Prácticas Lemat

Práctica 6: Sucesiones numéricas

Objetivos

- Ayudar a comprender los conceptos de sucesión, monotonía, acotación y límite de una sucesión utilizando las herramientas gráficas y de cálculo que proporciona Lemat.

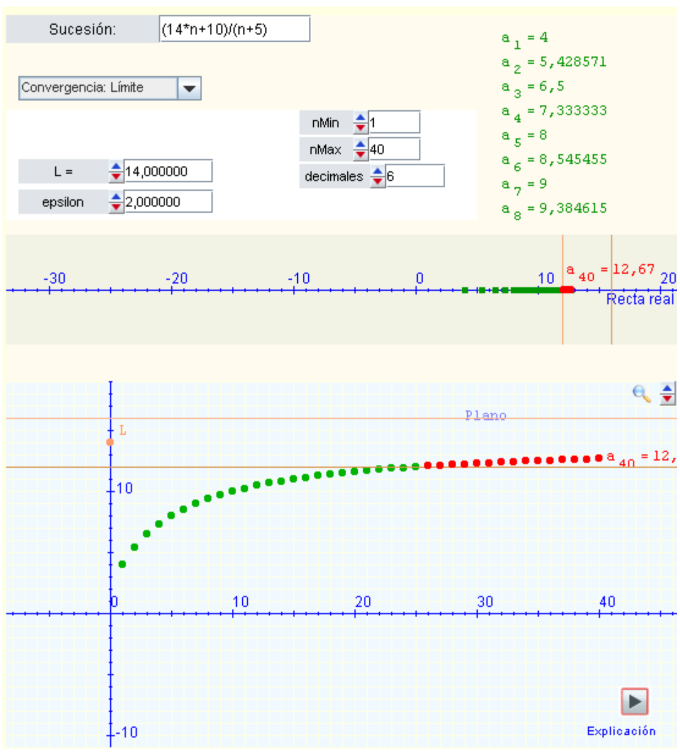
Acceso a Lemat

1. Entrar en la página de Lemat http://www.lemat.unican.es/

2. Para poder utilizar este material se debe comprobar si el ordenador tiene instalado todo el software necesario que se indica en la página http://www.lemat.unican.es/lemat/presentacion/requisitos.htm

En esta práctica se utilizará el laboratorio de sucesiones que se encuentra en el Nivel 2 del tema de Sucesiones y Series de Lemat. Se puede acceder a él desde la página

http://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/sucesiones/nivel2/lab/sucesiones.htm



Recuerda:
(a) Para estudiar una sucesión no basta con estudiar el comportamiento de los primeros términos.
(b) Para estudiar la monotonía y acotación de una sucesión a_n se puede considerar la función $f(x)$ cumpliendo $a_n = f(n)$ y particularizar los resultados en el caso de que se considere el dominio de la función únicamente el conjunto de los números naturales.

Ejercicios resueltos

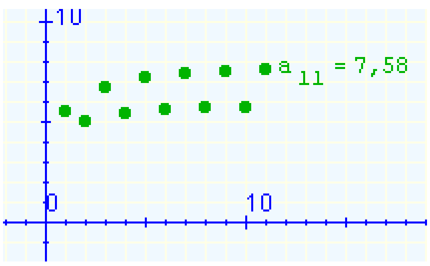
1

Considerar la sucesión $a_n = \dfrac{7n+3-n(-1)^n}{n+1}$

(a) Escribir la expresión del término 10 y 11 de la sucesión.
(b) Observar, con ayuda del laboratorio, la representación de los primeros 11 términos de la sucesión en la recta y en el plano. Para introducir el término general de la sucesión se debe teclear: (7*n+3-n*(-1)^n)/(n+1).
(c) ¿Es monótona la sucesión a_n ? Observar el signo de $a_n - a_{n-1}$.
(d) ¿Está acotada la sucesión a_n ? En caso afirmativo dar una cota superior y una inferior.

(a) $a_{10} = \dfrac{7\cdot 10+3-10(-1)^{10}}{10+1} = \dfrac{63}{11}$ $\qquad a_{11} = \dfrac{7\cdot 11+3-11(-1)^{11}}{11+1} = \dfrac{91}{12}$

(b)



(c) No es monótona. Observa que los términos impares son siempre mayores que los pares y que por tanto

$$a_{2n-1} - a_{2n} > 0$$
$$a_{2n} - a_{2n+1} < 0$$

(d) Sí, está acotada. Una cota superior puede ser 10 y una inferior 4

IMPORTANTE:
Una sucesión puede estar acotada y no ser monótona.

2

Considerar la sucesión $a_n = \dfrac{14n+10}{n+5}$

(a) ¿Es monótona la sucesión a_n ?

(b) Tomando L=14 y comprobar, para distintos valores de épsilon, si puede asegurarse que a partir de un cierto término de la sucesión, n_0, se cumple que $a_n \in \left(14 - epsilon, 14 + epsilon\right)$ siempre que n sea mayor que n_0. Rellenar para ello la siguiente tabla.

epsilon	n_0
0.5	
10^{-1}	
10^{-2}	

¿Es convergente la sucesión a_n ?

(c) ¿Es acotada la sucesión a_n ?

(a) Es monótona creciente ya que:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{14n+10}{n+5} - \frac{14\left(n+1\right)+10}{\left(n+1\right)+5} = \frac{\left(14n+10\right)\left(n+6\right) - \left(14n+29\right)\left(n+5\right)}{\left(n+5\right)\left(n+6\right)}$$

$$= \frac{-5n-85}{\left(n+5\right)\left(n+6\right)} < 0$$

(b) Observar que:

$$\left|a_n - 14\right| = \left|\frac{14n+10}{n+5} - 14\right| = \left|\frac{-60}{n+5}\right| = \frac{60}{n+5}$$

Luego $a_n \in (14 - epsilon, 14 + epsilon)$ si se cumple $|a_n - 14| = \frac{50}{n+5} < epsilon$. Es decir,

$$\frac{60}{epsilon} < n + 5 \Leftrightarrow \frac{60}{epsilon} - 5 < n$$

La sucesión a_n es entonces convergente y su límite es 14.

En la siguiente tabla se muestra, para distintos valores de épsilon, el valor de n_0 a partir del cual si n es mayor que n_0 se cumple $a_n \in (14 - epsilon, 14 + epsilon)$

epsilon	n_0
0.5	$\frac{60}{0.5} - 5 < n \quad \rightarrow \quad n_o = 115$
10^{-1}	$\frac{60}{0.1} - 5 < n \quad \rightarrow \quad n_o = 595$
10^{-2}	$\frac{60}{0.01} - 5 < n \quad \rightarrow \quad n_o = 5995$

Como es una sucesión monótona creciente una cota de la sucesión es su límite, 14, y una cota inferior puede ser su primer término $a_1 = 4$.

IMPORTANTE: Toda sucesión convergente está acotada.

3

Considera la sucesión $a_n = 3 + 2 * \frac{sen(n)}{n}$.

(a) Represéntala con ayuda del Laboratorio. Debes escribir: 3+2*sin(n)/n
(b) ¿Es monótona? Justifica la respuesta.
(c) ¿Es acotada? Justifica la respuesta.
(d) Calcula a mano el número n_0 de manera que se pueda asegurar que $a_n \in (3 - epsilon, 3 + epsilon)$ siempre que $n > n_0$ para valores

de epsilon de la tabla:

epsilon	n_0
10^{-1}	
10^{-2}	

Comprueba los valores obtenidos en el laboratorio.

¿Es convergente? En caso afirmativo utiliza la definición de límite para demostrar su convergencia.

IMPORTANTE: No toda sucesión convergente es monótona

TEOREMA DE WEIERSTRASS: Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Si es creciente converge a su supremo y si es decreciente a su ínfimo.

NÚMERO e: Como consecuencia de este teorema se puede definir el número e como el límite de la sucesión monótona y acotada $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

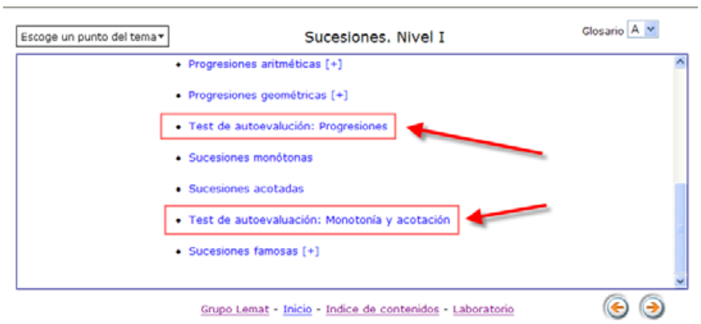
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2'7182828$$

Ejercicios propuestos

1

Acceder al nivel 1 de sucesiones de Lemat

http://www.lemat.unican.es/lemat/proyecto_lemat/sucesiones/nivel1/sucesiones_cuna.htm



- En el menú elegir la opción *Test de autoevaluación: Progresiones*. Realiza el test y escribe las respuestas que hayas obtenido.
- En el menú elegir la opción *Test de autoevaluación: Sucesiones monótonas y acotadas*. Realiza el test y escribe las respuestas que hayas obtenido.