Prácticas Matlab

Práctica 2

Objetivos

- Dibujar gráficas de funciones definidas a trozos con el comando *Plot*.
- Dibujar funciones implícitas con el comando *ezplot*.
- Calcular límites de funciones en puntos concretos de su dominio.
- Representar gráficas de funciones

Comandos de Matlab

Para construir objetos simbólicos:

syms arg1 arg2 …
Es la forma abreviada de escribir:
arg1 = sym('arg1');
arg2 = sym('arg2'); …

Si se quiere indicar el tipo del objeto simbólico se puede escribir:

syms arg1 arg2 … real
Es la forma abreviada de escribir:
arg1 = sym('arg1','real');
arg2 = sym('arg2','real'); …
syms arg1 arg2 … positive
Es la forma abreviada de escribir:
arg1 = sym('arg1','positive');
arg2 = sym('arg2','positive'); …
syms arg1 arg2 … unreal
Es la forma abreviada de escribir:
arg1 = sym('arg1','unreal');
arg2 = sym('arg2','unreal'); …

Ejemplo:

```
>> syms x
>> y=sin(x)+3^x+8/(x+1)
```

Para hacer una sustitución simbólica simple de "var" en "valor" en la expresión "f":

subs(f,var,valor)

Ejemplo:

```
>> syms x
```

```
>> y=sin(x)+3^x+8/(x+1)
>> subs(y, x, 2)
```

Para realizar la gráfica de una función simbólica en un dominio y en la ventana de dibujo indicada en fig:

```
ezplot(f, [a,b], fig)
Ejemplo:
>>      syms x
>>      y=sin(x)+3^x+8/(x+1)
>>%El segundo y el tercer parámetro son opcionales.
>>      ezplot(y, [-2,2])
```

Para resolver de forma simbólica ecuaciones algebraicas:

```
solve('eqn1','eqn2',...,'eqnn')
solve('eqn1','eqn2',...,'eqnn','var1,var2,...,varn')
solve('eqn1','eqn2',...,'eqnn','var1','var2',...'varn')
    Ejemplo:
      >>  % Calculamos las raíces de un polinomio genérico
   de grado 3.
      >>  syms x a b c d
      >>  v=solve(a*x^3+b*x^2+c*x+d)
      >>  r=subexpr(v(1))
      >>  s=subexpr(v(2))
      >>  t=subexpr(v(3))
```

Para escribir simplificada o de forma más habitual una expresión:

```
pretty(expresion)
    Ejemplo:
    >>      syms x
    >>      pretty(sin(x)^2+(cos(x)+3)/(sin(2*x)+5))

simplify(expresion)
    Ejemplo:
    >>      syms x
    >> pretty(simplify(cos(x)*cos(x)-sin(x)*sin(x)))
```

Para obtener el límite de una expresión simbólica “f” cuando la variable “n” tiende al valor “a”

```
limit(f,n,a)
    Ejemplo:
          >> syms n
          >> limit(1/n,n,inf)
```

Para obtener la derivada de orden n una función simbólica respecto de la variable x.

```
diff(f,x,n)
```

Ejemplo:

```
>> syms x y
>> f=sin(x*y)/x; diff(f,x,3)
```

Las funciones que simplifican la forma de las expresiones simbólicas son:

collect(p)	Reúne los términos iguales
horner(p)	Cambia a la representación anidada o de Horner
expand(p)	Expande los productos en sumas
factor(p)	Factoriza la expresión (a veces) si el argumento es una función simbólica. Si se trata de un número proporciona la factorización en números primos.
simplify(p)	Simplifica una expresión mediante la aplicación de diversas identidades algebraicas.
simple(p)	Utiliza diferentes herramientas de simplificación y selecciona la forma que tiene el menor número de caracteres
pretty(p)	Visualiza la expresión de una manera similar a la utilizada en la escritura habitual.

Ejemplos resueltos

1

Gráfica de una función a trozos. Dibujar la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{tg}(x) & si \quad -\pi/4 \le x \le \pi/4 \\ \cos(x-\pi/4) & si \quad \pi/4 < x \le \pi/2 \\ e^x & si \quad \pi/2 < x \le 3 \end{cases}$$

Solución:

```
x1=-pi/4:pi/200:pi/4;
y1=tan(x1);
x2=pi/4:pi/200:pi/2;
y2=cos(x2-pi/4);
%Linspace genera 100 puntos entre dos números dados, se puede
%indicar tambien el número de puntos de la forma linspace(x1,x2,n)
x3=linspace(pi/2,3);
y3=exp(x3);
x=[x1,x2,x3];
y=[y1,y2,y3];
```

```
plot(x,y)
```

2

Gráfica de una función implícita: Dibujar la gráfica de la función $x^2 + 4y^2 - 3x + y - 5 = 0$.

Solución:

```
ezplot('x^2+4*y^2-3*x+y-5',[-5,5])
grid on
```

3

Calcular los límites de las siguientes funciones racionales en el punto que se indica utilizando tres métodos diferentes:

a. Factorizando el numerador.
b. Dibujando la gráfica de la función en un entorno del punto.
c. Evaluando *f* para pequeños incrementos de *x* en torno al punto.
d. Utilizando la función *limit*

$$(1)\quad \lim_{x\to 13} \frac{x^3 - 9x^2 - 45x - 91}{x-13}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 13} \frac{x^3 - 9x^2 - 39x - 86}{x-13}$$

$$(3)\quad \lim_{x\to 13} \frac{x^4 - 26x^3 + 178x^2 - 234x - 1521}{x-13}$$

Solución:

a. Factorizando

```
syms x
f1=x^3-9*x^2-45*x-91;
P1=factor(f1);
f=P1/(x-13);
x=13;
limite=eval(f)
```

b. Dibujando la gráfica

```
%Utilizando la orden ezplot
ezplot (f,[-15,15]); grid on

%Con vectores de puntos
x=10:.1:14;
y=x.^2+4*x+7
plot(x,y,'r')
hold on
plot([13 13],[200 240])
```

c. Incrementando el valor de x

```
syms x
f='(x^3-9*x^2-45*x-91)/(x-13)'
a=13;
```

```
for k=1:1:10
   x=a+(1/2)^k;
   fprintf('%f %f \n', x, eval(f))
end
```

Otra forma (vectorial)

```
k=1:10;
a=13;
x=a+(1/2).^k;
f= (x.^3-9*x.^2-45*x-91)./(x-13)
disp([x' f'])
```

Así se aproxima el límite por la derecha. Se deja al alumno que genere esta tabla para valores menores de 13.

e. Utilizando limit

```
syms x
limit((x^3-9*x^2-45*x-91)/(x-13),x,13)
Probar 'right' y 'left'.
```

4

Se considera la función $f(x)=\dfrac{10x+5}{x^4+x^3+2x-4}$.

(a) Utilizar Matlab para factorizar el denominador de esta función.

(b) Representar la función gráficamente con Matlab y reproducir la gráfica en los ejes dados:

(c) Señalar en el eje OX los valores de *x* que verifican las condiciones siguientes:

(c1) $f(x)\le 2$ (c2) $f(x)\le 0$

(d) A la vista de la gráfica indica el dominio de *f*:

(e) Con la ayuda de la gráfica indicar si la función $f(x)$ está acotada en $\mathbb{R}$. Dar una cota superior y otra inferior, cuando existan, en el intervalo que se indica.

	Cota inferior		Cota superior
$x\in\mathbb{R}$			
$x\in\left[-1,0\right]$			
$x\in\left(1,\infty\right)$			

(f) A la vista de la gráfica, y haciendo cálculos a mano, indicar el valor de los siguientes límites: $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$

(g) Calcular los límites anteriores, utilizando órdenes Matlab. ¿Hay alguno que no coincida con los resultados anteriores?

(h) Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x=0$. Puedes hacerlo a mano o ayudándote con Matlab.

(i) Calcular los valores aproximados de la función en un entorno del origen utilizando la recta tangente anterior. Para ello completar la siguiente tabla, con ayuda de Matlab:

x	$f(x)$	$T(x)$	$\left\|f(x)-T(x)\right\|$
-0.3			
-0.2			
-0.1			
0			
0.1			
0.2			
0.3			

(j) A la vista de la gráfica de $f(x)$, dar un intervalo abierto (a,b), en el que $f(x)$ alcance el máximo y el mínimo absolutos. Calcular estos valores de forma aproximada con ayuda de Matlab.

Solución:

(a) Utilizar Matlab para factorizar el denominador de esta función.

```
syms x
q=x^4+x^3+2*x-4
p=factor(q)
```

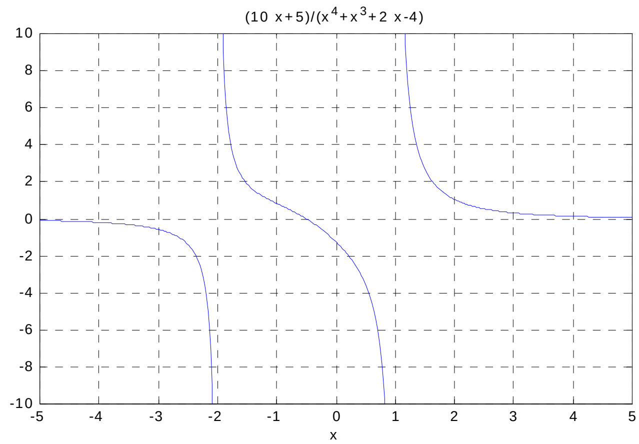
El polinomio factorizado es: $x^4+x^3+2x-4=$ (x-1)*(x+2)*(x^2+2)

(b) Representar la función gráficamente con Matlab y reproducir la gráfica en los ejes dados:

Órdenes Matlab:

```
hold on
grid on
f=(10*x+5)/q
ezplot(f,[-5,5])
hold off
```

Gráfica :



(c) Señalar en el eje OX los valores de *x* que verifican las condiciones siguientes:

(c1) $f(x) \leq 2$ (c2) $f(x) \leq 0$

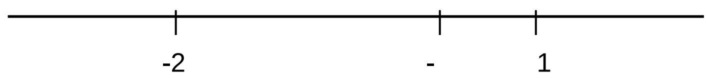
Órdenes Matlab utilizadas:

```
solve('(10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4)=2')
double(ans)
solve('(10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4)=0')
```

Por lo tanto,

$f(x) \leq 2$ Sol.: $\left(-\infty,-2\right) \cup \left(-1.53,1\right) \cup \left(1.63,\infty\right)$

$f(x) \leq 0$ Sol.: $\left(-\infty,-2\right) \cup \left(-0.5,1\right)$



resolviendo estas ecuaciones y mirando en la gráfica se obtienen los intervalos pedidos.

(d) A la vista de la gráfica indica el dominio de *f*: $\boxed{\mathbb{R} - \left\{-2,1\right\}}$

(e) Con la ayuda de la gráfica indicar si la función $f(x)$ está acotada en $\mathbb{R}$. Dar una cota superior y otra inferior, cuando existan, en el intervalo que se indica.

	Cota inferior		Cota superior
$x \in \mathbb{R}$	No tiene	$-\infty < f(x) < \infty$	No tiene
$x \in \left[-1,0\right]$	-1.3	$-1.250 \leq f(x) \leq 0.833$	0.9
$x \in \left(1,\infty\right)$	0	$0 < f(x) < \infty$	No tiene

Para rellenar la tabla se debe mirar la grárica y calcular los valores de la función en los extremos de los intervalos pedidos y mirando en la gráfica.

```
y1=subs(f,x,-1)
y2=subs(f,x,0)
y3=subs(f,x,1)
```

(f) A la vista de la gráfica, y haciendo cálculos a mano, indicar el valor de los siguientes límites:

$\lim_{x\to\infty} f(x)$	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 1^+} f(x)$	$\lim_{x\to 1^-} f(x)$
0	$-\frac{5}{4}$	∞	$-\infty$

El valor del límite en el origen se calcula haciendo $x = 0$ *en la ecuación de* $f(x)$*, los demás valores se obtienen de la gráfica.*

(g) Calcular los límites anteriores, utilizando órdenes Matlab. ¿Hay alguno que no coincida con los resultados anteriores?

Órdenes Matlab:

```
limit((10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4),x,inf)
limit((10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4),x,0)
limit((10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4),x,1,'right')
limit((10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4),x,1,'left')
```

Los valores obtenidos son los mismos que los del apartado anterior.

(h) Calcular la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 0$. Puedes hacerlo a mano o ayudándote con Matlab.

Órdenes Matlab:

```
derivada=diff((10*x+5)/(x^4+x^3+2*x-4))
pretty(derivada)
subs(derivada,x,0)
```

Ecuación de la recta:

Recta que pasa por el punto $\left(0, -1.250\right)$, y tiene de pendiente -3.125:

$$T(x) = -3.125x - 1.250$$

(i) Calcular los valores aproximados de la función en un entorno del origen utilizando la recta tangente anterior. Para ello completar la siguiente tabla, con ayuda de Matlab:

x	$f(x)$	$T(x)$	$\lvert f(x)-T(x)\rvert$
-0.3	-0.4330	-0.3125	0.1205
-0.2	-0.6808	-0.6250	0.0558
-0.1	-0.9522	-0.9375	0.0147
0	-1.2500	-1.2500	0
0.1	-1.5794	-1.5625	0.0169
0.2	-1.9496	-1.8750	0.0746
0.3	-2.3775	-2.1875	0.1900

Órdenes Matlab:

```
x=-0.3:0.1:0.3;
yf=(10*x+5)./(x.^4+x.^3+2*x-4);
yt=-3.125*x-1.25;
error=abs(yf-yt);
disp('   f(x)      T(x)      error ')
disp([yf'  yt'  error'])
format short
```

¿Qué significado tienen los valores de la última columna?

Es el error que se comete cuando se hace la aproximación lineal del valor de $f(x)$ en los puntos indicados, utilizando la recta tangente en el rigen.

Para encontrar un intervalo abierto en el que f alcance un valor máximo absoluto(M) y un valor mínimo absoluto(m), habrá que tener en cuenta que éstos deben alcanzarse en alguno de los extremos relativos de la función. Como la función no tiene extremos relativos, tampoco los tendrá absolutos en ningún intervalo abierto.

Ejemplos propuestos

1

Realizar un estudio de la función $f\left(x\right)=\dfrac{3x^3-18x^2-81x+420}{2x^2-6x-20}$

(a) Calcular el dominio, puntos de corte con los ejes, crecimiento, decrecimiento, concavidad y asíntotas.
(b) Obtener la función derivada en los puntos en los que la función sea derivable.
(c) Calcular la recta tangente en el punto de abscisa 1.
(d) Dibujar en una misma gráfica la función y la recta tangente a la derivada en el punto de abscisa 1.

Solución:

2

Derivación

(a) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y la recta $g(x) = 2x$ pasando por $x = 2$. ¿Qué relación hay entre estas dos gráficas?.

(b) Utilizando Matlab verificar la regla de derivación de las potencias de *x* para la función *f(x).*

Solución:

(a)
```
syms x
f='x^2'
ft='2*x'
ezplot(f,[1 3])
hold on
ezplot(ft,[1 3])
ginput
zoom on
```

(b)
```
%comprobación de la regla de derivación
derivada=limit(expand(((x+h)^2-x^2)/h),h,0)
```