longitud total  $\ell$  y número de vueltas  $N$ . Sin embargo, el resultado obtenido es totalmente general.

Como ya sabemos, el campo magnético  $\vec{B}$  en el interior de un solenoide es

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 n I$$

y el valor de la autoinducción

$$L = \mu_0 n^2 S \ell$$

luego, la energía magnética resulta

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S \ell I^2 \\ &= \frac{1}{2\mu_0} (\mu_0 n I)^2 S \ell = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S \ell. \end{aligned}$$

Como la magnitud  $S \ell$  es el volumen del espacio que está dentro del solenoide (justo donde hay campo magnético) el resto del segundo miembro se puede interpretar como una densidad volúmica de energía magnética, es decir

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

expresión análoga a la de la energía eléctrica  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  que vimos en el tema 4. Por consiguiente la energía magnética total vale

$$U_m = u_m \tau = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tau$$

que, en el caso de que el campo magnético no sea uniforme, se transforma en

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\tau} B^2 d\tau.$$

Cuando en una región del espacio existen campos eléctricos y magnéticos, la densidad total de energía es

$$u = u_e + u_m = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

---

**Ejemplo 14** Se dispone de un solenoide de 2000 espiras y  $4 \text{ cm}^2$  de área, una longitud de 30 cm, por el que circula una corriente de 4 A. Calcular la energía magnética almacenada y la densidad de energía.

**Solución:**

a) En este caso, podemos calcular la energía magnética empleando la expresión basada en la autoinducción y la corriente

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2}LI^2 = \frac{\mu_0 N^2 SI^2}{2\ell} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2000^2 \times 4 \times 10^{-4} \times 16}{2 \times 0,3} \\ &= 535 \text{ J.} \end{aligned}$$

La densidad de energía resulta

$$u_m = \frac{U_m}{\tau} = \frac{535}{4 \times 10^{-4} \times 0,3} = 44,5 \times 10^5 \text{ J/m}^3.$$

b) La otra forma de hacer el mismo cálculo es usando las expresiones de la energía en función del campo

$$\begin{aligned} u_m &= \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{\ell^2} = 44,5 \times 10^5 \text{ J/m}^3 \end{aligned}$$

y la energía total

$$U_m = u_m \tau = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{\ell^2} S \ell = 535 \text{ J.}$$

**Ejemplo 15** *Cierta región del espacio contiene un campo magnético de 0,020 T y un campo eléctrico de  $2,5 \times 10^6$  N/C. Determinar a) la densidad de energía electromagnética y b) la energía en una caja cúbica de lado  $l = 12$  cm.*

**Solución:**

La densidad de energía electromagnética será la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética.

La densidad de energía eléctrica vale

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = 27,7 \text{ J/m}^3$$

y la densidad de energía magnética

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = 159 \text{ J/m}^3$$

con lo que la densidad de energía electromagnética resulta

$$u = u_e + u_m = 187 \text{ J/m}^3.$$

La energía total en la caja es

$$U = u\tau = u\ell^3 = 0,323 \text{ J/m}^3.$$

## 8.9. Corriente de desplazamiento

Hasta ahora, al aplicar la ley de Ampère en Magnetostática, esto es

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

donde  $I_{\text{enc}}$  era la suma de las corrientes de estos tipos encerradas en la curva  $C$ , hemos considerado corrientes eléctricas de tipo filiforme, superficial o volúmico. Estas corrientes constituyen desplazamientos reales de cargas eléctricas en conductores. Sin embargo, cuando trabajamos con fenómenos electromagnéticos variables en el tiempo hay que considerar otros tipos de corrientes distintas a las mencionadas, por lo que será necesario modificar la ley de Ampère, que sólo es válida en Magnetostática.

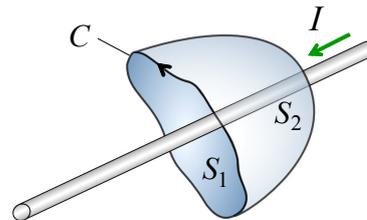


Figura 8.31: La curva  $C$  encierra la corriente  $I$  transportada por un hilo conductor. Existe un número infinito de superficies abiertas, como  $S_1$  y  $S_2$ , que tienen a  $C$  como contorno y que pueden usarse al aplicar la ley de Ampère

Consideremos un hilo conductor que transporta una corriente  $I$  y sea  $C$  la curva de la figura 8.31 que encierra la corriente  $I$ . La curva  $C$  define un número infinito de superficies abiertas que tienen a

$C$  como contorno. En la figura 8.31 sólo se muestran dos: una superficie plana  $S_1$  y otra en forma de gorro o saco  $S_2$ . Ambas superficies están atravesadas por la misma corriente pues si no fuera así se produciría una acumulación de carga en el trozo de hilo que está entre ambas, acumulación que crecería indefinidamente, algo que es imposible. Por lo tanto, se puede usar cualquiera de las dos superficies al aplicar la ley de Ampère

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{enc} \\ &= \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}. \end{aligned}$$

En la figura 8.32 se muestra una situación diferente: se trata de un condensador cargándose. En la figura se muestra de nuevo la curva  $C$  así como dos de las infinitas superficies que tienen como contorno la curva  $C$ .

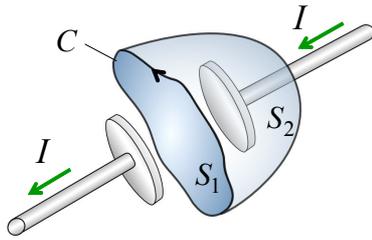


Figura 8.32: Las superficies abiertas  $S_1$  y  $S_2$  tienen a  $C$  como contorno. Mientras que  $S_2$  está atravesada por la corriente  $I$  la superficie  $S_1$ , que está entre las placas del condensador, no está atravesada por ninguna intensidad.

Como antes, la superficie  $S_2$  está atravesada por la intensidad  $I$ . Sin embargo la superficie  $S_1$  que está entre las placas del condensador no está atravesada por ninguna intensidad: no hay conductor entre las armaduras del condensador. Hay otra diferencia y consiste en que ahora la corriente  $I$  es necesariamente variable y en disminución a medida que el condensador se carga: se va por tanto produciendo una acumulación de carga  $+Q$  en la placa que está entre  $S_1$  y  $S_2$ .

Por el principio de conservación de la carga, la corriente que pasa a través de  $S_2$  es

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

mientras que a través de  $S_1$  la corriente es nula. La ley de Ampère da entonces dos resultados distintos para el segundo miembro dependiendo de la superficie elegida lo que es una inconsistencia.

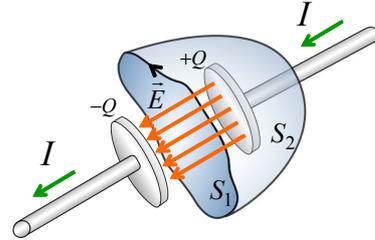


Figura 8.33: Introduciendo el concepto de corriente de desplazamiento la intensidad encerrada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$  es la misma.

Para resolver el problema planteado en el párrafo anterior Maxwell modificó la ley de Ampère: consideró que existe una corriente (sin equivalente mecánico de cargas en movimiento) que atraviesa  $S_1$ , de manera que la intensidad encerrada por la superficie  $S_1$  y por  $S_2$  fuera la misma. Con ello se devuelve la consistencia a la ley de Ampère. Veamos el planteamiento: entre las placas del condensador plano-paralelo existe un campo eléctrico

$$E = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

de donde

$$Q = \epsilon_0 S E = \epsilon_0 \Phi_e$$

siendo  $\Phi_e$  es el flujo eléctrico, cuya expresión general es

$$\Phi_e = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

Si derivamos la expresión de la carga en las armaduras respecto del tiempo, obtendremos la intensidad que recorre el cable y que va cargando el condensador

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \Phi_e) = \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} \equiv I_d$$

donde  $I_d$  se denomina **corriente de desplazamiento**. Una forma alternativa de expresar esta corriente es

$$\begin{aligned} I_d &= \epsilon_0 \frac{d\Phi_e}{dt} = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right). \end{aligned}$$

Ahora que ya disponemos de la expresión de la corriente de desplazamiento se puede reformular la ley de Ampère introduciendo una corriente generalizada, suma de las corrientes convencionales (de conducción),  $I_c$ , y las de desplazamiento,  $I_d$ ,

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0(I_c + I_d) \\ &= \mu_0 I_c + \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right).\end{aligned}$$

Cuando el vector desplazamiento  $\vec{D}$  varía lentamente, la corriente de desplazamiento será muy pequeña y se podrá despreciar. El término de la corriente de desplazamiento es importante, por lo tanto, a altas frecuencias.

## 8.10. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell, así llamadas en honor a James Clerk Maxwell, son las ecuaciones fundamentales para el estudio de los fenómenos electromagnéticos, de la misma manera que las ecuaciones de Newton lo son para la Mecánica.

Maxwell modificó en la década de 1860 las ecuaciones que, inicialmente, describían los conceptos de la Electroestática y la Magnetostática como dos disciplinas distintas. En décadas anteriores, diversos científicos habían descubierto la existencia de una relación entre ambas, pero ninguno había conseguido establecer una teoría coherente y completa.

De hecho, la teoría desarrollada por Maxwell no sólo tuvo las implicaciones que él mismo inicialmente intuyó en el ámbito de los fenómenos electromagnéticos, sino que llegó más lejos al concordar con la teoría de la Relatividad Especial de Einstein, constituyendo un soporte inicial para la propia introducción a dicha teoría.

En la **Electroestática** hay dos ecuaciones fundamentales a partir de las cuales se puede deducir el resto. La primera es la ley de Gauss para la Electroestática

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}.$$

La segunda es la que indica que, en Electroestática, el campo eléctrico es conservativo

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0.$$

Maxwell consideró que esta segunda ecuación podía sustituirse por la que resume la ley de Faraday-Lenz

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right).$$

Esta sustitución no implica perder generalidad pues, cuando no hay variación del campo con el tiempo (caso estático), la derivada del segundo miembro es nula y la integral de línea cerrada del campo eléctrico sería también nula, como sucede en Electroestática. Por consiguiente, ambas ecuaciones se reducen al caso electrostático cuando no hay variación con el tiempo.

En la **Magnetostática** también hay dos ecuaciones que la resumen. La primera nos da el flujo del campo magnético

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

La segunda es la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

donde  $I_{\text{enc}}$  es la corriente de conducción encerrada por la curva  $C$ .

Como hemos visto, Maxwell generalizó esta ley mediante la introducción de la corriente de desplazamiento con lo que se obtuvo la ecuación de Maxwell-Ampère

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0(I_{\text{enc}} + I_d) \\ &= \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \right).\end{aligned}$$

Con ésto, las cuatro ecuaciones de Maxwell quedan

$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \\ \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{\text{enc}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} \right).\end{aligned}$
---

A partir de estas ecuaciones, Maxwell predijo la existencia de las ondas electromagnéticas que se

producirían por cargas eléctricas aceleradas, ondas que se propagarían por el espacio a la velocidad

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{10^{-9}}{36\pi} 4\pi \times 10^{-7}}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

velocidad que coincide con la velocidad medida experimentalmente para la luz. Por ello Maxwell dedujo que la luz no era mas que una onda electromagnética de las que su teoría predecía la existencia. Estas ondas fueron producidas y medidas posteriormente por Hertz

### 8.10.1. Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

Aunque la formulación matemática anterior de las ecuaciones de Maxwell es la más sencilla, existe otra forma de expresarlas, la forma diferencial. Para ello se precisa una cantidad mayor de conocimientos matemáticos que, teniendo en cuenta que esta parte de la asignatura se imparte los últimos días del curso, los alumnos deben tener. En el proceso que seguiremos a continuación se hará uso de los operadores diferenciales de divergencia, rotacional así como de los teoremas de Gauss y Stokes.

a) En la primera de las ecuaciones

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

la carga encerrada se puede poner en función de la densidad de carga volúmica

$$Q_{\text{enc}} = \iiint_{\tau} \rho_{\tau} d\tau$$

mientras que aplicando el teorema de Gauss al primer término, podemos pasar de una integral sobre una superficie cerrada  $S$ , a una en el volumen  $\tau$  encerrado por dicha superficie

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} d\tau$$

con lo que la primera de las ecuaciones queda

$$\iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\tau} \rho_{\tau} d\tau$$

y para que las dos integrales de volumen sean idénticas es necesario que lo sean sus integrandos, luego

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\tau}}{\epsilon_0}$$

que es la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial.

b) En la segunda de las ecuaciones

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

haciendo también uso del teorema de Gauss, pasamos la integral de superficie a otra de volumen

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\tau} \nabla \cdot \vec{B} d\tau = 0$$

es decir

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

que es la segunda ecuación de Maxwell en forma diferencial.

c) La tercera ecuación

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

podemos, en el primer miembro, hacer uso del teorema de Stokes y pasar la integral de línea a otra de superficie sobre la superficie limitada por la curva  $C$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}$$

En el segundo miembro podemos introducir el operador derivada con respecto al tiempo en el interior de la integral; hay que tener en cuenta que al introducirlo pasa a ser derivada parcial

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

es decir

$$\iint_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

y para que las dos integrales de superficie sean idénticas es necesario que lo sean sus integrandos, luego

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que es la tercera ecuación de Maxwell.

d) La cuarta ecuación

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$$

podemos transformar el primer miembro haciendo uso del teorema de Stokes y pasar la integral de línea a otra de superficie sobre la superficie limitada por la curva  $C$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S}$$

mientras que el primer término del segundo miembro

$$\mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

y el segundo término, introduciendo el operador derivada dentro de la integral

$$\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = \epsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Con todo ello la ecuación, sustituyendo las expresiones anteriores queda

$$\iint_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \epsilon_0 \mu_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

e igualando los integrandos de las integrales de superficie se obtiene la cuarta ecuación de Maxwell en forma diferencial

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Las cuatro ecuaciones agrupadas son

$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\tau}}{\epsilon_0}$
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$